

基于混合差分进化算法的混沌系统参数估计*

王钧炎† 黄德先

(清华大学自动化系, 北京 100084)

(2007 年 7 月 17 日收到, 2007 年 8 月 28 日收到修改稿)

混沌系统参数估计是混沌系统控制与同步的关键问题. 通过构造一个适当的适应度函数, 将混沌系统的参数估计问题转化为一个多维优化问题, 然后利用混合差分进化算法的全局搜索能力求解该优化问题. 以典型的 Lorenz 混沌系统为例进行了数值仿真, 结果表明了混合差分进化算法的有效性和鲁棒性, 是一种有效的混沌系统参数估计方法.

关键词: 混沌系统, 参数估计, 混合差分进化算法

PACC: 0545

1. 引言

差分进化算法(differential evolution, DE)是一种新兴的进化计算技术^[1], 由 Storn 和 Price 于 1995 年提出. 最初的设想是用于解决切比雪夫多项式问题, 后来发现 DE 是解决复杂优化问题的有效技术, 并已应用于多个科学和工程领域^[2]. DE 是一种基于群体智能理论的优化算法, 它从当前种群中提取差分信息并指导进一步地搜索, 不需要借助问题的特征信息, 具有较强的全局收敛能力和鲁棒性.

近年来, 混沌系统的控制与同步已经成为非线性科学中的重要方向之一, 并且已提出多种有效的控制与同步方法^[3-6], 这些方法一般在已知混沌系统精确参数的前提下提出. 但在实际应用中, 由于系统复杂性导致某些参数难以测量或确定, 或者出于某种特殊原因某些参数不可知. 这时, 要实现混沌系统的控制与同步, 必须首先估计出系统未知参数, 实际上, 参数估计是混沌控制与同步必须首先解决的课题, 具有更重要的现实意义.

文献 [7, 8] 通过最小化平均同步误差, 对一个给定的混沌动态系统进行了参数估计; 文献 [9] 引入了基于反馈的同步方法和自适应控制方法, 对若干混沌系统进行参数估计; 文献 [10] 和文献 [11, 12] 通过构造一个适当的适应度函数, 将混沌系统的参数估

计问题转化为一个优化问题, 分别利用遗传算法和微粒群算法进行参数寻优.

基于 DE 的全局寻优能力, 本文引进分布估计算法(estimation of distribution algorithm, EDA)的思想对 DE 进行改进, 提出了一种混合差分进化算法(hybrid differential evolution, HDE), 对典型的 Lorenz 混沌系统进行了参数估计, 仿真结果表明, 在无噪声和存在观测噪声的情况下, HDE 都能得到很好的参数估计结果, 同时给出和其他算法结果的比较.

2. 参数估计问题描述

考虑如下 n 维混沌系统:

$$\dot{X} = F(X, X_0, \theta_0), \quad (1)$$

其中, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$ 表示原系统的状态变量, X_0 表示系统初值, $\theta_0 = (\theta_{10}, \theta_{20}, \dots, \theta_{D0})^T$ 表示系统参数的真实值.

假设系统结构已知, 若要对原系统参数进行估计, 则估计系统可描述如下:

$$\dot{Y} = F(Y, X_0, \theta), \quad (2)$$

其中, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in R^n$ 表示估计系统的状态变量, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_D)^T$ 表示系统参数的估计值.

基于以上分析, 原来的参数估计问题可以转化为如下的优化问题:

* 国家自然科学基金(批准号: 60574072)和国家重点基础研究发展计划(973)项目(批准号: 2002CB3122002)资助的课题.

† E-mail: wangjunyan02@mails.tsinghua.edu.cn

$$\min_{\theta=\hat{\theta}} J = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \| X_k - Y_k \|^2, \quad (3)$$

其中, M 表示状态变量序列的长度, X_k 和 Y_k ($k=1, 2, \dots, M$) 分别表示混沌系统在其参数的真实值和估计值下演化时系统的状态变量序列. 显然, 上述混沌系统的参数估计问题是一个多维连续优化问题, 决策变量为 θ , 优化目标为最小化 J . 混沌系统的参数估计原理如图 1 所示.

