第 57 卷 第 5 期 2008 年 5 月
1000-3290/2008/57(05)/2674-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57,No.5,May,2008

三粒子 Calogero-Sutherland 模型的相干态

李文博　李宓善　李亚玲　温晓阳　袁广军　张　驰　杨　涛

(北京交通大学物理系,北京　100044)

(2007 年 7 月 17 日收到;2007 年 8 月 25 日收到修改稿)

利用赝角动量算符方法求解三粒子 CSM(Calogero-Sutherland Model)的类径向方程,给出本征态和相干态的解析表达式.

关键词:三粒子 Calogero-Sutherland 模型,赝角动量算符方法,相干态

PACC:0365,3310C

1. 引　　言

描述一维空间中 N 个相互作用的全同粒子(玻色子或费米子) Calogero-Sutherland 模型(CSMN)[1—3]的哈密顿为

$$H = \frac{1}{2}\Big[-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\sum_{i=1}^{N}x_i^2+g\sum_{j<i}^{N}\frac{1}{(x_i-x_j)}\Big]. \tag{1}$$

由于 CSMN 涉及到二维引力理论[4,5],量子 Hall 效应[6—8],分形统计[6]以及许多其他的物理热点问题[9],因此一直引起广泛关注. 许多文献采用群论的方法进行深入研究[10—19].

CSM2 早年被提起过,但是没有深入研究[20],现在已经被研究得十分充分了,文献[21]采用赝角动量方法研究了它的谱结构和相干态. 对于 $N>3$ 情况,有一些一般研究. 文献[19]按照李代数的术语分类,将体系(1)归类为 B_{n-1}-型,CSM3 则为 B_2-型. 对于 $N=3$ 情况,文献[1]已经给出精确解,同时也讨论了不同统计类型的粒子的情况. 文献[21]提出用赝角动量算符方法求解了 CSM2 并详细分析了谱空间的对称性. 文献[21]提出用参量平移算符方法求解了 CSM3 体系的类角动量方程,给出 CSM3 的解析解,重点分析了 CSM3 的相互作用参量 g 对谱结构的影响. 本文在文献[21]的基础上采用赝角动量算符方法,提出一套新的算符体系不仅给出 CSM3 的类径向方程的归一化本征态的解析表达式,更重要的是得到了 CSM3 体系的相干态的解析表达式.

文献[1]给出的在质心系中 CSM3 的定态薛定谔方程为

$$H\Psi = E\Psi,$$

$$H = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\frac{1}{8}\omega^2[(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2]+\frac{g_1}{(x_2-x_3)^2}+\frac{g_2}{(x_3-x_1)^2}+\frac{g_3}{(x_1-x_2)^2}. \tag{2}$$

按照文献[1],采用 Jacobi 坐标系

$$r=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2},$$

$$\tan\phi=\sqrt{3}\,\frac{x_1-x_2}{(x_2-x_3)-(x_3-x_1)}. \tag{3}$$

于是方程(2)化为

$$\Big(-\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{3}{8}\omega^2r^2+\frac{J^2}{r^2}\Big)\Psi(r,\phi)=E\Psi(r,\phi),$$

$$0\leqslant r<\infty, 0\leqslant\phi<\pi. \tag{4}$$

$$J^2=-\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{1}{2}\Big[\frac{g_3}{\sin^2\phi}+\frac{g_1}{\sin^2\big(\phi+\frac{2}{3}\pi\big)}+\frac{g_2}{\sin^2\big(\phi+\frac{4}{3}\pi\big)}\Big]. \tag{5}$$

作变量代换

$$\xi=\alpha r, \alpha=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\omega},$$

$$E=2\sqrt{\frac{3}{2}}\omega\lambda, \lambda>0. \tag{6}$$

于是方程(4)化为

$$\frac{1}{2}\Big(-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}+\xi^2+\frac{J^2}{\xi^2}\Big)\Psi(\xi,\phi)=\lambda\Psi(\xi,\phi),$$

$$0\leqslant\xi<\infty. \tag{7}$$

经过分离变量

$$\Psi(\xi,\phi) = R(\xi)f(\phi), \tag{8}$$

得到一个类角动量方程

$$J^2 f(\phi) = \left(j + \frac{1}{2}\right)^2 f(\phi), \tag{9}$$

和一个类径向方程

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi} + \xi^2 + \frac{(j+1/2)^2}{\xi^2}\right]R(\xi) = \lambda R(\xi). \tag{10}$$

