

非局域程度对向列相液晶中空间光孤子的影响^{*}

朱叶青 龙学文 胡 巍[†] 曹龙贵 杨平保 郭 旗

(华南师范大学光子信息技术实验室, 广州 510006)

(2007 年 6 月 28 日收到, 2007 年 7 月 22 日收到修改稿)

理论分析了非局域程度对向列相液晶中(1+2)维空间光孤子的影响, 得到了非线性系数以及特征长度和预倾角的关系, 并且给出了强非局域性的非线性薛定谔方程, 最终得到了单孤子和临界功率的解析解. 实验上, 通过改变偏压从而间接测量了向列相液晶中的临界功率, 并与数值模拟结果相结合与理论结果进行了比较, 发现基本相符.

关键词: 空间光孤子, 非线性系数, 非局域程度, 临界功率

PACC: 4265S, 4270D

1. 引 言

孤子在许多物理系统中已经被研究, 因为空间光孤子的诸多特性, 所以最近成为了一个研究的焦点^[1-13]. 非局域空间光孤子是空间光孤子中非常重要的一种. 根据光束束宽与介质非线性响应函数相关长度的相对尺度, 我们通常可以将非局域程度分成四大类^[1]: 局域类、弱非局域类、一般性非局域类、强非局域类. 强非局域类是指束宽远小于介质的非线性响应函数的相关长度. Peccianti 等^[10-13]在实验和理论上都证明了向列相液晶(NLC)中的空间光孤子就是强非局域空间光孤子, 并且通过实验证明了 NLC 中空间光孤子可以实现全光开关和逻辑门. 此后, 郭旗等^[6]利用强非局域空间光孤子特性提出了光子开关、光子逻辑门的新理论方案以及讨论了器件的优化设计等问题. 总而言之, NLC 中的空间光孤子具有潜在的应用价值.

在本文中, 我们基于液晶中孤子的重取向(reorientation)方程, 理论上先是得到 NLC 的非局域非线性特征长度以及非线性系数与预倾角的关系, 然后得到了单孤子的传输方程, 通过采用 Gauss 形式试探解的方法, 求出了单孤子和临界功率的解析解. 接着, 将解析结果和数值模拟结果相比较加以验证. 因为文献[3]得出了双光束的交叉点与临界功率的平方之间存在正比关系, 所以我们在实验上就利

用双光束的方法来测定临界功率. 通过将实验结果和理论结果对比后发现, 两者基本相符.

2. 液晶的理论描述

本文中以预倾角^[14]为任意角度的模型来描述 NLC 中(1+2)维空间光孤子的传输, 液晶盒的构造及坐标系与文献[14, 15]中的相同. 光场的包络 A 沿 z 方向传输, 沿 x 方向偏振, 低频电场 E_{RF} 加在 x 方向上, 主要用来控制预倾角. 使用慢变包络近似, 光束的传输方程可以通过下列非线性薛定谔方程表示^[12]:

$$2ik\partial_z A + \nabla_{\perp}^2 A + k_0^2 \epsilon_a^{op} \sin(\theta + \hat{\theta}) \sin(\theta - \hat{\theta}) A = 0. \quad (1)$$

同时, 重取向角 θ 满足^[15]

$$2K\nabla_{\perp}^2 \theta + \epsilon_0 \left(\epsilon_a^{RF} E_{RF}^2 + \epsilon_a^{op} \frac{|A|^2}{2} \right) \sin(2\theta) = 0. \quad (2)$$

这里 K 为液晶的平均弹性系数, ϵ_0 为真空介电常数, 液晶中的波矢 k 满足

$$k^2 = k_0^2 [n_{\parallel}^2 n_{\perp}^2 (\cos^2 \theta_0 + n_{\perp}^2 \sin^2 \theta_0)],$$

θ_0 是没有光场时 NLC 分子的最大预倾角, k_0 是真空中波矢,

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 &= \partial_x^2 + \partial_y^2, \\ \epsilon_a^{op} &= n_{\parallel}^2 - n_{\perp}^2, \\ \epsilon_a^{RF} &= \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp} \end{aligned}$$

