第 57 卷 第 5 期 2008 年 5 月
1000-3290/2008/57(05)/2633-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57, No.5, May, 2008

一类全球气候气-海耦合振子机理的近似解析解*

林万涛[1)] 莫嘉琪[2)3)4)†]

1)(LASG,中科院大气物理研究所,北京 100029)
2)(安徽师范大学,芜湖 241000)
3)(上海高校计算科学 E-研究院上海交通大学研究所,上海 200240)
4)(湖州师范学院,湖州 313000)

(2007 年 6 月 22 日收到;2007 年 7 月 10 日收到修改稿)

考虑了一个全球气候两半球间气-海热盐循环(THC)的箱域模型. 利用同伦映射方法,研究了一类简化型非线性模型. 得到了模型的近似解. 同伦映射求解方法是一个解析方法,得到的解还能继续进行解析运算. 从而可再研究有关物理量的各种定性、定量的性态.

关键词:气-海,厄尔尼诺-南方涛动,同伦映射,近似解
PACC:0230,0200

1. 引 言

全球气候是当前学术界极为关注的对象. Rooth[1]引入了全球气候两半球间气-海热盐循环(THC)的一个箱域模型. 这个 THC 的力度事实上取决于高纬度箱域间的密度. 近来,Scott 等[2]又引入了近似解析方法阐述了两半球间 THC 耦合气-海箱域模型在海洋中盐度的时间变化比温度的时间变化更慢的理论[3]. 本文是进一步用近似解析解来讨论一类全球气候两半球间气-海振子机理的定量性态.

大气物理是一个十分复杂的自然现象,因此人们常将这种现象在一定的条件下把它简化为某类非线性数学模型,然后用近似理论去研究它. 近来,许多近似方法被研究和优化,例如伸缩变量法、平均化方法,边界层方法,匹配法、多尺度法等等. 许多学者用不同方法作了大量的工作,例如 Ni 与 Wei[4], Bartier[5], Khasminskii 与 Yin[6], Marques[7] 以及 Bobkova[8]. 莫嘉琪等人用微分不等式等方法研究了非线性摄动问题的激波解[9]和厄尔尼诺现象等大气物理全球气候问题[10—22]. 本文是利用一个简单而有效的同伦映射方法[23]来讨论一类全球气候气-海耦合振子的 THC 模型.

2. 一类非线性气-海耦合振子模型

考虑一类对应于大西洋、太平洋赤道海域上影响全球气候气-海耦合 THC 机理. 设定其海域由三个连接的箱域:一个为赤道箱域和两个高纬度箱域组成. 两个高纬度箱域为相同的尺度,赤道箱域的体积与高纬度箱域的体积之比为 V. 各海洋箱域的温度和盐度分别为 T_i, S_i, $i=1,2,3$. 我们能得到一个盐度的简化模型. 它具有如下的非线性方程[2,3]:

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}\tau^2}+Z=\mu^2 K_1 Z'+\mu Z^2(-1+M+\mu MZ)$$
$$+\mu Z'\left(2LZ+M\frac{Z'-KZ-\mu LZ^2}{-1+\mu MZ}\right), \quad (1)$$

其中 $Z=(Z_{\mathrm{S}}-S_{\mathrm{N}}-1)/(1+\eta(1+\delta mb)\mu$,它是与海洋箱域相联系的一个函数. 通过对它的求解,能引发出我们感兴趣的其他物理量. 为了得到形如方程

* 国家自然科学基金(批准号:40676016,10471039)、国家重点基础研究发展规划项目(批准号:2003CB415101-03,2004CB418304),中国科学院知识创新工程方向性项目(批准号:KZCX3-SW-221)、上海市教育委员会 E-研究院建设计划项目(批准号:E03004)和浙江省自然科学基金(批准号:Y606268)资助的课题.