由于算符(5)式的类角动量平方形式，因此我们将方程(9)中的本征值写成不小于零的形式．进一步观察算符(5)，其中的 $g_i/2$ 相当于角动量的分量的平方，因此可以确定

$$\frac{g_i}{2} \leqslant \left(j + \frac{1}{2}\right)^2. \tag{11}$$

文献[21]已经提到了方程(10)，并指出它是 CSM2 方程的一种变形．

文献[1]涉及到方程(2)中粒子间相互作用参量的两种 g_i 的特定取值情况

$$g_1 = g_2 = g_3 = g \tag{12}$$

和

$$g_1 = g_2 = 0, g_3 = 2g; g = \left(m^2 - \frac{1}{4}\right) < -\frac{1}{4}. \tag{13}$$

最后一个不等式后文要论证．为了下文的方便，我们已经通过(13)式的最后一式将相互作用参量做了特别的安排．文献[1]的处理已经表明，两种情况(12)和(13)式无论在方程的形式上还是在解法上皆颇为雷同，因此我们只讨论情况(13)．

按照(13)式，方程(9)及其左边的算符(5)化为

$$J^2 f(\phi) = \left(j + \frac{1}{2}\right)^2 f(\phi);$$

$$J^2 = -\frac{d^2}{d\phi^2} + \frac{m^2 - 1/4}{\sin^2\phi},$$

$$\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant m^2 - \frac{1}{4}. \tag{14}$$

最后的不等式来自(11)式．

方程(14)是一个变形的 Gegenbauer 方程，文献[1]已经给出了它的本征解和本征值谱．文献[21]采用一种新的赝角动量方法求解方程(14)．所得本征值和本征态为

$$j = l + m, l = 0,1,2,\cdots; m > -\frac{1}{2}. \tag{15}$$

$$f_{lm}(\phi) = C_{lm}(\sin\phi)^{m+1/2}\left[(\sin\phi)^{-2m} \times \left(\frac{1}{\sin\phi}\frac{d}{d\phi}\right)^l (\sin\phi)^{2(l+m)}\right]. \tag{16}$$

(15)式中的不等式与(13)式一致，与双粒子 CSM2 情况完全相同．(16)式中 C_{lm} 为归一化常数．

我们的目的是从方程(10)出发，得到 CSM3 的相干态．

2．算符体系和本征值

为了本文的目的，将方程(10)写成

$$A_3 = \frac{1}{4}\left[-\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi} + \xi^2 + \frac{(j+1/2)^2}{\xi^2}\right],$$

$$A_3 R(\xi) = \lambda R(\xi). \tag{17}$$

构造算符

$$A_1 = i\left(A_3 - \frac{1}{2}\xi^2\right),$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{d\xi}\xi - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\xi\frac{d}{d\xi} + 1\right). \tag{18}$$

并定义算符

$$A^2 \equiv A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \tag{19}$$

和

$$A \equiv -iA_1 - A_2, A^+ \equiv -iA_1 + A_2. \tag{20}$$

可以证明如下的算符对易关系：

$$[A_1, A_2] = iA_3,$$

$$[A_2, A_3] = iA_1,$$

$$[A_3, A_1] = iA_2;$$

$$[A^2, A_k] = 0, k = 1,2,3, \tag{21}$$

以及

$$A^+ A = A_3(A_3 - 1) - A^2,$$

$$AA^+ = A_3(A_3 + 1) - A^2. \tag{22}$$

将算符方程(22)两边作用于态函数 $R(\xi)$ 并考虑到方程(17)，我们有

$$A^+ AR_\lambda(\xi) = [\lambda(\lambda - 1) - A^2]R_\lambda(\xi),$$

$$AA^+ R_\lambda(\xi) = [\lambda(\lambda + 1) - A^2]R_\lambda(\xi). \tag{23}$$

这是与方程(17)等价的两个方程．由(17)，(18)和(19)三式可求出

$$A^2 = \frac{1}{4}\left(j^2 + j - \frac{3}{4}\right). \tag{24}$$

显然本征函数的递推关系为

$$AR_\lambda(\xi) = C_1 R_{\lambda-1}(\xi), \tag{25}$$

$$A^+ R_\lambda(\xi) = C_2 R_{\lambda+1}(\xi). \tag{26}$$

为了保证 $R_\lambda(\xi)$ 和 $R_{\lambda\pm1}(\xi)$ 皆为归一化的，配置了待定常数 C_1 和 C_2．由(26)式可见，本征值为

$$\lambda_n = n + \lambda_0, n = 0,1,2,\cdots; \lambda_0 > 0. \tag{27}$$

按照方程(6)的要求，$\lambda > 0$，即 λ 有下限 λ_0，因

此,仍有 $\lambda_0 > 0$. 与之对应的态函数记为 $R_{\lambda_0}(\xi)$,显然有

$$AR_{\lambda_0}(\xi) = 0. \tag{28}$$

此方程右边的零表示不存在的状态,作为存在的状态 $R_{\lambda_0}(\xi)$不恒为零(不是恒为零的函数).