^{*} 国家自然科学基金(批准号:10674050, 10474023, 60278013)和广东省高等学校科技创新团队计划(批准号:06CXTD005)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: huwei2000@vip.163.com

分别代表光频和低频电场的介电各向异性. 根据傍轴近似理论, 方程(2)中的 $\partial_x^2 \theta$ 项已经被忽略^[15, 16]. 当没有光场时, 预倾角 $\hat{\theta}$ 只与 x 有关^[15], 同时由于对称关系, 所以方程(2)又可以变换为

$$2K\partial_x^2 \hat{\theta} + \epsilon_0 \epsilon_a^{\text{RF}} E_{\text{RF}}^2 \sin(2\hat{\theta}) = 0. \quad (3)$$

对于近轴高斯光束, 激光场引起的角度变化非常小, 用微扰法将其展开,

$$\hat{\theta}(x, y) = \hat{\theta}(x) + [\hat{\theta}(x)\theta_0]\Psi(x, y) \quad (\Psi \ll 1).$$

当在中心点处时, 光束的初始束宽 w_0 远小于液晶盒的厚度 L , $\hat{\theta}(x) \approx \theta_0$, 所以 $\partial_x \hat{\theta}$ 就可以被忽略, 得到以下两个方程^[14, 15]:

$$2ik\partial_x A + \nabla_{\perp}^2 A + k_0^2 \epsilon_a^{\text{op}} \sin(2\theta_0) \Psi A = 0, \quad (4)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \Psi - \frac{1}{w_m^2} \Psi + \frac{\epsilon_0 \epsilon_a^{\text{op}}}{4K} \sin(2\theta_0) |A|^2 = 0, \quad (5)$$

式中 w_m 是液晶的特征长度^[2, 11, 14], 其表达式为

$$w_m = \frac{1}{E_{\text{RF}}} \left\{ \frac{2\theta_0 K}{\epsilon_0 \epsilon_a^{\text{RF}} \sin(2\theta_0) [1 - 2\theta_0 \cos(2\theta_0)]} \right\}^{1/2}. \quad (6)$$

方程(5)存在一特解, 求得此特解代入方程(4)中并与局域非线性薛定谔方程相对比, 可以得到非线性系数 n_2 的表达式. 方程(6)和此表达式均含有 θ_0 和 E_{RF} 这两个变量, 而 E_{RF} 与 θ_0 之间存在一定的关系, 所以实际上我们可以直接用 θ_0 来表示 w_m 以及 n_2 . 对于 $|\theta_0| \leq \pi/2$, 特征长度 $w_m > 0$, 当 E_{RF} 大于 Fréedericksz 阈值电场 E_{FR} 时,

$$\theta_0 \approx (\pi/2) [1 - (E_{\text{FR}}/E_{\text{RF}})^2],$$

而 Fréedericksz 阈值电场可表示为^[14]

$$E_{\text{FR}} = \pi \sqrt{K/\epsilon_0 \epsilon_a^{\text{RF}}/L},$$

所以我们得到

$$\theta_0 \approx \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{\pi \sqrt{K/\epsilon_0 \epsilon_a^{\text{RF}}}}{E_{\text{RF}} L} \right)^2 \right], \quad (7)$$

$$w_m = \frac{L}{\pi} \left(\frac{\pi - 2\theta_0}{\pi} \right)^{1/3} \times \sqrt{\frac{2\theta_0}{\sin(2\theta_0) [1 - 2\theta_0 \cos(2\theta_0)]}}, \quad (8)$$

$$n_2 = \frac{(\mathcal{L} \epsilon_a^{\text{op}})^2}{\chi \pi n_{\parallel} n_{\perp}^2 cK} \times \frac{\theta_0 (n_{\perp}^2 + \epsilon_a^{\text{op}} \cos^2 \theta_0) \sin(2\theta_0)}{[\pi(\pi - 2\theta_0)]^2 [1 - 2\theta_0 \cos(2\theta_0)]}. \quad (9)$$

从图 1(a) 中可以很清楚地看到, 特征长度与非线性系数均是随着预倾角的增大而减小的, 且随着预倾角的逐渐增大特征长度的变化越来越缓慢. 实验中我们所用的是 $80 \mu\text{m}$ 厚的液晶盒, 其中充满的

