

# 双稳系统随机共振的反馈控制\*

林 敏† 黄咏梅 方利民

(中国计量学院计量技术工程学院 杭州 310018)  
(2007 年 8 月 10 日收到 2007 年 11 月 16 日收到修改稿)

将双稳系统的输出反馈到输入端再作用于系统,提出了采用反馈来控制随机共振的方法,以典型双稳系统为对象,并以信噪比和功率谱放大率作为度量随机共振效应的可观察变量,分别研究了采用线性或非线性反馈函数所产生的随机共振现象.理论分析和数值仿真结果表明随机共振是可控制的.该方法特别适用于系统参数固定或难以改变的系

关键词:双稳系统,随机共振,反馈控制,共振效应

PACC: 0540, 0545

## 1. 引 言

随机共振是以噪声作为媒介引起微弱周期信号与非线性系统协同作用的非线性现象.它描述了在一定的噪声背景中非线性系统对微弱的周期信号能产生强烈的输出响应,存在着噪声能量向信号能量转移的机制.自 1981 年 Benzi 等<sup>[1]</sup>提出随机共振这一概念以来,人们对随机共振的规律及其在自然科学各个领域的表现已经有了较为深入的研究<sup>[2-7]</sup>.在自然界广泛存在随机共振这一事实已被普遍接受.随机共振在非线性光学、固态器件、神经生理学、信号处理、智能理论等领域也获得了重要应用.但这些研究更多地是从观察的角度而不是从影响的角度来研究随机共振.更重要的是作为自然科学研究成果的最终目的,总是离不开成功的应用,而随机共振的控制则是随机共振应用的关键环节.

1999 年 Gammaitoni 等<sup>[8]</sup>为了增强或抑制系统输出功率谱在输入信号频率处的谱值,提出了采用正弦信号调制系统的势垒高度来控制随机共振的方法.2000 年, Löcher 等<sup>[9]</sup>在文献[8]的基础上,基于双态之间的概率跃迁主方程提出了双态系统随机共振控制的一般理论框架,有力地促进了随机共振控制思想的形成.但是,许多实际的系统(譬如神经细胞)要改变其相关的势垒高度或阈值是困难的或是不可

能的.针对这一问题,人们相继提出了利用外加控制脉冲通过提高双态之间的跃迁概率来增强随机共振效应<sup>[10]</sup>.采用了随机共振的非侵入式控制<sup>[11]</sup>和谐波混合控制非线性随机共振<sup>[12]</sup>.

控制随机共振的一种最直接的方法是改变系统参数,使系统在给定的噪声和信号作用下产生随机共振或使其产生的共振效应更加强烈.然而,在实际问题中系统的参数常常是客观给定不可改变或对参数的改变要付出极大的代价.本文根据非线性双稳系统在噪声和周期信号作用下的绝热近似理论,分析了双稳系统参数对随机共振的产生及共振强烈程度的影响,提出了采用反馈技术控制随机共振的方法.通过调节反馈参数能有效地控制双稳系统输出的信噪比和功率谱放大率,实现有更多的噪声能量向信号能量的转移.

## 2. 双稳系统随机共振效应

作为研究随机共振的经典模型,考虑一维动力学系统

$$\dot{x} = -\frac{dV(x)}{dx} + A \cos(\omega t) + \xi(t), \quad (1)$$

式中

$$V(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{4}bx^4$$

是双势阱函数,其中参数  $a$  和  $b$  均大于零; $\xi(t)$  是

\* 国家自然科学基金(批准号 60674023, 50675214)资助的课题.