将方程(28)套入(23)的第一个方程,我们有

$$[\lambda_0(\lambda_0 - 1) - A^2] R_{\lambda_0}(\xi) = 0. \tag{29}$$

由于 $R_{\lambda_0}\xi$ 不恒为零,则方程(29)中的方括号恒为零,结合(24)式并保证 $\lambda_0 > 0$,我们有

$$2\lambda_0 = \begin{cases} l + m + 3/2, & l = 0,1,2,\cdots; \quad m > -1/2, \\ 1/2 - m_0, & l = 0; \quad -1/2 < m_0 < 1/2, \end{cases} \tag{30}$$

以及

$$2\lambda_n = \begin{cases} 2n + l + m + 3/2, & l = 0,1,2,\cdots; \quad m > -1/2, \\ 2n + 1/2 - m_0, & l = 0; \quad -1/2 < m_0 < 1/2, \end{cases} \quad n = 0,1,2,\cdots. \tag{31}$$

能级为

$$E_{nlm} = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{2}}\,\omega\left(2n + l + m + \frac{3}{2}\right), & l = 0,1,2,\cdots; \quad m > -\frac{1}{2}, \\ \sqrt{\frac{3}{2}}\,\omega\left(2n + \frac{1}{2} - m_0\right), & l = 0, \quad -\frac{1}{2} < m_0 < \frac{1}{2}, \end{cases} \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{32}$$

这个结果已经有文献[21]给出. 注意,这里只有两个量子数 n 和 l,m 不是量子数. 能级(32)式的第一行与文献[1]完全一致,而第二行被文献[1]遗漏.

3. 归一化的本征态

为了计算本征态,需要将有关的算符和方程重新表出. (21)式的第一个方程表为

$$A_3 R_{nlm}(\xi) = \lambda_n R_{nlm}(\xi). \tag{33}$$

算符(20)具体表为

$$A = A_3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi,$$

$$A^+ = A_3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}. \tag{34}$$

算符(34)可以作用在任意态函数上. 如果算符(34)只作用在本征态上,按照方程(33)有

$$A_n = \lambda_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi$$

$$= -\frac{1}{2}\xi^{2\lambda_n+1}\mathrm{e}^{-\xi^2/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{e}^{\xi^2/2}\xi^{-2\lambda_n}, \tag{35}$$

$$A_n^+ = \lambda_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}$$

$$= \frac{1}{2}\xi^{-2\lambda_n}\mathrm{e}^{\xi^2/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{e}^{-\xi^2/2}\xi^{2\lambda_n+1}. \tag{36}$$

这两个算符表达式的最后已经表成方便使用的形式.

为了表达方程(23),首先要计算方程中的因子 $\lambda(\lambda-1) - A^2$ 和 $\lambda(\lambda+1) - A^2$,为此设

$$j' = \frac{1}{2}\left(j - \frac{1}{2}\right),$$

于是(24)式化为

$$A^2 = \frac{1}{4}\left(j^2 + j - \frac{3}{4}\right) = j'(j' + 1). \tag{37}$$

(23)式第一个方程中的因子 $\lambda(\lambda-1) - A^2$ 为

$$\lambda(\lambda - 1) - A^2 = \lambda(\lambda - 1) - j'(j' + 1)$$

$$= \frac{1}{4}(2\lambda + 2j')(2\lambda - 2j' - 2)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2n + 2\lambda_0 + j - \frac{1}{2}\right)$$

$$\times\left(2n + 2\lambda_0 - j - \frac{1}{2}\right). \tag{38}$$

$2\lambda_0$ 的代入要考虑到(30)式的两种情况,我们先考虑第一种情况,得到

$$\lambda(\lambda - 1) - A^2 = n\left(n + l + m + \frac{1}{2}\right), \tag{39}$$

$$\lambda(\lambda + 1) - A^2 = (n + 1)\left(n + l + m + \frac{3}{2}\right). \tag{40}$$