是 NLC 材料 TE30A, 这种材料的各参数分别是 $K \approx 10^{-11} \text{N}$, $n_{\parallel} = 1.6924$, $n_{\perp} = 1.5221$, $\epsilon_a^{\text{RF}} = 9.4$, $\epsilon_a^{\text{op}} = 0.5474$. 当 $\theta_0 = \pi/4$ 时, 特征长度 $w_m \approx 25.3 \mu\text{m}$, 大约是液晶盒厚度的 $1/3$, 非线性系数 $n_2 \approx 6.26 \times 10^{-5} \text{cm}^2/\text{W}$. 由此可见, NLC 的非线性系数 n_2 远比其他材料的非线性系数大^[17]. 这一点就足够证明 NLC 是一种强非线性材料.

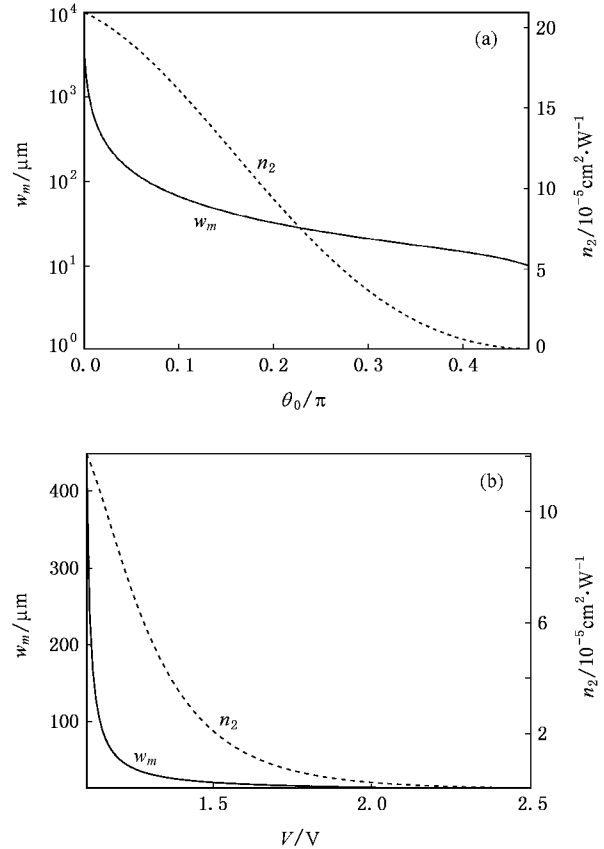


图 1 非线性系数 n_2 (虚线) 以及液晶的特征长度 w_m (实线) 与预倾角 θ_0 和偏压 V 的关系 (a) n_2 及 w_m 与 θ_0 的关系 (b) n_2 及 w_m 与 V 的关系

方程(7)求出了偏压对预倾角的影响, 再结合方程(8)和(9), 所以我们可以得到特征长度以及非线性系数与偏压的直接关系, 如图 1(b) 所示. 我们知道, 当改变施加在液晶盒上的偏压时, 液晶分子的预倾角就会发生改变, 从而改变了液晶的非线性系数和特征长度, 而特征长度的改变实际上就意味着非局域程度的变化. 所以, 电压的改变就直接影响了孤子的传输性质以及孤子之间的相互作用.

3. 理论计算

下面我们对方程(4)和(5)进行归一化. 令

$$\begin{aligned} X &= x/w_0, \\ Y &= y/w_0, \\ Z &= z/(kw_0^2), \\ a &= A/A_0, \end{aligned}$$

$$\psi(X, Y) = \Psi(X, Y)(A_0^2 \Psi_0),$$

其中

$$\begin{aligned} A_0^2 &= 1/(n_0 n_2 k_0^2 w_0^2), \\ \Psi_0 &= \epsilon_0 \epsilon_a^{\text{op}} w_m^2 \sin(2\theta_0) / (4K). \end{aligned}$$

因此,我们就可以得到以下两个无量纲的方程:

$$i\partial_Z a + \frac{1}{2} \nabla_{XY}^2 a + \psi a = 0, \quad (10)$$

$$\nabla_{XY}^2 \psi - \alpha^2 \psi + \alpha^2 |a|^2 = 0. \quad (11)$$

式中 $\nabla_{XY}^2 = \partial_X^2 + \partial_Y^2$, $\alpha = w_0/w_m$ 代表非局域程度.