† E-mail: limm@cjlu.edu.cn

均值为零、自相关函数  $\xi(t)\xi(0) = 2D\delta(t)$  的高斯白噪声,其中  $D$  代表噪声强度.(1)式描述了处于双势阱中的粒子受到周期信号  $A\cos(\omega t)$  ( $A$  是幅值,  $\omega$  是频率)和随机力  $\xi(t)$  作用时,在过阻尼条件下的运动.双势阱函数的性态由参数  $a$  和  $b$  确定,作用到系统的  $A\cos(\omega t)$  的功率谱是线谱,  $\xi(t)$  的功率谱则是常数.由于随机共振存在着噪声能量与信号能量之间的转换,随机共振的效应与能量间的转换大小有关,为了定量地刻画由双稳系统、噪声和信号构成的随机共振体系中能量的变化关系,采用与功率谱相关的信噪比和功率谱放大率来量化随机共振效应.

### 2.1. 信 噪 比

在绝热近似下,双稳系统输出信号的信噪比<sup>[2,13]</sup>  $R$  与系统参数  $a, b$  之间的关系可表示为

$$R(a, b) = \pi \frac{A^2}{4D^2} \frac{a}{b} r_k = \frac{A^2}{2\sqrt{2}D^2} \frac{a^2}{b} \exp\left(-\frac{a^2}{4bD}\right), \quad (2)$$

式中

$$r_k = \frac{\sqrt{2}}{\pi} a \exp\left(-\frac{a^2}{4bD}\right)$$

为 Kramers 逃逸率.(2)式表明  $R$  随双稳系统参数  $a$  或  $b$  的变化并非单调,而是存在着如图 1 所示的单峰.对于给定的噪声强度和输入信号,参数  $D$  和  $A$  均为常数,则  $R$  仅取决于  $a$  或  $b$ .

### 2.2. 功率谱放大率

双稳系统输出信号的功率谱与输入信号的功率谱之比称为系统的功率谱放大率.在绝热近似下,双稳系统的功率谱放大率<sup>[2,13]</sup>  $P$  可表示为

$$P(a, b) = \frac{a^2}{D^2 b^2} \frac{r_k^2}{r_k^2 + \omega^2} = \frac{a^2}{D^2 b^2} \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi} a \exp\left(-\frac{a^2}{4bD}\right)\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi} a \exp\left(-\frac{a^2}{4bD}\right)\right)^2 + \omega^2}. \quad (3)$$

(3)式与(2)式具有相似的性质,  $P$  随  $a$  或  $b$  的变化也非单调,而是存在着如图 2 所示的单峰.对于给定的噪声强度和输入信号,参数  $D$  和  $A$  均为常数,则  $P$  仅取决于  $a$  或  $b$ .