(40)式是按照同样的程序同理推出的,具体推算从略. 于是方程(23)化为

$$A^+_{n-1,lm}A_{n,lm}R_{nlm}(\xi)$$

$$= n\left(n + l + m + \frac{1}{2}\right)R_{nlm}(\xi), \tag{41}$$

$$A_{n+1,lm}A_{nlm}^{+}R_{nlm}(\xi)=(n+1)\left(n+l+m+\frac{3}{2}\right)R_{nlm}(\xi).\quad(42)$$

将(30)式的第二种情况代入(38)式，再将结果代入方程(23)得到

$$A_{n-1,00}^{+}A_{n00}R_{n00}(\xi)=n\left(n-m_0-\frac{1}{2}\right)R_{n00}(\xi),\quad(43)$$

$$A_{n+1,00}A_{n00}^{+}R_{n00}(\xi)=(n+1)\left(n-m_0+\frac{1}{2}\right)R_{n00}(\xi).\quad(44)$$

于是可以推算出方程(26)为

$$A_{nlm}R_{nlm}(\xi)=\sqrt{n(n+l+m+1/2)}R_{n-1,lm}(\xi),\quad(45)$$

$$A_{n00}R_{n00}(\xi)=\sqrt{n(n-m_0-1/2)}R_{n-1,00}(\xi),\quad(46)$$

$$R_{nlm}(\xi)=\frac{A_{n-1,lm}^{+}}{\sqrt{n(n+l+m+1/2)}}R_{n-1,lm}(\xi),\quad(47)$$

$$R_{n00}(\xi)=\frac{A_{n-1,00}^{+}}{\sqrt{n(n-m_0-1/2)}}R_{n00}(\xi).\quad(48)$$

这四个方程中，前两个和后两个表达方式不同，是为了后文的不同需要.

现在我们计算归一化的本征态. 将方程(47)和(48)一推到底，我们有

$$R_{nlm}(\xi)=\sqrt{\frac{\Gamma(l+m+1/2)}{n!\Gamma(n+l+m+1/2)}}\times A_{n-1,lm}^{+}A_{n-2,lm}^{+}\cdots A_{0lm}^{+}R_{0lm}(\xi),\quad(49)$$

$$R_{n00}(\xi)=\sqrt{\frac{\Gamma(1/2-m_0)}{n!\Gamma(n-m_0-1/2)}}\times A_{n-1,00}^{+}A_{n-2,00}^{+}\cdots A_{000}^{+}R_{000}(\xi).\quad(50)$$

需要计算两种基态 R_{0lm} 和 R_{000} 并整理两种算符连乘. 我们先计算两种基态，由方程(28)和(35)的第一个算符可以得到基态函数

$$R_{000}(\xi)=\sqrt{\frac{2\alpha^3}{\Gamma(2-m_0)}}\xi^{1/2-m_0}\mathrm{e}^{-\xi^2/2},l=0;\ -\frac{1}{2}<m_0<\frac{1}{2},\quad(51)$$

$$R_{0lm}(\xi)=\sqrt{\frac{2\alpha^3}{\Gamma(l+m+2)}}\xi^{l+m+3/2}\mathrm{e}^{-\xi^2/2},\ l=0,1,2,\cdots;m>-\frac{1}{2}.\quad(52)$$

其中 α 由(6)式给出. 我们已经将这两种基态归一化，它们对应了(30)式的两种情况. 注意，积分元为 $r^2\mathrm{d}r$，积分限为从 0 到 ∞，以下同. 将(51)和(52)两式分别代入(50)和(49)式得到

$$R_{nlm}(\xi)=\sqrt{\frac{2\alpha^3\Gamma(l+m+1/2)}{n!\Gamma(n+l+m+1/2)\sqrt{\Gamma(l+m+2)}}}\times A_{n-1}^{+}A_{n-2}^{+}\cdots A_0^{+}\xi^{l+m+3/2}\mathrm{e}^{-\xi^2/2},\ l=0,1,2,\cdots;m>-1/2.\quad(53)$$

$$R_{n00}(\xi)=\sqrt{\frac{2\alpha^3\Gamma(1/2-m_0)}{n!\Gamma(n-m_0-1/2)\Gamma(2-m_0)}}\times A_{n-1}^{+}A_{n-2}^{+}\cdots A_0^{+}\xi^{1/2-m_0}\mathrm{e}^{-\xi^2/2},\ l=0;-1/2<m_0<1/2.\quad(54)$$