$\psi(X, Y)$ 正比于非线性折射率 Δn , 对于单孤子的传输, 可利用泰勒展开法将 $\psi(X, Y)$ 展到二阶. 因为 $\psi(X, Y)$ 是偶函数, 所以 $\psi^{(1,0)}(0,0) = \psi^{(0,1)}(0,0) = \psi^{(1,1)}(0,0) = 0$, 则

$$\begin{aligned} \psi(X, Y) &= \int R(X-X', Y-Y') |a(X', Y')|^2 dX' dY' \\ &\approx \psi(0,0) + \frac{X^2 + Y^2}{4} \\ &\quad \times \int \nabla_{XY}^2 R(X', Y') |a(X', Y')|^2 dX' dY', \end{aligned} \quad (12)$$

式中 $R(X, Y)$ 为归一化的响应函数. 根据方程(11)可以得到

$$\nabla_{XY}^2 R(X, Y) = \alpha^2 R(X, Y) - \alpha^2 \psi(X, Y),$$

且对于单孤子,

$$\psi(0,0,Z) = \psi(0,0),$$

再结合方程(12), 可以将方程(10)变换为

$$\begin{aligned} i \frac{\partial a}{\partial Z} + \frac{1}{2} \nabla_{XY}^2 a + \psi(0,0)a \\ + \frac{\alpha^2}{4} [\psi(0,0) - |a(0,0,Z)|^2] (X^2 + Y^2)a = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

由于

$$\begin{aligned} \psi(0,0) &= \int R(X', Y') |a(X', Y')|^2 dX' dY' \\ &< \int R(X', Y') |a(0,0)|^2 dX' dY', \end{aligned}$$

所以

$$\psi(0,0) < |a(0,0,Z)|^2.$$

(13)式中的第四项即为波导项, 此波导项近似正比于轴上光强 $|a(0,0,Z)|^2$, 而 Snyder-Mitchell 模型中的波导项正比于功率. 这就说明我们的模型不同

于 Snyder-Mitchell 模型, 且这里的模型很难得到呼吸子.

令

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y, Z) &= a_0 \exp[i\psi(0,0)Z] \\ &\quad \times \exp[-(X^2 + Y^2)/2 + i\alpha(Z)], \end{aligned}$$

则(13)式中的相位项可以被消去, 将所得到的简化方程在柱坐标系下表示, 有

$$-\partial_Z \theta - 1 + \frac{r^2}{2} + \frac{\alpha^2}{4} [\psi(0) - a_0^2] r^2 = 0. \quad (14)$$

方程(14)中 r 的零次方和二次方系数分别为零, 可以得到

$$\alpha(Z) = -Z, \quad (15)$$

$$1 + \frac{\alpha^2}{2} [\psi(0) - a_0^2] = 0. \quad (16)$$

又因为

$$\begin{aligned} \psi(0) &= \frac{\alpha^2}{2\pi} \int_0^{+\infty} K_0(\alpha r) a_0^2 \exp(-r^2) 2\pi r dr \\ &= \frac{a_0^2 \alpha^2}{4} \exp\left(\frac{\alpha^2}{4}\right) \Gamma\left(0, \frac{\alpha^2}{4}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

所以我们得到

$$a_0^2 = \frac{2}{\alpha^2 - \frac{\alpha^4}{4} \exp\left(\frac{\alpha^2}{4}\right) \Gamma\left(0, \frac{\alpha^2}{4}\right)}. \quad (18)$$

此归一化坐标系下的临界功率为

$$P = \frac{2\pi}{\alpha^2 - \frac{\alpha^4}{4} \exp\left(\frac{\alpha^2}{4}\right) \Gamma\left(0, \frac{\alpha^2}{4}\right)}. \quad (19)$$

由方程(19)可知, 当非局域程度很强的时候, $\alpha \ll 1$, $P \approx 2\pi/\alpha^2$, 图2中的虚线就是根据此结果所作, 实线是方程(19)解析的结果, 圆圈是将方程(5)的特解代入方程(4)进行模拟的结果. 从图2可以看到, 当

