第 57 卷 第 5 期 2008 年 5 月
1000-3290/2008/57(05)/2649-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57,No.5,May,2008


# 事件空间中 Birkhoff 系统的参数方程及其第一积分*

张 毅†

(苏州科技学院土木工程学院,苏州 215011)

(2007 年 8 月 17 日收到;2007 年 10 月 2 日收到修改稿)

研究事件空间中 Birkhoff 系统动力学.在$(2n+1)$维事件空间中,建立了 Birkhoff 系统的 Pfaff-Birkhoff-d 'Alembert 原理和 Birkhoff 参数方程,研究了方程的第一积分,给出了第一积分及其存在条件.

关键词:Birkhoff 系统,事件空间,参数方程,第一积分

PACC:0320,4610

## 1. 引 言

Birkhoff 系统是 Hamilton 系统的自然推广,可在原子分子物理,强子物理中找到应用[1,2].Birkhoff 系统动力学是一门新力学,它是经典力学的新发展[3—5],对 Birkhoff 方程的研究是近代分析力学的一个重要发展方向[6].1992 年以来,我国学者对 Birkhoff 系统动力学进行了较全面深入地研究,并取得了一系列重要成果[7—32].但是迄今为止的研究都限于位形空间中.

1960 年,Synge 研究了事件空间中完整保守系统动力学[33].这种研究不仅具有几何意义,而且有重要的力学意义.首先,由此不仅可以得到通常位形空间中的动力学方程,而且可以直接得到能量积分.其次,由于在事件空间中坐标和时间处于同等地位,这可灵活地选取参数,以便建立较为简单的方程[34].本文研究事件空间中的 Birkhoff 系统动力学,将 Pfaff-Birkhoff 原理,Birkhoff 方程推广到事件空间中,并研究了方程的第一积分.

## 2. 事件空间中 Pfaff-Birkhoff-d 'Alembert 原理

考虑由 Birkhoff 变量 $a^\mu$ $(\mu=1,\cdots,2n)$确定的 Birkhoff 系统.建立$(2n+1)$维事件空间,此空间中点的坐标为 $a^\mu$ $(\mu=1,\cdots,2n)$和时间 $t$.引入记号

$$x_1=t,x_{\mu+1}=a^\mu,(\mu=1,\cdots,2n),\qquad(1)$$

那么,所有变量 $x_\alpha$ $(\alpha=1,\cdots,2n+1)$可作为某参数 $\tau$ 的已知函数.令 $x_\alpha=x_\alpha(\tau)$是 $C^2$ 类曲线,使得

$$\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}=x'_\alpha\qquad(2)$$

不同时为零,有

$$\dot{x}_\alpha=\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}=\frac{x'_\alpha}{x'_1}.\qquad(3)$$

系统的 Pfaff 作用量为[2,3]

$$A=\int_{t_1}^{t_2}[R_\nu(t,a^\mu)\dot{a}^\nu-B(t,a^\mu)]\mathrm{d}t,\qquad(4)$$

其中 $B(t,a^\mu)$称为 Birkhoff 函数,$R_\nu(t,a^\mu)$ $(\nu=1,\cdots,2n)$称为 Birkhoff 函数组.积分(4)的被积函数记为

$$P(t,a^\mu,\dot{a}^\mu)=R_\nu(t,a^\mu)\dot{a}^\nu-B(t,a^\mu).\qquad(5)$$

在事件空间中,定义

$$\Lambda(x_\alpha,x'_\alpha)=x'_1P\left(x_1,x_2,\cdots,x_{2n+1},\frac{x'_2}{x'_1},\cdots,\frac{x'_{2n+1}}{x'_1}\right),\qquad(6)$$

显然有

$$P(t,a^\mu,\dot{a}^\mu)\mathrm{d}t=\Lambda(x_\alpha,x'_\alpha)\mathrm{d}\tau.\qquad(7)$$

由(6)式和(5)式,易得

$$\Lambda(x_\alpha,x'_\alpha)=B_\beta(x_\alpha)x'_\beta,\qquad(8)$$

其中

$$B_1(x_\alpha)=-B(x_1,x_2,\cdots,x_{2n+1}),\qquad(9)$$

$$B_{\mu+1}(x_\alpha)=R_\mu(x_1,x_2,\cdots,x_{2n+1}),(\mu=1,\cdots,2n).\qquad(10)$$

* 国家自然科学基金(批准号:10572021)资助的课题.