† E-mail:mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

(1)的简化形式,我们把 $\tau=\frac{c\sqrt{(1+2/V)\eta}}{\sqrt{A}}t$ 看作为独立变量,它与时间变量 t 直接关联, μ 为相应的系数,而

$$
\begin{aligned}
S_S &= \frac{S_2-S_1}{\Delta S},\\
S_N &= \frac{S_2-S_3}{\Delta S},\\
L &= -\frac{1+2V}{\sqrt{V(2+V)A\eta}},\\
M &= -\frac{1}{A\eta},\\
\mu^2K_1 &= K = -\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{(1+2/V)\eta}}P,\\
A &= \frac{1}{1+\eta(1+\delta mb)},\\
\eta &= \frac{(\lambda+\chi/\varepsilon)(\lambda+n\chi/\varepsilon+k\alpha\Delta T)}{(\lambda+n\chi/\varepsilon)(\lambda+\chi/\varepsilon+k\alpha\Delta T)},\\
P &= 1+\left(2+\frac{1}{V}\right)\eta-(1-\delta_1)\frac{\gamma_N}{\gamma_S}\\
&\quad - m\delta\eta\left(\frac{\gamma_N}{\gamma_S}+\frac{c\gamma_N}{\gamma_S}-c\right),\\
\gamma_N &= \frac{1}{\varepsilon_{WN}}\frac{S_0\gamma_1\Delta T}{D},\\
\gamma_S &= \frac{1}{\varepsilon_{WS}}\frac{S_0\gamma_1\Delta T}{D},\\
\delta &= k\beta\Delta S/(\lambda+\chi_1^n/\varepsilon+k\alpha\Delta T,\\
\delta_1 &= \kappa\beta\Delta S/(\lambda+\chi_1/\varepsilon+k\alpha\Delta T),\\
b &= A/V(\lambda+n\chi_1(1+2/V)/\varepsilon),\\
c &= (\lambda+n\chi_1/\varepsilon)\delta/(\lambda+\chi_n/\varepsilon+k\alpha\Delta T),\\
\Delta S &= (S_1-S_3),\\
\Delta T &= T_2-T_1,
\end{aligned}
$$

且 α,β 为热、盐水膨胀系数,k 为一个相应参数,λ 为关系到全球的平均温度, n 和 m 为热量和湿度传播指数,χ_n 和 γ_m 为北半球相应的功效, D 为海洋深度,S_0 为参照盐度,ε_{WN}和 ε_{WS}分别为北、南半球由海域到盆地的变率,ε 为在相同的箱域下海域与总区域的变率. 方程(1)详细推导可参见文献[2,3].

3. 模型解的同伦映射法

引入一个同伦映射[23] $H(Z,p):X\times I\to R$:

$$
\begin{aligned}
H(Z,p) &= L(Z)-L(z_0)+p(L(z_0)\\
&\quad -F(Z,Z')),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

其中 $X=[0,\infty)$,$I=[0,1]$,$R=(-\infty,+\infty)$,线性算子 $L(Z)=\frac{d^2Z}{d\tau^2}-\mu^2K_1\frac{dZ}{d\tau}+Z$,$z_0$ 为原方程(1)的零次近似,而

$$
\begin{aligned}
F(Z,Z') &= \mu Z^2(-1+M+\mu MZ)\\
&\quad +\mu Z'\left(2LZ+M\frac{Z'-KZ-\mu LZ^2}{-1+\mu MZ}\right).
\end{aligned}
$$

显然,由(2)式知,$H(Z,1)=0$ 就是方程(1). 故方程(1)的解 $Z(\tau)$就是 $H(Z,p)=0$ 的解当 $p\to1$ 的极限情形[23].

考虑

$$
H(Z,p)=0. \tag{3}
$$

设

$$
Z=\sum_{i=0}^{\infty}Z_i(t)p^i. \tag{4}
$$

将(4)式代入(3)式,展开非线性项为 p 的幂级数,比较等式两边 p 的同次幂的系数. 由 p 的零次幂的系数,可得 $L(Z_0)=L(z_0)$. 显然,这时可取 $Z_0=z_0$ 为 $L(Z)=\frac{d^2Z}{d\tau^2}-\mu^2K_1\frac{dZ}{d\tau}+Z=0$ 的解. 即

$$
\begin{aligned}
Z_0(\tau) &= \exp(\mu^2K_1\tau/2)\Big(C_1\cos\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\,\tau\\
&\quad + C_2\sin\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\,\tau\Big),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

其中 C_i,$i=1$,2,为任意常数.