现在整理两种算符连乘. 利用算符(36)的后边表达形式，并考虑到(31)式的两种具体形式，我们有

$$A_{nlm}^{+}=\frac{1}{2}\xi^{-(2n+l+m+3/2)}\mathrm{e}^{\xi^2/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{e}^{-\xi^2/2}\xi^{2n+l+m+5/2},\quad(55)$$

$$A_{n00}^{+}=\frac{1}{2}\xi^{-(2n-m_0+1/2)}\mathrm{e}^{\xi^2/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{e}^{-\xi^2/2}\xi^{2n-m_0+3/2}.\quad(56)$$

写出两种算符连乘的表达式

$$A_{n-1,lm}^{+}A_{n-2,lm}^{+}\cdots A_{0,lm}^{+}=\frac{1}{2^n}\xi^{-(2n+l+m-1/2)}\mathrm{e}^{\xi^2/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi^3\right)^n\times\mathrm{e}^{-\xi^2/2}\xi^{l+m-1/2},\quad(57)$$

$$A_{n-1,00}^{+}A_{n-1,00}^{+}\cdots A_{000}^{+}=\frac{1}{2^n}\xi^{-(2n-m_0+1/2-2)}\mathrm{e}^{\xi^2/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi^3\right)^n\times\mathrm{e}^{-\xi^2/2}\xi^{-m_0-3/2}.\quad(58)$$

将两种算符连乘分别代入到(53)和(54)两式，我们有

$$R_{nlm}(\xi)=N_{nlm}\xi^{-(2n+l+m-1/2)}\mathrm{e}^{\xi^2/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi^3\right)^n\times\mathrm{e}^{-\xi^2}\xi^{2(l+m)+1},$$
$$N_{nlm}=\frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{2\alpha^3\Gamma(l+m+1/2)}{n!\Gamma(n+l+m+1/2)\sqrt{\Gamma(l+m+2)}}},\ l=0,1,2,\cdots;m>-\frac{1}{2}\quad(59)$$

和

$$R_{n00}(\xi)=\xi^{-(2n-m_0+1/2-2)}\mathrm{e}^{\xi^2/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi^3\right)^n\mathrm{e}^{-\xi^2}\xi^{-2m_0-1},$$
$$N_{n00}=\frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{2\alpha^3\Gamma(1/2-m_0)}{n!\Gamma(n-m_0-1/2)\Gamma(2-m_0)}},\ l=0;-\frac{1}{2}<m_0<\frac{1}{2}.\quad(60)$$

至此我们得到了全部归一化的本征态，其中(60)式是文献[1]所遗漏的.

这两个本征态含有 Laguerre 多项式部分. 我们以(59)式为例,将该式写成

$$R_{nlm}(\xi) = N_{nlm}\xi^{l+m+3/2}e^{-\xi^2/2} \times \left[\xi^{-2(l+m)-1}e^{\xi^2}\left(\frac{d}{d\xi}\xi^3\right)^n e^{-\xi^2}\xi^{2(l+m)+1}\right]. \tag{61}$$

(61)式的方括号便是本征函数的多项式部分,称为 Laguerre 多项式的 Rodrigues 公式. 从而结果与文献[1]一致.

4. 相干态

上述解方程的方法即为我们使用过的赝角动量算符方法. 这种方法不仅可以使解方程的过程代数化,可以与相应的李代数相联系 还有一个好处就是可以很方便地得到相干态的解析表达式. 下面计算本体系的相干态.

按照相干态的定义

$$AR_z(\xi) = zR_z(\xi), \tag{62}$$

其中 z 为复数. 设相干态由本征态的线性组合表示

$$R_z(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n R_n(\xi). \tag{63}$$

按照方程(62)确定常量 C_n. 将(64)式代入方程(62)并考虑到方程(45)得到递推关系

$$C_n = \frac{z}{\sqrt{n(n+l+m+1/2)}}C_{n-1}. \tag{65}$$

一推到底,我们有

$$C_n = C_0\sqrt{\Gamma(l+m+1/2)} \times \frac{z^n}{\sqrt{n!\Gamma(n+l+m+1/2)}}. \tag{65}$$

代入(63)式,得到

$$R_z(\xi) = C_0\sqrt{\Gamma(l+m+1/2)} \times \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!\Gamma(n+l+m+1/2)}} \times R_n(\xi). \tag{66}$$