† E-mail:zhy@mail.usts.edu.cn

于是,在事件空间中,Pfaff 作用量(4)可表为

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} B_\beta(x_\alpha) x'_\beta \mathrm{d}\tau . \tag{11}$$

系统的 Pfaff-Birkhoff 原理为[2,3]

$$\delta A = 0, \tag{12}$$

且满足交换关系

$$\mathrm{d}\delta a^\nu = \delta \mathrm{d} a^\nu, (\nu = 1,\cdots,2n) \tag{13}$$

及端点条件

$$\delta a^\nu |_{t=t_1} = \delta a^\nu |_{t=t_2} = 0, \quad (\nu = 1,\cdots,2n). \tag{14}$$

在参数化下取形式

$$\delta A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Delta \Lambda(x_\alpha, x'_\alpha) \mathrm{d}\tau = 0, \tag{15}$$

$$\mathrm{d}\Delta x_\alpha = \Delta \mathrm{d} x_\alpha, (\alpha = 1,\cdots,2n+1), \tag{16}$$

$$\Delta x_\alpha |_{\tau=\tau_1} = \Delta x_\alpha |_{\tau=\tau_2} = 0, \quad (\alpha = 1,\cdots,2n+1). \tag{17}$$

现将原理(15)进行变换.将(8)式代入(15)式,运算可得

$$\delta A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta}\right) x'_\beta \Delta x_\alpha \mathrm{d}\tau + (B_\alpha \Delta x_\alpha) |_{\tau_1}^{\tau_2} = 0. \tag{18}$$

考虑到端点条件(17),则有

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta}\right) x'_\beta \Delta x_\alpha \mathrm{d}\tau = 0. \tag{19}$$

因积分区间$[\tau_1, \tau_2]$是任意的,由(19)式得到

$$\left(\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta}\right) x'_\beta \Delta x_\alpha = 0. \tag{20}$$

(20)式可称为事件空间中 Birkhoff 系统的 Pfaff-Birkhoff-d'Alembert 原理.

## 3. 事件空间中的 Birkhoff 方程

对于自由 Birkhoff 系统,因原理(20)中的$\Delta x_\alpha$彼此独立,故得

$$\left(\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta}\right) x'_\beta = 0, \quad (\alpha = 1,\cdots,2n+1). \tag{21}$$

这就是事件空间中自由 Birkhoff 系统的参数方程,或称为 Birkhoff 参数方程.

关于事件空间中自由 Birkhoff 系统的参数方程(21),有以下结果.

**命题 1** 对于事件空间中的自由 Birkhoff 系统,参数方程(21)不全独立.

**证明** 将方程(21)的每一个方程乘以$x'_\alpha$,并对$\alpha$求和,显然有

$$\left(\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta}\right) x'_\beta x'_\alpha = 0, \tag{22}$$

于是命题成立.

**命题 2** 对于事件空间中的自由 Birkhoff 系统,参数方程(21)的后面$2n$个方程,当取$t = \tau$时,成为通常的 Birkhoff 方程.

**证明** 方程(21)的后面$2n$个方程可写成

$$\left(\frac{\partial B_{\mu+1}}{\partial x_{\nu+1}} - \frac{\partial B_{\nu+1}}{\partial x_{\mu+1}}\right) x'_{\mu+1} + \left(\frac{\partial B_1}{\partial x_{\nu+1}} - \frac{\partial B_{\nu+1}}{\partial x_1}\right) x'_1 = 0, \quad (\nu = 1,\cdots,2n), \tag{23}$$

将(9)和(10)式代入上式,并取$t = \tau$,则方程(23)给出

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right) \dot{a}^\nu - \left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right) = 0, \quad (\mu = 1,\cdots,2n), \tag{24}$$

这是通常的 Birkhoff 方程.