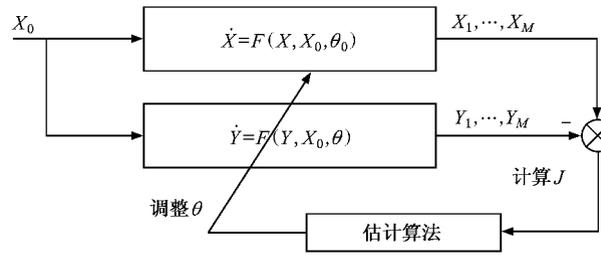


图 1 混沌系统参数估计原理图^[12]

由于混沌系统的不稳定性, 系统参数很难估计. 另外, 对于准则函数 J , 存在很多局部极值点, 所以上述问题用传统的优化算法难于得到全局最优解, 本文采用混合差分进化算法求解问题(3).

3. 混合差分进化算法

3.1. DE 算法

DE 是一种基于群体进化的算法, 通过种群内个体间的合作与竞争来实现对优化问题的求解^[21]. 算法的基本思想是: 设置每代种群的个体数为 N , 即种群规模, 每个个体维数为 D , 即优化问题的维数; 算法从当前种群提取搜索步长及方向信息, 并加上随机差分和交叉以提高种群多样性, 经过上述变异和交叉操作, 产生一个临时种群, 然后利用基于贪婪思想的选择操作对这两个种群进行一对一的选择, 从而产生新一代种群. 种群按上述方法不断进化, 直至满足算法的终止条件.

DE 算法的具体流程如下^[11].

算法 1 基本 DE 算法

步骤 1 在问题的解空间随机初始化种群 $x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0$, 其中每个个体维数为 D 维, 即 $x_i^0 = [x_{i,1}^0, x_{i,2}^0, \dots, x_{i,D}^0]$.

步骤 2 假设当前种群为第 k 代, 对于该种群每一个体 x_i^k ($1 \leq i \leq N$), 根据如下规则产生下一代

个体 x_i^{k+1} :

① **变异**: 在当前种群中随机选取 x_d^k , 使得 $f(x_d^k) \leq f(x_i^k)$, 其中 f 为目标函数, 随机选取 x_b^k 和 x_c^k , 使得 b, c 与 i 互不相同, 按(4)式生成对应的变异个体 v_i^k ,

$$v_i^k = (0.5 + F) \cdot x_d^k + (0.5 - F) \cdot x_i^k + F \cdot (x_b^k - x_c^k), \quad (4)$$

其中, F 为缩放比例因子, $-1 \leq F \leq 1$;

② **交叉**: 为了提高种群多样性, 按(5)式生成对应的试验个体 u_i^k ,

$$u_{i,j}^k = \begin{cases} v_{i,j}^k, & \text{rand}(j) \leq CR, \\ x_{i,j}^k, & \text{其他}, \end{cases} \quad (5)$$

其中, $1 \leq j \leq D$, $\text{rand}(j)$ 为 $[0, 1]$ 间均匀分布随机数, CR 为交叉概率 $0 \leq CR \leq 1$;

③ **选择**: 利用(6)式对试验个体 u_i^k 和原种群个体 x_i^k 的目标函数进行比较, 选择目标函数小的作为新种群的个体 x_i^{k+1} ,

$$x_i^{k+1} = \begin{cases} u_i^k, & f(u_i^k) < f(x_i^k), \\ x_i^k, & \text{其他}. \end{cases} \quad (6)$$

步骤 3 如果满足算法终止条件, 则算法停止, 否则, 返回步骤 2.

