第 57 卷 第 5 期 2008 年 5 月
1000-3290/2008/57(05)/2654-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57, No.5, May, 2008

一类燃烧模型的同伦分析解法*

吴钦宽†

(南京工程学院数学研究所,南京 211167)

(2007 年 7 月 26 日收到;2007 年 8 月 19 日收到修改稿)

研究了一类非线性燃烧模型.利用同伦分析方法,得到了该模型的近似解.

关键词:非线性方程,燃烧模型,同伦分析法,近似解

PACC:0340K,0290

1. 引 言

关于非线性问题理论和方法的研究目前在国际学术界是十分热门的课题之一,许多学者做了大量的工作[1—17],并解决了许多数学物理问题.

燃烧模型的研究为当前学术界所关注:黄勇成等[18]对特征时间燃烧模型、杜扬等[19]对湍流爆炸燃烧模型、颜应文等[20]对亚网格燃烧模型、张进军等[21]对热动力系统固体药柱燃烧模型和韩祥临[22]对燃烧模型的近似解等方面作了一系列研究.本文利用同伦分析方法[23],考虑如下一类非线性燃烧模型:

$$\varepsilon y'' - (y^2 - t^2)^n = 0, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, n \geqslant 1, \tag{1}$$

方程(1)中的边界条件为

$$y(-1) = y(1) = 1, \tag{2}$$

其中 ε(假定是十分小的)是扩散效应对反应速度的比率,而 t 是距离坐标,$t = 0$ 是燃料与氧化物彼此相遇并反应时火焰的位置.函数 $y - t$ 和 $y + t$ 分别代表燃料与氧化物的物质份额,n 为正整数.

2. 用同伦分析方法求解

2.1. 零阶形变方程

根据方程(1)的边界条件,可采用如下基函数:

$$\{t^k \mid k = 0,1,2,3,\cdots\}, \tag{3}$$

表达方程(1)之解,即

$$y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k, \tag{4}$$

其中 a_k 为系数.

由解表达和边界条件(2),显然应选取

$$y_0(t) = 1, \tag{5}$$

作为 $y(t)$ 的初始猜测解.

根据解表达(4),且由方程(1)和(2),我们选取辅助线性算子

$$L[\Phi(t,q)] = \frac{\partial^2 \Phi(t,q)}{\partial t^2}, \tag{6}$$

其具有性质

$$L(C_0 + C_1 t) = 0, \tag{7}$$

其中 C_0, C_1 为系数,$\Phi(t,q)$ 是依赖于 t 和 q 的实函数,$q \in [0,1]$ 为嵌入变量.根据方程(1),定义如下非线性算子:

$$N[\Phi(t,q)] = \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi(t,q)}{\partial t^2} - ((\Phi(t,q))^2 - t^2)^n, \tag{8}$$

令 $H(t)$ 为非零辅助函数.构造如下零阶形变方程:

$$(1-q)L[\Phi(t,q) - y_0(t)] + qH(t)N[\Phi(t,q)] = 0, \tag{9}$$

满足边界条件

$$\Phi(-1,q) = 1, \Phi(1,q) = 1, \tag{10}$$

$q \in [0,1]$ 为嵌入变量.

当 $q = 0$ 时,由(5),(9)和(10)式易知

$$\Phi(t,0) = y_0(t). \tag{11}$$

当 $q = 1$ 时,由于 $q \neq 0$ 和 $H(t) \neq 0$,零阶形变方程(9)和(10)等同于方程(1)和(2),从而

* 江苏省高校自然科学基础研究项目(批准号:07KJD110077)资助的课题.

† E-mail:wuqk@njit.edu.cn

$$\Phi(t,1) = y(t), \tag{12}$$

所以，当嵌入变量 q 从 0 增大到 1 时，$\Phi(t,q)$ 从初始猜测解 $y_0(t)$ 变化到精确解 $y(t)$.