总之,无论是  $R$  或  $P$ ,其量值都随着双稳系统参数  $a$  或  $b$  而变化并出现峰值.  $R$  或  $P$  的量值反映

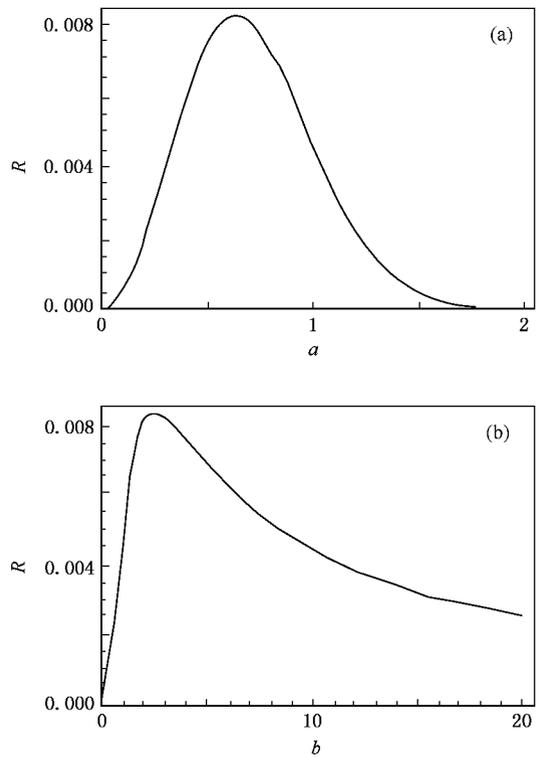


图 1  $R$  随  $a$  或  $b$  的变化  $A=0.04, D=0.1$ . (a)  $b=1$  (b)  $a=1$

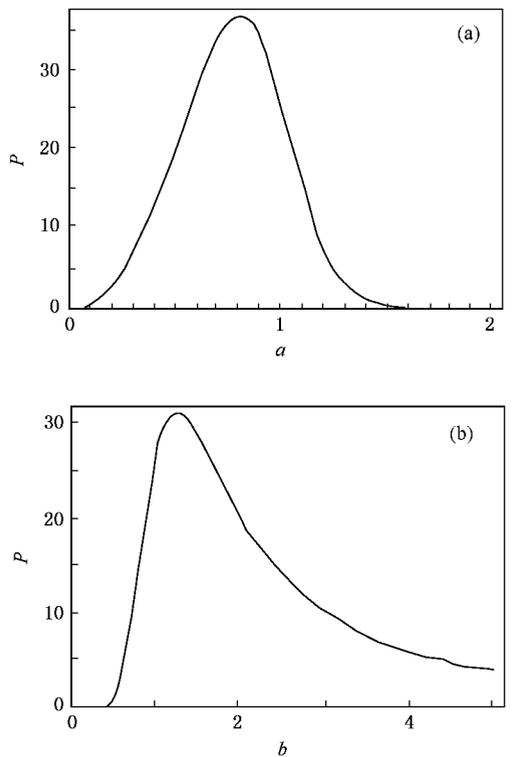


图 2  $P$  随  $a$  或  $b$  的变化  $D=0.1, \omega=0.02\pi$ . (a)  $b=1$  (b)  $a=1$

了噪声与信号之间能量的转换关系,共振时的能量

转换将达到极值. 因此, 双稳系统的参数  $a$  或  $b$  是影响随机共振效应的因素之一.

### 3. 反馈控制方法

对于参数是固定的或是不可改变的双稳系统, 为了人为地产生随机共振或增强双稳系统输出信号的功率、提高输出信号的信噪比和功率谱放大率, 必须通过调整控制对象以外的参数才能影响系统的输出. 根据影响随机共振效应的因素, 提出了如图 3 所示的随机共振反馈控制原理. 与图 3 相应的动力学方程可表示为

$$\dot{x} = a_0 x - b_0 x^3 + A \cos(\omega t) + \xi(t) - f(x)$$

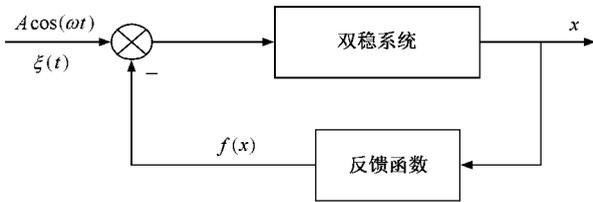


图 3 随机共振的反馈控制原理框图

$$+ \xi(t) - f(x), \quad (4)$$

式中  $a_0$  和  $b_0$  是双稳系统固有的不可改变的参数,  $f(x)$  是反馈函数. 反馈的引入改变了系统的势函数结构, 其势函数

$$V(x) = -\frac{1}{2} a_0 x^2 + \frac{1}{4} b_0 x^4 + \int_0^x f(x) dx,$$

从而对随机共振的效应产生影响.

#### 3.1. 线性反馈 $f(x) = kx$

取反馈函数

$$f(x) = kx,$$

其中  $k$  是可控制变量, 则势函数为

$$V(x) = -\frac{1}{2} a_0 x^2 + \frac{1}{4} b_0 x^4 + \frac{1}{2} kx^2,$$

相应的动力学方程为

$$\dot{x} = (a_0 - k)x - b_0 x^3 + A \cos(\omega t) + \xi(t). \quad (5)$$

(5) 式表明反馈的引入有效地改变了双稳系统的线性项参数, 使得  $a = a_0 - k$ , 双稳系统输出的信噪比  $R(a_0 - k, b_0)$  和功率谱放大率  $P(a_0 - k, b_0)$  都随  $k$  值而变, 如图 4 所示.