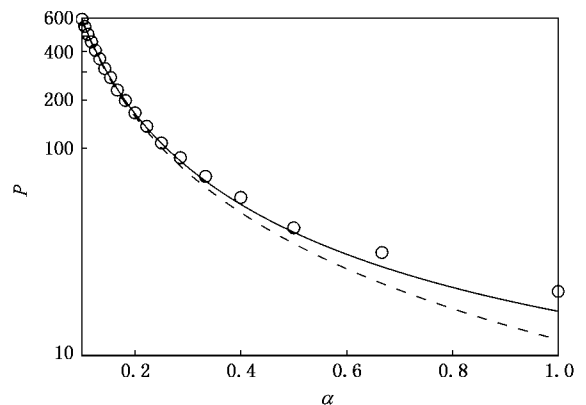


图2 非局域程度 α 与临界功率 P 的关系. 圆圈是数值模拟所得的结果, 实线是根据(19)式的解析解所作的曲线, 虚线是 $P = 2\pi/\alpha^2$ 的曲线.

$\alpha \leq 0.2$ 时,三个结果能够很好符合,当 $\alpha > 0.2$ 后就逐渐分开了,说明在非局域程度非常强的范围内三者符合甚好.而解析结果与模拟结果在很大范围内都能够很好地相符,说明此时我们所求得的结果适用于非局域程度稍弱的情况.

4. NLC 中的临界功率以及双孤子的实验观察

以上所求的是归一化坐标系下的临界功率.若回到液晶中,则此时的临界功率 P_c 应为

$$P_c = \frac{1}{n_0 n_2 k_0^2} \frac{2\pi}{\alpha^2 - \frac{\alpha^4}{4} \exp\left(\frac{\alpha^2}{4}\right) \Gamma\left(0, \frac{\alpha^2}{4}\right)}. \quad (20)$$

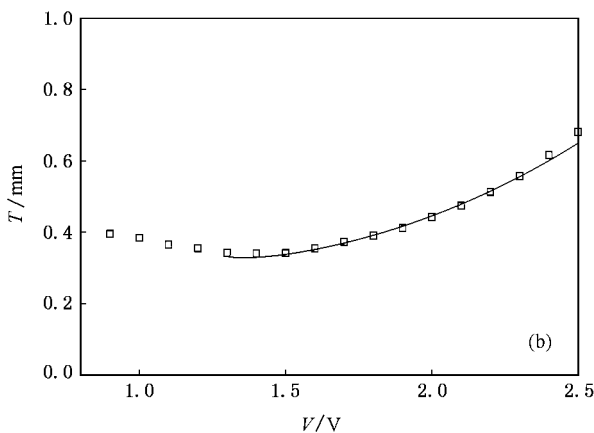
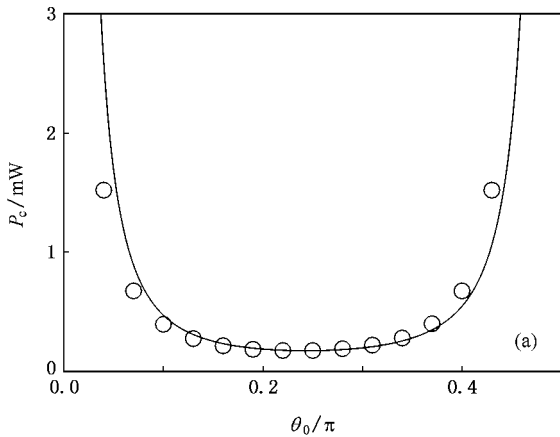


图 3 预倾角 θ_0 与临界功率 P_c 和交叉点位置 T 与偏压 V 的关系 (a) 预倾角 θ_0 与临界功率 P_c 的关系,实线是解析结果,圆圈是数值模拟结果;(b)施加在液晶盒上的偏压 V 与交叉点位置 T 的关系,实线是拟合结果,方块是实验结果

图 3(a) 中实线是解析结果,圆圈是根据方程(1)–(3)进行数值模拟的结果,此模拟结果就是文献[2]

中的模拟结果.通过对比发现,两个结果符合很好.以前通常认为,预倾角为 $\pi/4$ 时的非线性效应最大,其实这种说法不太严谨.从图 1(a) 可以发现,预倾角越小非线性效应就越大,而并非在 $\pi/4$ 时非线性效应最大.其实,应该是当预倾角为 $\pi/4$ 时,孤子的临界功率会达到最小值,如图 3(a) 所示.通过以上分析可知,当预倾角越小时,逐渐增大的非线性效应会使临界功率减小,而越来越大的非局域程度则会使临界功率变大.正是由于非局域程度和非线性效应这样相互作用的结果,最后导致在 $\pi/4$ 附近时,临界功率达到最小值.