由上述算法流程可以看到, 变异个体 v_i^k 包含了三个部分的信息: 当前个体 x_i^k 、随机选择的更优个体 x_d^k 和随机选择的差分向量 $(x_b^k - x_c^k)$. 正如文献[1]中的分析, 差分向量的应用有如下优点: 首先, 差分向量分布的均值为零, 避免了采样偏差, 有利于保持种群的多样性; 其次, 差分向量分布的标准差随着种群的大小和结构的变化而变化, 使得算法能够适应参数范围大和敏感性强的情况; 最后, 由于差分向量随着种群进化趋近于零, 这就保证了算法有很好的局部搜索能力.

由于保持多样性的机制和局部搜索的能力, DE 的性能一般比其他进化算法优越. 但是, DE 并没有直接利用全局信息的机理来指导种群向更好的区域进化, 下面我们将差分进化算法和其他优化算法混合来提高算法的性能.

3.2. EDA 算法

EDA 的基本思想是使用概率的方法描述和表示每一代种群, 每个个体可以看作一个随机向量, 利用随机向量的分布可以紧凑和整体地表示一代种群^[13]. EDA 的基本算法框架如下.

算法 2 基本 EDA 算法

步骤 1 初始化种群,并对个体估值;

步骤 2 从当前种群中选择个体,根据所选个体估计种群分布;

步骤 3 根据上步估计出的分布进行采样,构成新一代种群,并对每一新个体估值;

步骤 4 如果满足算法终止条件,则算法停止,否则,返回步骤 2.

EDA 的一个关键步骤是怎样从当前种群信息建立随机向量概率分布模型,本文采用混合高斯分布模型,并假设个体向量的 D 维分量是互相独立的,由第 k 代种群得到的个体向量联合概率密度函数可以表示如下:

$$p(\mathbf{x}^k) = \prod_{j=1}^D p(x_j^k), \quad (7)$$

其中,第 j 个分量的边缘概率密度函数

$$p(x_j^k) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot \mathcal{N}(\mu_{i,j}^k, \sigma_{i,j}^k), \quad (8)$$

其中, α_i 为混合高斯分布的加权系数, $\mathcal{N}(\mu_{i,j}^k, \sigma_{i,j}^k)$ 表示当前种群第 i 个个体的第 j 个分量服从均值为 $\mu_{i,j}^k$, 标准差为 $\sigma_{i,j}^k$ 的高斯分布. 均值和标准差可以作如下估计:

$$\hat{\mu}_{i,j}^k = x_{i,j}^k, \quad (9)$$

$$\hat{\sigma}_{i,j}^k = \hat{\sigma}_j^k = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(x_{i,j}^k - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{i,j}^k \right)^2}. \quad (10)$$

为了使优良个体附近的采样概率更高,但仍以一定概率在较差个体附近采样,可以按模拟退火的机理确定各加权系数

$$\alpha_i = \frac{e^{-[f(x_i^k) - f_{\min}] / t}}{\sum_{i=1}^N e^{-[f(x_i^k) - f_{\min}] / t}}, \quad (11)$$

其中, f_{\min} 表示到当前为止的最优目标函数值, t 为温度,当 $f(x_i^k)$ 越小,则权值 α_i 越大. 随着温度 t 的下降,在最优个体附近的采样概率趋近于 1,这就保证了算法的收敛性. 本文算法中,初温 $t_0 = -f_{\min}^0 / \ln(0.2)$, 其中 f_{\min}^0 为初始种群最优目标值. 温度更新函数采用指数退温,即 $t^{k+1} = \lambda \cdot t^k$, 其中 $\lambda = 0.98$.

3.3. HDE 算法

进化算法的关键是如何从当前种群产生下一代种群,如前所述,DE 算法产生下一代种群的方法包括变异、交叉和选择三个步骤. 受 EDA 的启发,即利用当前种群建立概率模型并从中采样产生下一代

种群,可以指导种群向更好的区域进化,本文将 EDA 的机理融合到 DE 算法中,这样可以使算法在解空间进行更有效地搜索. 因为新的算法仍以 DE 为主框架,故称之为混合差分进化算法. HDE 产生下一代种群的步骤如下.