$$R(k) = \frac{A^2}{2\sqrt{2}D^2} \frac{(a_0 - k)^2}{b_0} \exp\left(-\frac{(a_0 - k)^2}{4b_0 D}\right), \quad (6)$$

$$P(k) = \frac{(a_0 - k)^2}{D^2 b_0^2} \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi} (a_0 - k) \exp\left(-\frac{(a_0 - k)^2}{4b_0 D}\right)\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi} (a_0 - k) \exp\left(-\frac{(a_0 - k)^2}{4b_0 D}\right)\right)^2 + \omega^2}. \quad (7)$$

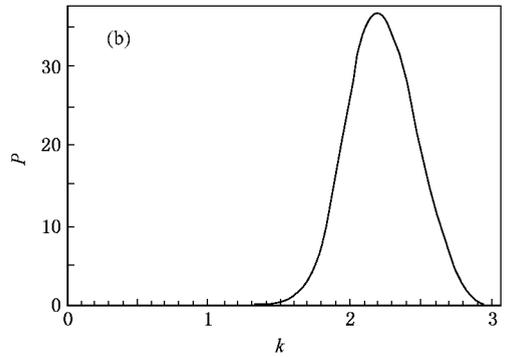
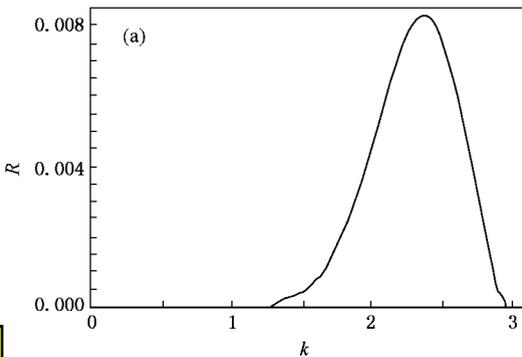


图 4 线性反馈时  $R$  和  $P$  随  $k$  变化的理论曲线  $A = 0.04, D = 0.1, \omega = 0.02\pi, a_0 = 3, b_0 = 1$ . (a)  $R$  随  $k$  的变化 (b)  $P$  随  $k$  的变化

#### 3.2. 非线性反馈 $f(x) = kx^3$

取反馈函数

$$f(x) = kx^3,$$

则势函数为

$$V(x) = -\frac{1}{2} a_0 x^2 + \frac{1}{4} b_0 x^4 + \frac{1}{4} kx^4,$$

相应的动力学方程为

$$\dot{x} = a_0 x - (b_0 + k)x^3 + A \cos(\omega t) + \xi(t). \quad (8)$$

双稳系统输出信号的信噪比  $R(a_0, b_0 + k)$  和功率

谱放大率  $P(a_0, b_0 + k)$  也都随  $k$  值而变, 如图 5 所示. 从图 5 可见, 当  $k$  值较大时, 信噪比随  $k$  的变化并不敏感, 在  $k$  变动的较宽范围内信噪比变化较小.

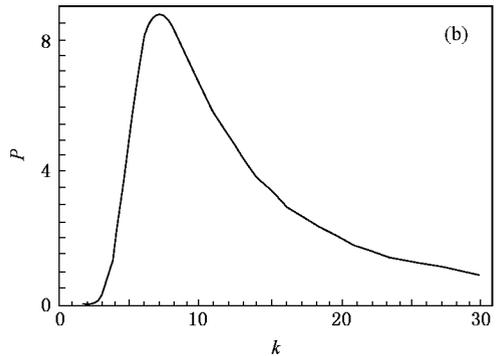
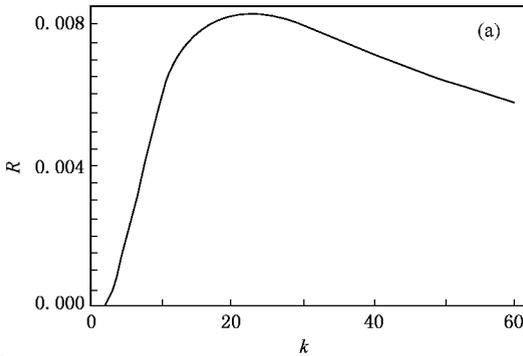