利用泰勒展开定理和(11)式，将 $\Phi(t,q)$ 展开成如下幂级数：

$$\Phi(t,q) = y_0(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} y_k(t) q^k, \tag{13}$$

其中

$$y_k(t) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k \Phi(t,q)}{\partial q^k}\bigg|_{q=0}, \tag{14}$$

则由(12)式有级数解

$$y(t) = y_0(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} y_k(t), \tag{15}$$

其 M 阶近似解为

$$y(t) \approx y_0(t) + \sum_{k=1}^{M} y_k(t). \tag{16}$$

2.2. 高阶形变方程

为简便，定义向量

$$y_m = \{y_0(t), y_1(t), \cdots, y_m(t)\}. \tag{17}$$

将零阶形变方程(9)和(10)对 q 求导 k 次，然后令 $q=0$，最后除以 k！得到高阶形变方程

$$L[y_k(t) - \chi_k y_{k-1}(t)] + H(t) R_k(y_{k-1}) = 0, \tag{18}$$

满足

$$y_k(1) = y_k(-1) = 0, (k \geqslant 1), \tag{19}$$

其中

$$\chi_k = \begin{cases} 0, & k \leqslant 1, \\ 1, & \text{其他}, \end{cases} \tag{20}$$

且(为表述方便，不妨取 $n=2$)

$$\begin{aligned} R_k(y_{k-1}) &= \frac{1}{(k-1)!}\frac{\partial^{k-1}}{\partial q^{k-1}} N(\Phi(t,q)) \mid_{q=0} \\ &= \varepsilon y''_{k-1}(t) - \sum_{j=0}^{k-1}\Big\{\Big[\sum_{l=0}^{j} y_l(t) y_{j-l}(t) \\ &\quad - t^2(1-\chi_{j+1})\Big] \\ &\quad \times \Big[\sum_{s=0}^{k-1-j} y_s(t) y_{k-1-j-s}(t) \\ &\quad - t^2(1-\chi_{k-j})\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{21}$$

对上述线性微分方程(18)和(19)采用符号推导软件 Mathematica 易求解.

根据解表达(4)和方程(18)，辅助函数 $H(t)$ 应具有如下形式：

$$H(t) = t^k,$$

其中，$k \geqslant 0$ 是整数. 为简便，选取 $k=0$，于是

$$H(t) = 1. \tag{22}$$

由(6)式，方程(18)的解为

$$\begin{aligned} y_k(t) &= \chi_k y_{k-1}(t) - \int_0^t \Big(\int_0^\eta R_k(y_{k-1}) \mathrm{d}\xi\Big) \mathrm{d}\eta \\ &\quad + C_0 + C_1 t, \end{aligned} \tag{23}$$

其中，系数 C_0，C_1 由边界条件(19)确定. 由(5)，(23)式分别得到 $y_k (k=0,1,2,\cdots)$，

$$\begin{aligned} y_0(t) &= 1, \\ y_1(t) &= -\frac{11}{30} + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{6} + \frac{t^6}{30}, \\ y_2(t) &= \frac{11}{30}(\varepsilon - 1) - \frac{311}{9450} + \Big(-\frac{\varepsilon}{2} - \frac{7}{30}\Big) t^2 \\ &\quad + \Big(\frac{\varepsilon}{6} + \frac{1}{90}\Big) t^4 + \Big(-\frac{\varepsilon}{30} - \frac{1}{18}\Big) t^6 \\ &\quad + \frac{1}{70} t^8 - \frac{1}{675} t^{10}, \end{aligned}$$

等等. 于是得到非线性燃烧模型(1)，(2)的 M 阶近似解 $\sum_{k=0}^{M} y_k(t)$.

2.3. 收敛定理

定理 若级数(15)收敛，其中 $y_k(t)$ 满足方程(18)，且(21)式成立，则它就是方程(1)的解.

证明 若级数(15)收敛，必定有

$$\lim_{k\to+\infty} y_k(t) = 0, \tag{24}$$

那么，利用(6)，(18)式有

$$\begin{aligned} &- H(t)\sum_{k=0}^{+\infty} R_k(y_{k-1}) \\ &= \lim_{k\to+\infty} L(y_k(t)) \\ &= L(\lim_{k\to+\infty} y_k(t)) = 0, \end{aligned} \tag{25}$$

由于 $H(t)=1$，(25)式给出

$$\sum_{k=0}^{+\infty} R_k(y_{k-1}) = 0, \tag{26}$$

将(21)式代入(26)式，并化简，有

$$\varepsilon \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} y_k(t)\Big) - \Big(\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} y_k(t)\Big)^2 - t^2\Big)^2 = 0, \tag{27}$$

由边界条件(19)和(5)式，成立

$$\sum_{k=0}^{+\infty} y_k(-1) = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k(1) = 1. \tag{28}$$

于是，由(27)，(28)式可知，级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} y_k(t)$ 是方程(1)的解.