算法 3 HDE 种群更新方法

步骤 1 按如下方法从当前种群产生试验个体 $u_i^k (1 \leq i \leq N)$:

$$u_{i,j}^k = \begin{cases} (0.5 + F) \cdot x_{d,j}^k + (0.5 - F) \cdot x_{i,j}^k \\ \quad + F \cdot (x_{b,j}^k - x_{c,j}^k), \text{rand}(j) \leq \delta, \\ \text{构造 } p(x_j^k) \text{ 并从中采样,其他,} \end{cases} \quad (12)$$

其中, δ 为控制参数 $0 \leq \delta \leq 1$;

步骤 2 按(6)式对试验个体和原个体进行选择操作,产生新种群个体 x_i^{k+1} .

HDE 算法产生的试验个体 u_i^k ,一部分由 DE 的变异操作产生,其余部分从当前种群建立的概率模型采样产生,这样就融合了当前种群的差分信息和整体统计信息. 控制参数 δ 用来平衡这两种信息的贡献大小.

将上述 HDE 种群更新方法代替 DE 中的步骤 2 即可得到完整的 HDE 算法. HDE 的算法具体流程如下.

算法 4 HDE 算法

步骤 1 在问题的解空间随机生成 N 个个体 $x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0$ 作为初始种群,其中每个个体维数为 D 维;

步骤 2 假设当前种群为第 k 代,对于该种群每一个体 $x_i^k (1 \leq i \leq N)$ 按照上述 HDE 种群更新方法产生下一代个体 x_i^{k+1} ;

步骤 3 如果满足算法终止条件(本文为达到最大进化代数),则算法停止,否则,返回步骤 2.

由上述算法流程可以看出,HDE 算法的参数共有三个:种群大小 N ,缩放比例因子 F 和控制参数 δ . 与基本 DE 算法相比,HDE 算法只在构造概率模型时计算量稍有增加,但另一方面,EDA 思想的引入使得算法搜索的过程能够综合利用差分信息和整体统计信息,提高了算法的有效性.

4. 仿真结果及分析

本文以典型的 Lorenz 混沌系统为例,说明利用混合差分进化算法对混沌系统的未知参数进行估计

的过程. Lorenz 系统由如下的状态方程表示:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma \cdot (y - x), \\ \dot{y} = \gamma \cdot x - x \cdot z - y, \\ \dot{z} = x \cdot y - b \cdot z, \end{cases} \quad (13)$$

其中 x, y, z 为系统的状态变量, $\sigma = 10, \gamma = 28, b = 8/3$ 为系统参数的真实值. 数值仿真中采用四阶龙格-库塔算法求解, 步长 $h = 0.01$. 仿真过程中, 先让 Lorenz 系统自由演化, 在经历过暂态过程之后任意选取一点作为系统初值, 并以此为零时刻, 分别在参数的真实值和估计值下计算连续 M 个状态变量

值, 取 $M = 300$.

由于 HDE 算法的性能很好, 本文直接给出三个参数均为未知时的参数估计结果. 在 HDE 算法中, 最大进化代数设为 100 (即算法终止条件), 种群大小 $N = 60$, 缩放比例因子 $F = 0.6$, 控制参数 $\delta = 0.9$, 各待估参数的搜索范围设置如下 $9 \leq \sigma \leq 11, 20 \leq \gamma \leq 30$ 和 $2 \leq b \leq 3$. 将 HDE 算法独立运行 20 次, 列出平均结果、最好结果和最差结果的统计信息, 并与文献 [12] 中 PSO 和文献 [10] 中 GA 的估计结果进行比较, 各算法估计结果如表 1 所示.