图 5 非线性反馈时  $R$  和  $P$  随  $k$  变化的理论曲线  $A = 0.04, D = 0.1, \omega = 0.02\pi, a_0 = 3, b_0 = 1$ . (a)  $R$  随  $k$  的变化 (b)  $P$  随  $k$  的变化

### 3.3. 正弦反馈 $f(x) = k \sin x$

取反馈函数

$$f(x) = k \sin x,$$

则势函数为

$$V(x) = -\frac{1}{2} a_0 x^2 + \frac{1}{4} b_0 x^4 + k(1 - \cos x),$$

相应的动力学方程为

$$\dot{x} = a_0 x - b_0 x^3 - k \sin x + A \cos(\omega t) + \xi(t). \quad (9)$$

当输入信号幅值  $A \ll 1$  和噪声强度  $D \ll 1$  时, 通常由于双稳系统的势垒太高而不能产生随机共振, 图 6 (a) 所示是  $k = 0$  时的双稳势函数,  $x(t)$  只能在两个稳定点  $\pm \sqrt{a_0/b_0}$  之一附近作小幅波动, 如图 7 (a) 所

示. 引入  $f(x) = k \sin x$  反馈后, 通过调节  $k$  可降低势垒高度并能产生随机共振, 图 6 (b) 所示是  $k = 2.8$  时的双稳势函数, 共振时  $x(t)$  围绕着  $x = 0$  点在两个势阱之间运动, 如图 7 (b) 所示. 当  $x$  满足  $|x| < 1$  时, 可假设

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!},$$

相应的动力学方程可近似表示为

$$\dot{x} = (a_0 - k)x - \left(b_0 - \frac{k}{6}\right)x^3 + A \cos(\omega t) + \xi(t). \quad (10)$$

输出的信噪比  $R\left(a_0 - k, b_0 - \frac{k}{6}\right)$  和功率谱放大率  $P\left(a_0 - k, b_0 - \frac{k}{6}\right)$  都随  $k$  值而变.

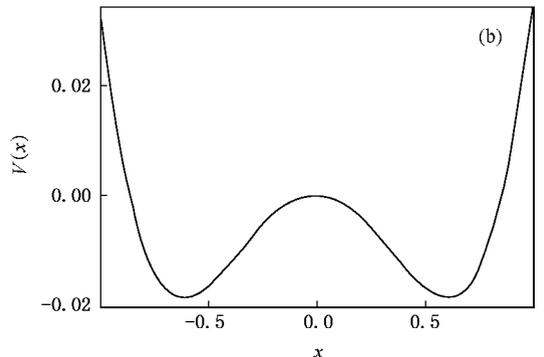
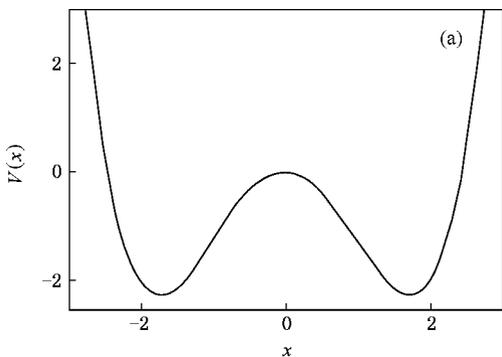