由 p 的一次幂的系数,可得

$$
LZ_1=F_1(\tau). \tag{6}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
F_1(\tau) &= \mu Z_0^2(-1+M+\mu MZ_0)\\
&\quad +\mu\frac{dZ_0}{d\tau}\left(2LZ_0+M\frac{\frac{dZ_0}{d\tau}-\mu^2K_1Z_0-\mu LZ_0^2}{-1+\mu MZ_0}\right),
\end{aligned}
\tag{7}
$$

(7)式中的 $Z_0(\tau)$由(5)式决定. 不难得到方程(6)的解为

$$
\begin{aligned}
Z_1(\tau) &= \exp(\mu^2K_1/2)\tau\\
&\quad\times\left[\int_0^\tau-\frac{F_1(\xi)\sin\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\,\xi}{\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\exp(\mu^2K_1\xi/2)}d\xi\right]\\
&\quad\times\cos\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\,\tau\\
&\quad+\exp(\mu^2K_1/2)\tau\\
&\quad\times\left[\int_0^\tau\frac{F_1(\xi)\cos\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\,\xi}{\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\exp(\mu^2K_1\xi/2)}d\xi\right]\\
&\quad\times\sin\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\,\tau.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

由 p 的二次幂的系数,可得

$$LZ_2 = F_2(\tau). \tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned}F_2(\tau) &= 3\mu^2 MZ_0^2 Z_1 + 2\mu(-1+M)Z_0 Z_1 \\ &+ 2\mu L\left(\frac{dZ_0}{d\tau}Z_1 + Z_0\frac{dZ_1}{d\tau}\right) \\ &+ \frac{\mu M}{(-1+\mu MZ_0)^2}[(-1+\mu MZ_0) \\ &\times\left[\left(\frac{dZ_0}{d\tau} - \mu^2 K_1 Z_0 - \mu LZ_0^2\right)\frac{dZ_1}{d\tau}\right. \\ &+\left(\frac{dZ_1}{d\tau} - \mu^2 K_1 Z_1 - 2\mu LZ_0 Z_1\right)\frac{dZ_0}{d\tau}\Big] \\ &-\mu MZ_1\left(\frac{dZ_0}{d\tau} - \mu^2 K_1 Z_0 - \mu LZ_0^2\right)\frac{dZ_0}{d\tau}\Big],\end{aligned} \tag{10}$$

(10)式中的 $Z_0(\tau)$和 $Z_1(\tau)$分别由(5)式和(8)式决定. 不难得到方程(9)的解为

$$\begin{aligned}Z_2(\tau) &= \exp(\mu^2 K_1/2)\tau \\ &\times\left[\int_0^\tau -\frac{F_2(\xi)\sin\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\,\xi}{\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\exp(\mu^2K_1\xi/2)}d\xi\right] \\ &\times\cos\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\,\tau + \exp(\mu^2K_1/2)\tau \\ &\times\left[\int_0^\tau \frac{F_2(\xi)\cos\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\,\xi}{\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\exp(\mu^2K_1\xi/2)}d\xi\right] \\ &\times\sin\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\,\tau.\end{aligned} \tag{11}$$

于是由(4)式,令 $p=1$,并由(5),(8)和(11)式,便得到了方程(1)的二次近似解

$$\begin{aligned}Z_{\mathrm{app}}^{(2)}(\tau) &= \exp(\mu^2K_1\tau/2)(C_1\cos\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\,\tau \\ &+ C_2\sin\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\,\tau) + \exp(\mu^2K_1/2)\tau \\ &\times\left[\int_0^\tau -\frac{\left(\sum_{i=1}^2 F_i(\xi)\right)\sin\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\,\xi}{\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\exp(\mu^2K_1\xi/2)}d\xi\right] \\ &\times\cos\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\,\tau + \exp(\mu^2K_1/2)\tau \\ &\times\left[\int_0^\tau \frac{\left(\sum_{i=1}^2 F_i(\xi)\right)\cos\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\,\xi}{\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\exp(\mu^2K_1\xi/2)}d\xi\right] \\ &\times\sin\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\,\tau,\end{aligned} \tag{12}$$

其中 F_i, $i=1,2$,分别由(7),(10)式表示.