利用 $R_z(\xi)$ 归一化和 $R_n(\xi)$ 的正交归一性来确定 C_0,得到

$$C_0\sqrt{\Gamma(l+m+1/2)} = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{n!\Gamma(n+l+m+1/2)}\right]^{-1/2}. \tag{67}$$

代入(66)式得到

$$R_{zlm}(\xi) = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{n!\Gamma(n+l+m+1/2)}\right]^{-1/2} \times \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!\Gamma(n+l+m+1/2)}} \times R_{nlm}(\xi). \tag{68}$$

同理,利用方程(46)和定义式(62)可以得到另一套相干态

$$R_{z00}(\xi) = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{n!\Gamma(n-m_0-1/2)}\right]^{-1/2} \times \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!\Gamma(n-m_0-1/2)}} \times R_{n00}(\xi). \tag{69}$$

5. 结 论

本文在文献[21]的基础上采用赝角动量算符方法,提出一套新的算符体系,不仅给出 CSM3 的类径向方程的归一化的本征态的解析表达式,更重要的是得到了 CSM3 体系的相干态的解析表达式. 结合文献[21]给出了 CSM3 体系的全貌. 本文充分体现了赝角动量算符方法(pseudo-angular-momentum method)的有效性和诸多的长处,这是一个适用面很广的方法. 该方法将求解本征方程代数化,可以避免求解二阶微分方程,只需求解一个简单的一阶微分方程. 同时由于可以构造体系的产生算符和湮没算符,很容易得到体系的相干态的解析表达式,为深入研究体系准备了很好的条件. 事实上我们的赝角动量方法乃是寻找 $SU(1,1)$ 李代数的各种具体表示的一种十分有效的途径,可以为相关李代数的研究提供各种具体的模型.

[1] Calogero F 1969 *J. Math. Phys.* **10** 2191

[2] Calogero F 1971 *J. Math. Phys.* **12** 419

[3] Sutherland B 1971 *J. Math. Phys.* **12** 246

[4] Andric I, Jevicki A, Levine H 1983 *Nucl. Phys.* B **215** 307

[5] Jevicki A 1992 *Nucl. Phys.* B **376** 75

[6] Kawakami N 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 275

[7] Azuma H, Iso S 1994 *Phys. Lett.* B **331** 107

[8] Panigrahi P K, Sivakumar M 1995 *Phys. Rev.* B **52** 13742

[9] Simons B D, Lee P A, Altshuler B L 1994 *Phys. Rev.* **72** 64

[10] Wojciechowski S 1978 *Phys. Lett.* A **66** 265

[11] Zhu D P 1987 *J. Phys.* A **20** 4331
[12] Perelomov A M 1986 *Generalized Coherent States and Their Application* (Berlin: Springer-Verlag) pp217—220
[13] Barut A O, Girardello 1971 *Commun. Math. Phys.* **21** 41
[14] Perelomov A M 1972 *Commun. Math. Phys.* **26** 222
[15] Gerry C C 1986 *Phys. Rev.* A **35** 2146
[16] Gerry C C 1985 *Phys. Rev.* A **31** 2721
[17] Gerry C C 1984 *Phys. Lett.* **142**B 391
Gerry C C 1986 *Phys. Rev.* A **33** 2207
[18] Gerry C C, Silverman S 1982 *J. Math. Phys.* **23** 1995
[19] Olshanetsky, Perelomov 1983 *Phys. Rep.* **94** 313
[20] Landau L D, Lifshitz E M 1958 *Quantum Mechanics* (Pergnamon Press, Inc. New York, 1958), Sec. 35
[21] Li W B 2005 *J. Phys.* A **38** 7543

Coherent state of three-particle Calogero-Sutherland model

Li Wen-Bo　Li Mi-Shan　Li Ya-Ling　Wen Xiao-Yang　Yuan Guang-Jun　Zhang Chi　Yang Tao

(*Department of Physics, Beijing Jiaotong University, Beijing* 100044, *China*)

(Received 17 July 2007; revised manuscript received 25 August 2007)

Abstract

The three-particle CSM (Calogero-Sutherland model) is solved by the pseudo-angular-momentum method. Analytic expressions of the eigenstate and coherent states are obtained.

Keywords: Calogero-Sutherland model, pseudo-angular-momentum method, coherent state

PACC: 0365, 3310C