表 1 各算法的参数估计结果统计信息

	平均结果			最好结果			最差结果		
	HDE	PSO	GA	HDE	PSO	GA	HDE	PSO	GA
σ	10.0000	10.0184	10.1398	10.0000	9.99533	10.0672	10.0002	10.6082	10.9290
γ	28.0000	27.9934	27.7427	28.0000	28.0071	27.9221	27.9999	27.7044	26.1276
b	2.66667	2.66628	2.64859	2.66667	2.66701	2.66343	2.66666	2.65723	2.56205
J	$3.90e-6$	$4.18e+0$	$9.44e+2$	$1.66e-8$	$4.86e-2$	$4.31e+0$	$4.95e-5$	$3.94e+1$	$6.46e+3$

注 1 参数估计值取六位有效数字, 目标函数值取三位有效数字. 注 2 文献中 PSO 和 GA 的种群大小为 120, 待估参数范围相同.

从表 1 可以看出, HDE 的参数估计结果和真实值非常接近, 并且在六位有效数字的情况下和真实值相等; 与 PSO 和 GA 的相比, HDE 的最差结果仍比 PSO 和 GA 的最好结果要好. 以上分析表明, HDE 算法具有非常好的搜索性能和鲁棒性.

为了检验 HDE 的搜索效率, 图 2 和图 3 分别给出了一个典型的目标函数和估计参数的进化收敛过程. 图 2 表明了目标函数 J 迅速减小到零, 图 3 表明了估计参数 σ, γ 和 b 迅速收敛到系统参数的真实值, 两者都显示了 HDE 能够迅速收敛到全局最优解.

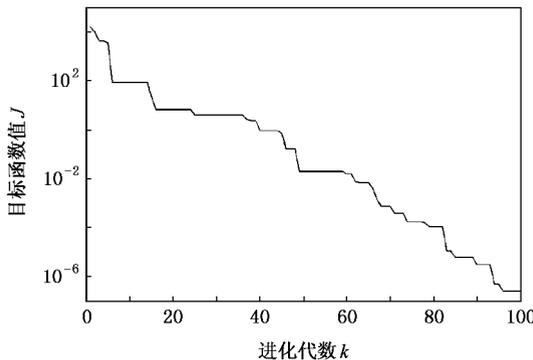


图 2 目标函数值进化曲线

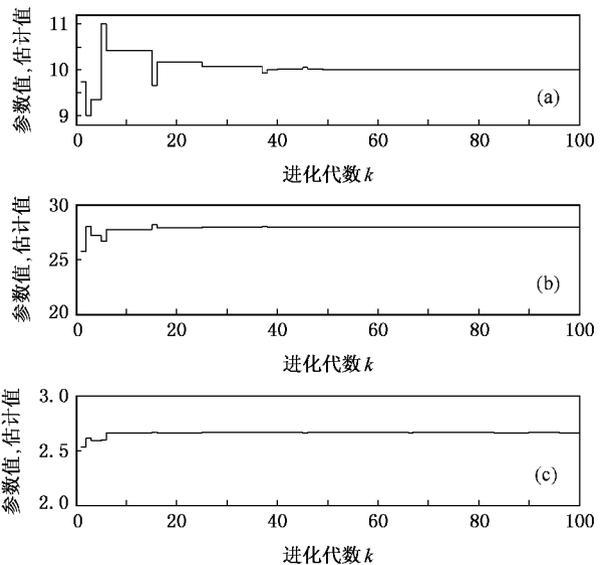


图 3 估计参数值进化曲线

噪声对参数估计结果的影响, 将系统的状态变量 (x, y, z) 叠加上 $[-0.1, 0.1]$ 的白噪声. 表 2 给出了存在观测噪声的情况下, 利用 HDE 算法对 Lorenz 混沌系统进行参数估计的结果.

从表 2 结果可以看出, 在存在观测噪声的情况下, HDE 算法仍然可以对 Lorenz 混沌系统进行很好的参数估计, 体现了 HDE 算法良好的鲁棒性.