图 6 当参数  $a_0 = 3, b_0 = 1$  时, 双稳系统的势函数 (a)  $k = 0$  (b)  $k = 2.8$

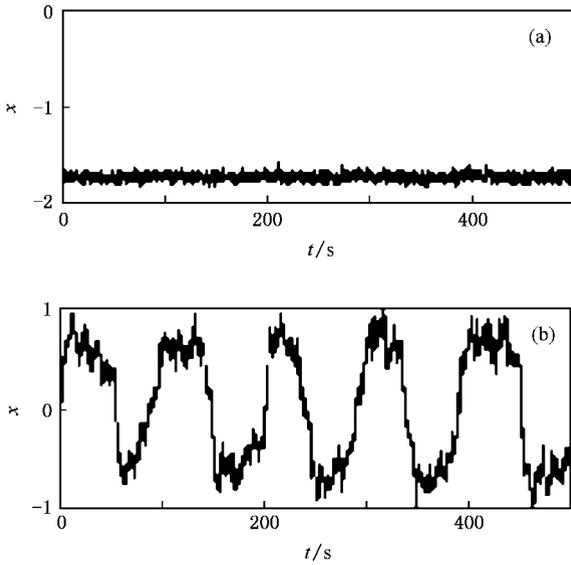


图7 当参数  $a_0 = 3, b_0 = 1, A = 0.04, D = 0.3, \omega = 0.02\pi$  时, 输出  $x(t)$  的时域波形 (a)  $k = 0$  (b)  $k = 2.8$

### 3.4. 正切反馈 $f(x) = k \tan x$

取反馈函数

$$f(x) = k \tan x,$$

则势函数为

$$V(x) = -\frac{1}{2} a_0 x^2 + \frac{1}{4} b_0 x^4 + k \ln |\cos x|.$$

在输入信号幅值  $A \ll 1$  和噪声强度  $D \ll 1$  条件下, 通过调节  $k$  值大小, 能产生随机共振, 当  $x$  满足  $|x| < 1$  时, 近似有

$$\tan x \approx x + \frac{x^3}{3},$$

相应的动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} = & (a_0 - k)x - \left(b_0 + \frac{k}{3}\right)x^3 \\ & + A \cos(\omega t) + \xi(t). \end{aligned} \quad (11)$$

系统输出的信噪比  $R(a_0 - k, b_0 + \frac{k}{3})$  和功率谱放大率  $P(a_0 - k, b_0 + \frac{k}{3})$  也随  $k$  值而变.

由以上所述可知, 无论是采用  $f(x) = kx$  或  $f(x) = kx^3$  作为反馈函数, 还是以  $f(x) = k \sin x$  或  $f(x) = k \tan x$  作为反馈函数, 通过调节可控制参数  $k$  都能使双稳系统的线性项参数  $a$  或(和)非线性项参数  $b$  发生变化, 并能观察到双稳系统输出的可观察变量  $R$  和  $P$  的非单调变化, 从而可实现对双稳系统随机共振的有效控制.

## 4. 数值仿真结果及分析

当作用到双稳系统的周期信号和噪声的统计特性一定时, 通常情况下信号和噪声与双稳系统间并不满足随机共振的匹配条件, 因而双稳系统输出信号的信噪比和功率谱放大率都较小. 采用反馈技术能有效地改变双稳系统的输出响应, 通过调节可控制参数可使信号、噪声与双稳系统之间能协同作用而产生随机共振, 表现为输出信号的信噪比和功率谱放大率有较大的变化.

采用反馈函数  $f(x) = kx$ , 则动力学方程为(5)式中的各参数分别取  $A = 0.04, D = 0.5, \omega = 0.02\pi, a_0 = 3, b_0 = 1$ , 通过调节参数  $k$  能有效地改变  $a_0 - k$  的值, 从而影响双稳系统输出的信噪比和功率谱放大率. 如图8所示, 当双稳系统的参数、信号和噪声的参数都保持不变时, 通过调节反馈参数  $k, R$  和  $P$  呈现出明显的非单调变化, 数值仿真结果出现了与图4类似的单峰现象. 图4所示的理论曲线是根据(2)和(3)式绘制的, 其重要意义在于揭示了  $R$  和  $P$  随某些参数的变化并非单调而是存在着单峰现象. 但(2)和(3)式是在绝热近似下得出的, 其适用是有