单孤子的临界功率在实验中是很难直接确定的,因为衍射效应和非线性效应达到平衡是一个渐变的过程,我们很难确定哪一点就是临界功率,所以在实验上就利用双光束法来间接测量.文献[3]中得出了对于 Snyder-Mitchell 模型双光束的交叉点位置 T 和临界功率 P_c 存在的关系

$$T = (kw_0^2/2)\sqrt{P_c/P_0},$$

其中 P_0 为单束光的入射功率.实验中我们可以通过光束交叉点的位置来测定单孤子的临界功率.实验中两束平行光的入射功率均为 10 mW,液晶中光束的其他参数分别是 $w_0 = 3 \mu\text{m}$, $d = 23.5 \mu\text{m}$.我们改变偏压,从而改变了液晶的非局域程度,就可以得出如图 4 所示的随偏压的改变交叉点位置的变化,并得到了交叉点 T 与偏压 V 的关系曲线,如图 3(b) 所示.图 3(b) 中的数据点是根据实验所测的八组数据求平均后得到的值.结合方程(7)–(9)和

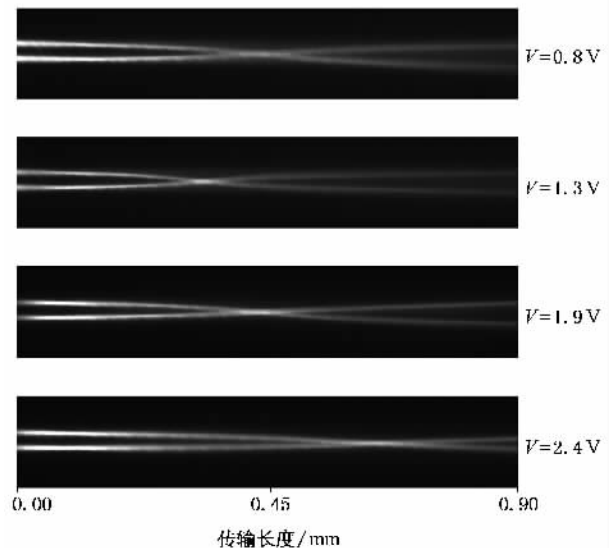


图 4 实验得到的随低频电压的不断变化导致交叉点位置的变化情况.入射功率为 10 mW, $d = 23.5 \mu\text{m}$

(20)可以得到 P_c 与 V 的关系式,由文献[3]可知, T 正比于 $\sqrt{P_c}$. 所以我们可以利用

$$T = k' \sqrt{P_c} + b$$

进行拟合,其中 b 是实验中入射点的修正参数. 拟合曲线即为图 3(b)中的实线. 实验中当低频电场小于阈值电场时,也会产生很小的重取向角^[14],但是理论成立的前提是 $E_{RF} > E_{FR}$,所以图 3(b)中的实线只有一部分. 通过对比发现,实验所得的结果和理论计算的结果基本符合. 并且通过图 4 我们可以明显地观察到交叉点位置是以先远后近然后再远这样的趋势演化的,这就进一步证明了理论的正确性.

5. 结 论

本文主要研究了非局域程度对 NLC 中空间光

孤子的影响. 用液晶的一些基本理论方程,定量地得到了电压对孤子传输性质以及相互作用的影响. 利用泰勒展开法(近似到二阶)得到了强非局域性的非线性薛定谔方程,并对此模型作了定性的解释,计算出非局域程度稍弱时的单孤子和临界功率的精确解析解. 在实验中,通过改变偏压得到了不同非局域程度下交叉点位置的变化图,根据交叉点与临界功率之间的特有关系以及电压与临界功率之间的关系间接地测到了单孤子的临界功率. 最后,将理论结果、模拟结果和实验结果进行相互验证.