3. 结 论

由上述分析求解可以看出,同伦分析理论可以求得精度较高的非线性问题的解,本文通过分析探讨,得到了问题(1),(2)的近似解 $\sum_{k=0}^{M} y_k(t)$ 具有级数形式,这样在解决许多实际问题时具有一定的实用价值,为实际应用提供了理论依据.

[1] Mo J Q, Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 996 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 996]

[2] Lai X J, Zhang J F 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4065 (in Chinese) [来娴静、张解放 2004 物理学报 **53** 4065]

[3] Tang J S, Xie X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2828 (in Chinese) [唐驾时、谢 喜 2004 物理学报 **53** 2828]

[4] Hu J L 2004 *Chin. Phys.* **13** 297

[5] Wu Q K 2004 *J. Engi. Math.* **21** 653 (in Chinese) [吴钦宽 2004 工程数学学报 **21** 653]

[6] Mo J Q, Wang H, Lin Y H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5581 (in Chinese) [莫嘉琪、王 辉、林一骅 2005 物理学报 **54** 5581]

[7] Wu Q K, Lin P J, Sun F S, You X H 2005 *Prog. Nat. Sci.* **15** 375 (in Chinese) [吴钦宽、林平健、孙福树、尤兴华 2004 自然科学进展 **15** 375]

[8] Han Z X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1481 (in Chinese) [韩兆秀 2005 物理学报 **54** 1481]

[9] Wu Q K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2510 (in Chinese) [吴钦宽 2005 物理学报 **54** 2510]

[10] Mo J Q, Zhang W J, He M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3233 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、何 铭 2006 物理学报 **55** 3233]

[11] Wu Q K 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1561 (in Chinese) [吴钦宽 2006 物理学报 **55** 1561]

[12] Mo J Q, Zhang W J, He M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1843 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、何 铭 2007 物理学报 **56** 1843]

[13] Chen S L, Nian Y D 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1851 (in Chinese) [陈松林、年亚东 2007 物理学报 **56** 1851]

[14] Wu Q K 2007 *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser.* A **22** 26 (in Chinese) [吴钦宽 2007 高校应用数学学报 A 辑 **22** 26]

[15] Deng F Q, Li A P, Luo Y P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 637 (in Chinese) [邓飞其、李安平、罗毅平 2007 物理学报 **56** 637]

[16] Guo Q P, He F, Liu L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4326 (in Chinese) [郭启波、贺 锋、刘 辽 2007 物理学报 **56** 4326]

[17] Li Y X, Lin D, Zhan J M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3649 (in Chinese) [李毓湘、林 东、詹杰民 2007 物理学报 **56** 3649]

[18] Huang Y C, Zhou L B 2005 *Journal of Xi'an Jiaotong University* **39** 210 (in Chinese) [黄勇成、周龙保 2005 西安交通大学学报 **39** 210]

[19] Du Y, Yang X F, Jiang X S, Gao J F, Shen G X, Yang S 2006 *Journal of Engineering Thermophysics* **27** 1046 (in Chinese) [杜扬、杨小凤、蒋新生、高建丰、沈光新、杨 双 2006 工程热物理学报 **27** 1046]

[20] Yan Y W, Zhao J X, Zhang J Z, Liu Y 2006 *Acta Mechanica Sinica* **38** 776 (in Chinese) [颜应文、赵坚行、张靖周、刘勇 2006 力学学报 **38** 776]

[21] Zhang J J, Qian Z B, Yang J, Yan P 2006 *Acta Armamentarii* **27** 817 (in Chinese) [张进军、钱志博、杨 杰、闫 萍 2006 兵工学报 **27** 817]

[22] Han X L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4061 (in Chinese) [韩祥临 2004 物理学报 **53** 4061]

[23] Liao S J 2003 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* (Chapman & Hall/CRC, Boca Raton)

The homotopy analysis method for solving a class of combustion models *

Wu Qin-Kuan†

(*Institute of Mathematics*, *Nanjing Institute of Technology*, *Nanjing* 211167 *China*)

(Received 26 July 2007; revised manuscript received 19 August 2007)

Abstract

A type of nonlinear combustion model is studied. Using the homotopy analysis method, the approximation solution is obtained.

Keywords: nonlinear equation, combustion model, homotopy analysis method, approximation solution

PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the Natural Science Foundation of the Jiangsu Higher Education Institutions of China (Grant No. 07KJD110077).

† E-mail: wuqk@njit.edu.cn