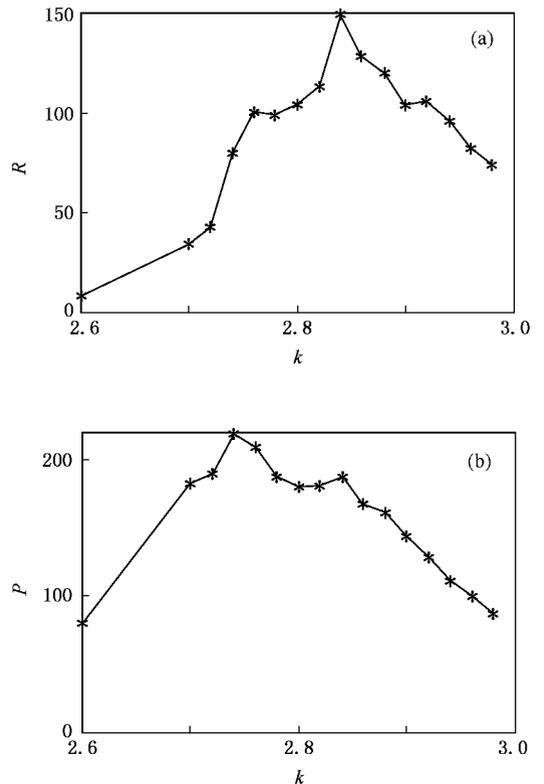


图8 线性反馈时  $R$  和  $P$  随  $k$  变化的数值仿真  $A = 0.04, D = 0.5, \omega = 0.02\pi, a_0 = 3, b_0 = 1$ . (a)  $R$  随  $k$  的变化 (b)  $P$  随  $k$  的变化

条件的.对于大的  $a$  值,系统往往有较高的势垒高度,使得  $x$  只能局限于单一势阱内波动;而过小的  $a$  值,系统又失去了双稳特性,特别是当  $a \rightarrow 0$  时(2)和(3)式甚至是错误的.

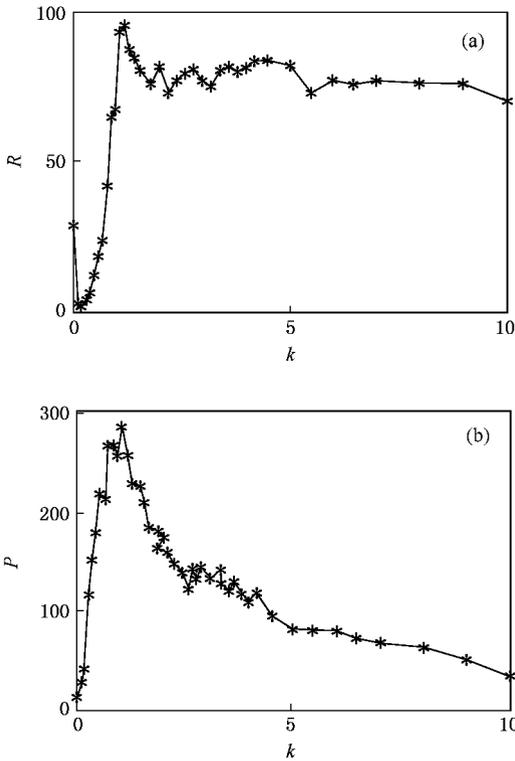


图9 非线性反馈时  $R$  和  $P$  随  $k$  变化的数值仿真  $A = 0.03$ ,  $D = 0.32$ ,  $\omega = 0.02\pi$ ,  $a_0 = 0.3$ ,  $b_0 = 0.5$ . (a)  $R$  随  $k$  的变化 (b)  $P$  随  $k$  的变化

采用反馈函数  $f(x) = kx^3$ ,若系统参数取  $a_0 =$

$0.3$ ,  $b_0 = 0.5$ ,信号参数  $A = 0.03$ ,  $\omega = 0.02\pi$ ,噪声强度为  $D = 0.32$ .通过调节参数  $k$  能有效地改变  $b_0 + k$  的值,从而影响双稳系统输出的信噪比和功率谱放大率.如图9所示,当系统参数、信号和噪声的参数都保持不变时,随着反馈参数  $k$  的改变, $R$  和  $P$  都呈现出非单调的变化,数值仿真结果也出现了与图5类似的存在单峰现象的变化曲线.由于理论公式是在绝热近似下得出的,对参数的要求十分苛刻, $k$  的取值只能在一定范围内才有较好的结果.