**命题 3** 对于事件空间中的自由 Birkhoff 系统,参数方程(21)的第一个方程是系统的能量方程.

**证明** 方程(21)的第一个方程为

$$\left(\frac{\partial B_\beta}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_\beta}\right) x'_\beta = 0, \tag{25}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}B_1}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial B_\beta}{\partial x_1} x'_\beta . \tag{26}$$

在位形空间中,方程(26)可写成

$$-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial B}{\partial t} t' + \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \dot{a}^\mu t', \tag{27}$$

当

$$\frac{\partial B}{\partial t} = 0, \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = 0, (\mu = 1,\cdots,2n) \tag{28}$$

时,有积分

$$B = B(a^1, a^2, \cdots, a^{2n}) = \mathrm{const}. \tag{29}$$

积分(29)是系统的能量积分[20].因此,方程(26)或(27)是系统的能量方程.

如果系统的变量$a^\mu$不是彼此独立的,而受到一些限制,这些限制表为约束方程

$$f_\gamma(t, a^\mu) = 0, (\gamma = 1,\cdots,g; \mu = 1,\cdots,2n). \tag{30}$$

在事件空间中有

$$F_\gamma(x_\alpha) = 0, (\gamma = 1,\cdots,g; \alpha = 1,\cdots,2n+1), \tag{31}$$

其中

$$F_\gamma(x_\alpha)=f_\gamma(x_1,x_2,\cdots,x_{2n+1}).\tag{32}$$

约束(31)加在虚位移 $\Delta x_\alpha$ 上的条件为

$$\frac{\partial F_\gamma}{\partial x_\alpha}\Delta x_\alpha=0,(\gamma=1,\cdots,g).\tag{33}$$

由原理(20)和关系(33)，利用通常的 Lagrange 乘子法，容易得到

$$\left(\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta}\right)x'_\beta=\gamma_\gamma\frac{\partial F_\gamma}{\partial x_\alpha},$$
$$(\alpha=1,\cdots,2n+1).\tag{34}$$

这是事件空间中约束 Birkhoff 系统带乘子的方程，或约束 Birkhoff 系统的参数方程.

对于事件空间中的约束 Birkhoff 系统，命题 1—3 成为

**命题 4**　对于事件空间中的约束 Birkhoff 系统，参数方程(34)不全独立.

**命题 5**　对于事件空间中的约束 Birkhoff 系统，参数方程(34)的后面 $2n$ 个方程，当取 $t=\tau$ 时，成为通常的 Birkhoff 方程.

**命题 6**　对于事件空间中的约束 Birkhoff 系统，参数方程(34)的第一个方程是系统的能量方程.

## 4. 事件空间中 Birkhoff 系统的第一积分

位形空间中 Birkhoff 系统的第一积分方法可以直接推广到事件空间中的 Birkhoff 系统. 对于事件空间中的自由 Birkhoff 系统，由参数方程(21)可以直接得到系统的第一积分. 下述命题 7 给出了第一积分及其存在条件.

**命题 7**　对于事件空间中的自由 Birkhoff 系统，如果 Birkhoff 函数组 $B_\beta(\beta=1,\cdots,2n+1)$ 不显含 $x_k$，则

$$B_k=\text{const}.\tag{35}$$

是系统的一个第一积分.

**证明**　方程(21)中第 $k$ 个方程为

$$\left(\frac{\partial B_\beta}{\partial x_k}-\frac{\partial B_k}{\partial x_\beta}\right)x'_\beta=0,\tag{36}$$

由于 $B_\beta(\beta=1,\cdots,2n+1)$ 不显含 $x_k$，从(36)式，得到

$$\left(-\frac{\partial B_k}{\partial x_\beta}\right)x'_\beta=0,\tag{37}$$

即

$$-\frac{\mathrm{d}B_k}{\mathrm{d}\tau}=0,\tag{38}$$

于是有积分(35).