感谢中国科学院长春光学精密机械和物理研究所的宣丽教授为本文工作制作液晶盒样品,同时也感谢石家庄实力克液晶材料有限公司提供液晶样品.

- [1] Krolkowski W, Bang O, Rasmussen J J, Wyller J 2001 *Phys. Rev. E* **64** 016612
- [2] Hu W, Zhang T, Guo Q 2006 *Appl. Phys. Lett.* **89** 071111
- [3] Xie Y Q, Guo Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3020 (in Chinese) [谢逸群、郭旗 2004 物理学报 **53** 3020]
- [4] Cao J N, Guo Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3688 (in Chinese) [曹觉能、郭旗 2005 物理学报 **54** 3688]
- [5] Xu C B, Guo Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5194 (in Chinese) [许超彬、郭旗 2005 物理学报 **54** 5194]
- [6] Guo Q, Zhang X P, Hu W, Shou Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1832 (in Chinese) [郭旗、张霞萍、胡巍、寿倩 2006 物理学报 **55** 1832]
- [7] Zhan K Y, Pei Y B, Hou C F 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4686 (in Chinese) [展凯云、裴延波、侯春风 2006 物理学报 **55** 4686]
- [8] Long X W, Hu W, Zhang T, Guo Q, Lan S, Gao X C 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1397 (in Chinese) [龙学文、胡巍、张涛、郭旗、兰胜、高喜存 2007 物理学报 **56** 1397]
- [9] Zhang T, Hu W, Long X W, Guo Q, Liu H Y, Wang X A 2007 *Acta Opt. Sin.* **27** 143 (in Chinese) [张涛、胡巍、龙学文、郭旗、刘海英、王新爱 2007 光学学报 **27** 143]
- [10] Peccianti M, Brzdakiewicz K A, Assanto G 2002 *Opt. Lett.* **27** 1460
- [11] Peccianti M, Conti C, Assanto G 2002 *Appl. Phys. Lett.* **81** 3335
- [12] Conti C, Peccianti M, Assanto G 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 073901
- [13] Conti C, Peccianti M, Assanto G 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 113902
- [14] Peccianti M, Conti C, Assanto G 2005 *Opt. Lett.* **30** 415
- [15] Peccianti M, Conti C, Assanto G, De Luca A, Umetsu C, Noni J 2003 *Opt. Phys. Mat.* **12** 525
- [16] Rasmussen P D, Bang O, Krolkowski W 2005 *Phys. Rev. E* **72** 066611
- [17] Boyd R W 1992 *Nonlinear Optics* (New York: Academic Press)

The influence of nonlocality on solitons in nematic liquid crystals^{*}

Zhu Ye-Qing Long Xue-Wen Hu Wei[†] Cao Long-Gui Yang Ping-Bao Guo Qi
(*Laboratory of Photonic Information Technology, South China Normal University, Guangzhou 510006, China*)
(Received 28 June 2007 ; revised manuscript received 22 July 2007)

Abstract

In this paper, we theoretically investigated the influence of nonlocality on $(1 + 2)$ -dimensional spatial solitons in undoped nematic liquid crystals (NLCs). We confirmed that the nonlinear index coefficient and the general characteristic length of the nonlinear nonlocality for the NLC are dependent on the pretilt angle of the NLC molecules. Then the Schrödinger-type nonlinear equation in strong nonlocality was given and from the equation the analytical expressions of the single soliton and the critical power were respectively obtained. In experiment, we varied the degree of nonlocality by changing the bias voltage and indirectly determined the relation between the critical power and pretilt angle. At last, by comparison of analytical solutions with the numerical simulation and the experimental result, we verified that our expressions are precise.

Keywords : spatial soliton, nonlinear index coefficient, degree of nonlocality, critical power

PACC : 4265S, 4270D

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10674050, 10474023, 60278013) and the Innovative Research Team Program of Institute of Higher Education of Guangdong Province, China (Grant No. 06CXTD005).

[†] Corresponding author. E-mail : huwei2000@vip.163.com