用同样的方法,可以得到模型(1)的更高次的近似解.

4. 解的精度比较

我们来研究用同伦映射方法得到的近似解的精度. 为了避免繁杂的计算. 下面仅考虑模型(1)在微扰情形下的解.

首先,我们能用摄动方法[24]来得到微扰情形非线性气-海振子 THC 模型(1)的摄动解. 可以通过计算得到方程(1)的一次摄动渐近解 Z_{asy} 的表示式为

$$\begin{aligned}Z_{\mathrm{asy}}(\tau) &= a\sin(\tau+\phi) \\ &+\left[\frac{1-4M}{2} + \frac{(1-2M)a^2}{6}\cos2(\tau+\phi)\right. \\ &+\left.\frac{La^2}{3}\sin2(\tau+\phi)\right]\mu + O(\mu^2), \\ &\qquad 0<\mu\ll1,\end{aligned} \tag{13}$$

其中 a,ϕ 为任意常数.

其次,我们再来考虑用前面同伦映射方法得到的一次近似解 $Z_{\mathrm{app}}^{(1)}$. 根据前面的计算结果,$Z_{\mathrm{app}}^{(1)}$的表示式为

$$\begin{aligned}Z_{\mathrm{app}}^{(1)}(\tau) &= \exp(\mu^2K_1\tau/2)(C_1\cos\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\,\tau \\ &+ C_2\sin\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\,\tau) + \exp(\mu^2K_1/2)\tau \\ &\times\left[\int_0^\tau -\frac{F_1(\xi)\sin\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\,\xi}{\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\exp(\mu^2K_1\xi/2)}d\xi\right] \\ &\times\cos\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\,\tau + \exp(\mu^2K_1/2)\tau \\ &\times\left[\int_0^\tau \frac{F_1(\xi)\cos\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\,\xi}{\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\exp(\mu^2K_1\xi/2)}d\xi\right] \\ &\times\sin\sqrt{1-(\mu^2K_1/2)^2}\,\tau,\end{aligned}$$

其中 $F_1(\tau)$由(7)式表示. 然后,将上式按 μ 渐近展开,得到解的一次渐近表示式

$$\begin{aligned}Z_{\mathrm{app}}^{(1)}(\tau) &= a\sin(\tau+\phi) \\ &+\left[\frac{1-4M}{2} + \frac{(1-2M)a^2}{6}\cos2(\tau+\phi)\right. \\ &+\left.\frac{La^2}{3}\sin2(\tau+\phi)\right]\mu + O(\mu^2), \\ &\qquad 0<\mu\ll1,\end{aligned} \tag{14}$$

其中 $a=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$,$\phi=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{C_1}{C_2}$为任意常数.

比较两种方法得到的一次近似解(13)式和(14)式,它们完全相同. 由此说明,用同伦映射方法得到的近似解具有较高的精度.

5. 结　论

大气物理全球气候自然现象所涉及的面非常广,人们只能通过一些主要的影响因素去研究它. 通常把它归化为某类非线性数学问题,然后用特定

的方法近似求出其主要物理量的近似值. 同伦映射方法就是一个较好的近似求解方法. 它不但能有效地得到问题的近似解,而且它不同于一般的数值解法,它是一个解析方法. 因此用它可以得到近似的解析解. 通过得到的解析解,还可进行微分、积分等解析运算. 从而可继续得到其他相关物理量的定量、定性等方面的结果. 关于本文讨论的大气物理全球气候气-海耦合振子 THC 模型性态的进一步理论,本文不再予以讨论.