由命题 7，容易得到位形空间中自由 Birkhoff 系统的广义能量积分和循环积分[20]. 以下两个命题是命题 7 的推论.

**命题 8**[3,20]　对于自治 Birkhoff 系统，系统的 Birkhoff 函数

$$B=B(a^1,a^2,\cdots,a^{2n})=\text{const}.\tag{39}$$

是系统的一个第一积分，称之为广义能量积分[20].

实际上，命题 7 中，取 $k=1,t=\tau$ 即可得到命题 8.

**命题 9**[20]　如果 $a^k$ 是自由 Birkhoff 系统的循环坐标，则

$$R_k(t,a^\mu)=\text{const}.\tag{40}$$

是系统的一个第一积分，称之为循环积分[20].

类似地，对于事件空间中的约束 Birkhoff 系统，由参数方程(34)可以直接得到系统的第一积分，命题 10 给出了第一积分及其存在条件.

**命题 10**　对于事件空间中的约束 Birkhoff 系统，如果 Birkhoff 函数组 $B_\beta(\beta=1,\cdots,2n+1)$ 不显含 $x_k$，且约束方程(31)也不显含 $x_k$，则

$$B_k=\text{const}.\tag{41}$$

是系统的一个第一积分.

**证明**　方程(34)中第 $k$ 个方程为

$$\left(\frac{\partial B_\beta}{\partial x_k}-\frac{\partial \beta_k}{\partial x_\beta}\right)x'_\beta=\lambda_\gamma\frac{\partial F_\gamma}{\partial x_k},\tag{42}$$

由于 $B_\beta(\beta=1,\cdots,2n+1)$ 和 $F_\gamma$ 均不显含 $x_k$，从(42)式，得到

$$\left(-\frac{\partial B_k}{\partial x_\beta}\right)x'_\beta=0,\tag{43}$$

即

$$-\frac{\mathrm{d}B_k}{\mathrm{d}\tau}=0,\tag{44}$$

于是有积分(41).

由命题 10，容易得到位形空间中约束 Birkhoff 系统的广义能量积分和循环积分：

**命题 11**　对于约束 Birkhoff 系统，如果 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组不显含时间 $t$，且约束方程(30)也不显含时间 $t$，则系统的 Birkhoff 函数

$$B=B(a^1,a^2,\cdots,a^{2n})=\text{const}.\tag{45}$$

是系统的一个第一积分，可称之为广义能量积分.

**命题 12**　对于约束 Birkhoff 系统，如果 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组不显含 $a^k$，且约束方程(30)也不显含 $a^k$，则

$$R_k(t,a^\mu)=\text{const}.\tag{46}$$

是系统的一个第一积分，可称之为循环积分.

## 5. 结 论

本文研究了事件空间中的 Birkhoff 系统动力学，建立了事件空间中 Pfaff-Birkhoff 原理和 Birkhoff 方程，并给出了系统的第一积分. 这些研究具有基本意义，基于本文的研究结果可以将位形空间中 Birkhoff 系统动力学理论推广到事件空间中. 例如，可以建立事件空间中 Birkhoff 系统的对称性和守恒量理论，包括 Noether 对称性、Lie 对称性、Mei 对称性及其相应的 Noether 守恒量、Hojman 守恒量和 Mei 守恒量等.


[1] Birkhoff G D 1927 *Dynamical Systems* (Providence RI: AMS College Publ.)