## 5. 结 论

分析了典型双稳系统在噪声和弱周期信号作用下,输出信号的信噪比和功率谱放大率与系统参数之间的关系,将双稳系统的输出反馈到输入端再作用于系统,提出了采用反馈来控制随机共振的方法.该方法能有效地控制随机共振的产生和所产生的共振效应,特别适用于系统参数固定或难以改变的系

统.控制问题总要涉及可控制变量和可观察变量,本文以反馈函数中的参数为可控制变量,以被控系统输出的信噪比和功率谱放大率作为度量随机共振效应的可观察变量.通过调节可控制变量能观察到可观察变量的变化,从而选择所需的输出信号,就实现了对随机共振的控制.本文提出的方法扩大了随机共振控制的

可控制能力,并能极大地拓宽随机共振的应用范围.

[1] Benzi R, Sutera A, Vulpiana A 1981 *Physica A* **14** 1453  
 [2] Gammaitoni L, Hanggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223  
 [3] Babinec P 1997 *Phys. Lett. A* **225** 179  
 [4] Nozaki D, Mar D J, Grigg P, Collins J J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 2402  
 [5] Qin G R, Gong D C, Hu G, Wen X D 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 360 (in Chinese) [秦光戎、龚德纯、胡岗、温孝东 1992 物理学报 **41** 360]  
 [6] Zhu H J, Li R, Wen X D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2404 (in Chinese) [祝恒江、李蓉、温孝东 2003 物理学报 **52** 2404]  
 [7] Lin M, Huang Y M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3277 (in Chinese) [林敏、黄咏梅 2006 物理学报 **55** 3277]

[8] Gammaitoni L, Löcher M, Bulsara A R, Hänggi P, Neff J, Wiesenfeld K, Ditto W L, Inghiosa M E 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 4574  
 [9] Löcher M, Inghiosa M E, Neff J, Bulsara A R, Wiesenfeld K, Gammaitoni L, Hänggi P, Ditto W L 2000 *Phys. Rev. E* **62** 317  
 [10] Mason J, Lindner J F, Neff J, Ditto W L, Bulsara A R, Spano M L 2000 *Phys. Lett. A* **277** 13  
 [11] Lindner J F, Mason J, Neff J, Breen B J, Ditto W L, Bulsara A R 2001 *Phys. Rev. E* **63** 041107  
 [12] Schmid G, Hanggi P 2005 *Physica A* **351** 95  
 [13] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [胡岗 1994 随机力与非线性系统(上海:上海科技教育出版社)]



# The feedback control of stochastic resonance in bistable system \*

Lin Min<sup>†</sup> Huang Yong-Mei Fang Li-Min

( *College of Metrology Technology and Engineering ,China Jiliang University ,Hangzhou 310018 ,China* )

( Received 10 August 2007 ; revised manuscript received 16 November 2007 )

## Abstract

A feedback method is proposed to control the stochastic resonance by feeding back the output of bistable system to the input to re-act on the system. In a typical bistable system , the signal-to-noise ratio and spectral power amplification are considered as observable variables to evaluate the stochastic resonance effect. The stochastic resonance phenomenon caused by the linear or nonlinear feedback functions are studied respectively. The theoretical analysis and numerical simulation show that the stochastic resonance is controllable , and this method is especially suitable to the system of which the parameters are fixed or difficult to vary .

**Keywords** : bistable system , stochastic resonance , feedback control , resonance effect

**PACC** : 0540 , 0545

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 60674023 , 50675214 ).

<sup>†</sup> E-mail : linm@cjlu.edu.cn