为了进一步检验算法的性能, 考虑实际应用中

表 2 存在观测噪声时 HDE 的参数估计结果

	平均结果	最好结果	最差结果
σ	9.99591	9.99869	9.98041
γ	28.0017	27.9999	28.0098
b	2.66666	2.66667	2.66634
J	$2.74e+0$	$2.67e+0$	$2.80e+0$

5. 结 论

本文将混沌系统的参数估计问题转化为一个多

维优化问题,提出一种新的 HDE 算法对优化问题进行求解,并以典型的 Lorenz 混沌系统为例进行了数值仿真,结果表明,利用 HDE 算法可以得到很好的参数估计结果,显示了该算法的有效性和鲁棒性.需要指出的是,本文的数值仿真中假设已知待估参数的大致取值范围.然而,即使没有任何先验知识的情况下,也可以使用 HDE 算法先在较大的范围内搜索,然后根据初步结果逐步缩小搜索范围,直至最优解满足精度要求为止.

- [1] Storn R , Price K 1997 *Journal of Global Optimization* **11** 341
- [2] Liu B , Wang L , Jin Y H 2007 *Control and Decision* **22** 721 (in Chinese)[刘 波、王 凌、金以慧 2007 控制与决策 **22** 721]
- [3] Li L X , Peng H P , Lu H B , Guan X P 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 629 (in Chinese)[李丽香、彭海朋、卢辉斌、关新平 2001 物理学报 **50** 629]
- [4] Tao C H , Lu J A , Lü J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1497 (in Chinese)[陶朝海、陆君安、吕金虎 2002 物理学报 **51** 1497]
- [5] Liu F C , Liang X M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4584 (in Chinese) [刘福才、梁晓明 2005 物理学报 **54** 4584]
- [6] Wu Z Q , Tan F X , Wang S X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1651 (in Chinese)[吴忠强、谭拂晓、王绍仙 2006 物理学报 **55** 1651]
- [7] Parlitz U , Junge L 1996 *Phys. Rev. E* **54** 6253
- [8] Parlitz U 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1232
- [9] Maybhate A , Amritkar R E 1999 *Phys. Rev. E* **59** 284
- [10] Dai D , Ma X K , Li F C , You Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2459 (in Chinese)[戴 栋、马西奎、李富才、尤 勇 2002 物理学报 **51** 2459]
- [11] Gao F , Tong H Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 577 (in Chinese)[高 飞、童恒庆 2006 物理学报 **55** 577]
- [12] He Q , Wang L , Liu B 2007 *Chaos Solitons & Fractals* **34** 654
- [13] Yan P F , Zhang C S 2005 *Artificial Neural Networks and Evolutionary Computing* (Beijing : Tsinghua University Press & Springer Press) p610 (in Chinese)[阎平凡、张长水 2005 人工神经网络与模拟进化计算 (北京 : 清华大学出版社、施普林格出版社) 第 610 页]

Parameter estimation for chaotic systems based on hybrid differential evolution algorithm^{*}

Wang Jun-Yan[†] Huang De-Xian

(*Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China*)

(Received 17 July 2007 ; revised manuscript received 28 August 2007)

Abstract

Parameter estimation for chaotic systems is one of the important issues in chaotic control and synchronization. Through establishing an appropriate fitness function, the parameter estimation problem is formulated as a multi-dimensional functional optimization problem, which can be solved by using hybrid differential evolution (HDE) algorithm. A numerical simulation on the Lorenz system is conducted and the results demonstrate the effectiveness and robustness of the proposed algorithm, which is shown to be an effective method of parameter estimation for chaotic systems.

Keywords : chaotic system, parameter estimation, hybrid differential evolution algorithm

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60574072) and the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2002CB3122002).

[†] E-mail : wangjunyan02@mails.tsinghua.edu.cn