[2] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics* II (New York: Springer-Verlag)

[3] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B 1996 *Dynamics of Birkhoffian System* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬 1996 BIRKHOFF 系统动力学(北京 北京理工大学出版社)]

[4] Mei F X 1997 *Advances in Mechanics* **27** 436 (in Chinese) [梅凤翔 1997 力学进展 **27** 436]

[5] Mei F X 1996 *Mechanics in Engineering* **18** 1 (in Chinese) [梅凤翔 1996 力学与实践 **18** 1]

[6] Galiullan A S 1989 *Analytical Dynamics* (Moscow: Nauka) (in Russian) [Галиуллин АС 1989 Аналитическая Динамика (Москва:Наука)]

[7] Mei F X 1993 *Chin. Sci. Bull.* **38** 816

[8] Mei F X 1993 *Sci. China* A **36** 1456

[9] Shi R C, Mei F X and Zhu H P 1994 *Mech. Res. Commun.* **21** 269

[10] Wu H B, Mei F X 1995 *Chin. Sci. Bull.* **40** 885

[11] Mei F X 1996 *Chin. Sci. Bull.* **41** 641

[12] Mei F X 1999 *Chin. Sci. Bull.* **44** 318

[13] Mei F X, Wu H B 2000 *Chin. Sci. Bull.* **45** 412

[14] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京 科学出版社)]

[15] Chen X W, Mei F X 2000 *Mech. Res. Commun.* **27** 365

[16] Fu J L, Wang X M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1023 (in Chinese) [傅景礼、王新民 2000 物理学报 **49** 1023]

[17] Luo S K, Chen X W, Fu J L 2001 *Chin. Phys.* **10** 271

[18] Zhang Y 2001 *Acta Mech. Sin.* **33** 669 (in Chinese) [张 毅 2001 力学学报 **33** 669]

[19] Mei F X, Chen X W 2001 *J. Beijing Inst. Technol.* **10** 138

[20] Zheng G H, Chen X W, Mei F X 2001 *J. Beijing Inst. Technol.* **10** 17

[21] Guo Y X, Shang M, Luo S K 2003 *Appl. Math. Mech.* **24** 62 (in Chinese) [郭永新、尚 玫、罗绍凯 2003 应用数学和力学 **24** 62]

[22] Guo Y X, Luo S K, Shang M, Mei F X 2001 *Rep. Math. Phys.* **47** 313

[23] Luo S K 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 449

[24] Zhang Y, Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2419 (in Chinese) [张 毅、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 2419]

[25] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1666 (in Chinese) [张 毅 2002 物理学报 **51** 1666]

[26] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 461 (in Chinese) [张 毅 2002 物理学报 **51** 461]

[27] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量(北京 北京理工大学出版社)]

[28] Zhang Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4026 (in Chinese) [张 毅 2004 物理学报 **53** 4026]

[29] Zhang Y, Fan C X, Ge W K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3644 (in Chinese) [张 毅、范存新、葛伟宽 2004 物理学报 **53** 3644]

[30] Xu Z X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4971 (in Chinese) [许志新 2005 物理学报 **54** 4971]

[31] Zhang Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3833 (in Chinese) [张 毅 2006 物理学报 **55** 3833]

[32] Zheng S W, Jia L Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5590 (in Chinese) [郑世旺、贾利群 2006 物理学报 **55** 5590]

[33] Synge L J 1960 *Classical Dynamics* (Berlin: Springer)

[34] Mei F X, Liu D, Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、刘 端、罗 勇 1991 高等分析力学(北京 北京理工大学出版社)]

# Parametric equations and its first integrals for Birkhoffian systems in the event space*

Zhang Yi†

（*College of Civil Engineering*，*Suzhou University of Science and Technology*，*Suzhou* 215011，*China*）

（Received 17 August 2007；revised manuscript received 2 October 2007）

Abstract

In this paper，the dynamics of Birkhoffian systems in the event space is studied. The Pfaff-Birkhoff-d'Alembert principle and Birkhoff's parametric equations for the Birkhoffian systems are established in the event space of $(2n+1)$ dimensions. The first integrals of the parametric equations and the conditions for their existence are presented.

**Keywords**：Birkhoffian system，event space，parametric equation，first integral

**PACC**：0320，4610

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China（Grant No. 10572021）.

† E-mail：zhy@mail.usts.edu.cn