[1] Rooth C 1982 *Prog*. *Oceanogr*. **11** 131

[2] Scott J R，Marotzke J，Stone R H 1999 *J*. *Phys*. *Oceanogr*. **29** 351

[3] Peter H S，Yuriy P K 1999 *Dynamics of Atmospheres and Oceans* **29** 415

[4] Ni W M，Wei J C 2006 *J*. *Diff*. *Eqns*. **221** 158

[5] Bartier J P 2006 *Asymptotic Anal*. **46** 325

[6] Khasminskii R Z，Yin G 2005 *J*. *Diff*. *Eqns*. **212** 85

[7] Marques I 2005 *Nonlinear Anal*. **61** 21

[8] Bobkova A S 2005 *Diff*. *Eqns*. **41** 23

[9] Mo J Q，Zhu J，Wang H 2003 *Prog*. *Nat*. *Sci*. **13** 768

[10] Mo J Q，Wang H，Lin W T 2005 *Acta Math*. *Sci*. **25** B 710

[11] Mo J Q，Lin W T，Zhu J 2006 *Adv*. *in Math*. **35** 232

[12] Mo J Q，Lin W T，Zhu J 2004 *Prog*. *Nat*. *Sci*. **14** 1126

[13] Mo J Q，Wang H，Lin W T，Lin Y H 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 6 (in Chinese)[莫嘉琪、王 辉、林万涛、林一骅 2006 物理学报 **55** 6]

[14] Mo J Q，Wang H，Lin W T 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 485 (in Chinese)[莫嘉琪、王 辉、林万涛 2006 物理学报 **55** 485]

[15] Mo J Q，Wang H，Lin W T 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 3229 (in Chinese)[莫嘉琪、王 辉、林万涛 2006 物理学报 **55** 3229]

[16] Mo J Q，Lin W T，Lin Y H 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 3127 (in Chinese)[莫嘉琪、林万涛,林一骅 2007 物理学报 **56** 3127]

[17] Mo J Q，Lin W T，Wang H 2007 *Prog*. *Nat*. *Sci*. **17** 230

[18] Mo J Q，Wang H，Lin W T，Y H 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 671

[19] Mo J Q，Wang H，Lin W T 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 1927

[20] Mo J Q，Lin W T，Wang H 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 578

[21] Mo J Q，Lin W T，Wang Hui 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 951

[22] Mo J Q，Lin W T，Lin Y H 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 1908

[23] He J H 2002 *Approximate Nonlinear Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Publisher) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程与科学计算中的近似非线性分析方法 (郑州 河南科学技术出版社)]

[24] de Jager E M，Jiang F R. 1996 *The Theory of Singular Perturbation* (Amsterdam: North-Holland Publishing Co.)

Approximate analytic solution of a class of atmosphere-ocean coupled oscillator mechanism for globe climate*

Lin Wan-Tao[1)] Mo Jia-Qi[2)3)4)†]

1)(*LASG, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100029, *China*)

2)(*Anhui Normal University, Wuhu* 241000, *China*)

3)(*Division of Computational Science, E-Institutes of Shanghai Universities at SJTU, Shanghai* 200240, *China*)

4)(*Huzhou Teachers College, Huzhou* 313000, *China*)

(Received 22 June 2007; revised manuscript received 10 July 2007)

Abstract

A box model of the interhemispheric thermohaline circulation (THC) in atmosphere-ocean for globe climate is considered. By using the homotopic mapping method, a class of simplified nonlinear model is studied, and the approximate solution is obtained. The homotopic mapping is an analytic method, which gives solutions that can be analytically operated subsequently to show diversified qualitative and quantitative behaviors of corresponding physical quantities.

Keywords: atmosphere-ocean, El Niño-southern oscillation, homotopic mapping, approximate solution

PACC: 0230, 0200

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40676016 and 10471039), the National Key Project for Basics Research (Grant Nos. 2003CB415101-03 and 2004CB418304), the Key Project of the Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX3-SW-221), in Part by E-Insitutes of Shanghai Municipal Education Commission (Grant No. E03004) and the National Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y606268).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn