第 57 卷 第 5 期 2008 年 5 月
1000-3290/2008/57(05)/2770-09

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57,No.5,May,2008

开关变换器倍周期分岔精细层次结构及其普适常数研究*

杨 汝[1)] 张 波[2)] 褚利丽[2)]

1)(广州大学物理与电子工程学院,广州 510400)

2)(华南理工大学电力学院,广州 510640)

(2007 年 7 月 27 日收到;2007 年 9 月 25 日收到修改稿)

讨论了开关变换器倍周期分岔级联的精细层次结构和标度不变性.数值仿真得到一维、二维开关变换器倍周期分岔及混沌带合并序列的普适常数.系统谱结构可以进一步判断解的性态,显示解的结构,同时开关变换器混沌层次结构的尺度差别也反映在谱结构的精细特征上.最后实验研究了开关变换器倍周期分岔通向混沌的过程,验证了数值仿真的结论.

关键词:开关变换器,倍周期分岔,普适常数,标度不变性

PACC:0545

1. 引 言

分岔是非线性问题中普遍存在的复杂结构,非线性科学工作者在离散映射中观察到了复杂的分岔结构,认识了分岔现象中存在的普适规律和标度不变性等问题.对于由非线性微分方程描述的实际物理系统,也观察到了分岔和混沌等复杂动力学行为,得到一些全局性的结论[1—7].

近年来,开关变换器具有分岔混沌的复杂行为已被人们广泛认识和接受[8—12].但是目前的研究还是局限于数值仿真和实验,机理的分析停留在应用雅可比矩阵做稳定性分析[13—16]方面,缺乏从非线性动力学的角度深刻认识开关变换器中混沌吸引子的丰富内涵以及有关的严格证明.

本文在开关变换器中讨论了主倍周期分岔和倍周期分岔级联的精细层次结构及标度不变性,数值仿真得到一维、二维开关变换器动力系统分岔混沌和混沌带合并序列的普适常数.数值仿真显示开关变换器倍周期分岔的谱结构,并可以此判断稳态解的性态,区分周期轨道,混沌轨道,以及区分嵌套在混沌带中的周期解,有助于了解开关变换器倍周期分岔级联的精细结构.

最后实验研究了开关变换器倍周期分岔通向混沌的过程.开关变换器分岔混沌的探索从仿真和实验现象的定性研究转入非线性动力学本质的定量研究.

2. 开关变换器倍周期分岔现象及其普适常数

2.1. 一维动力系统

满足如下条件的开关变换器离散迭代映射视为一维动力系统[17]:1)负载是恒压源;2)不带输出电容或输出电容值足够大;3)变换器处于不连续导通模式.Boost 变换器电压模式控制的一维动力系统如图 1 所示.以反馈系数 k 为参数得到 Lyapunov 指数图和输出电容电压的分岔图分别如图 2,3 所示.Matlab 数值仿真参数:

$$V_{\rm in} = 16{\rm V}, V_0 = 25{\rm V}, D = 0.2874,$$

$$L = 208\ \mu{\rm H}, C = 222\ \mu{\rm F}, R = 12.5\ \Omega.$$

分岔图 2 显示了随着反馈系数由 0.07 至 0.137 变化,系统的主倍周期分岔、混沌带合并及嵌套在混沌窗口中的倍周期分岔过程.将图 2(a)中圆圈所示部分放大,得到图 2(b),图 2(c)和图 2(d).它们有图

* 国家自然科学基金(批准号:60474066,50777009),广东省自然科学基金重点项目(批准号:05103540)和广州市属高校科技项目(批准号:62053)资助的课题.

2(a)相同的精细结构，即在 Boost 变换器混沌区中存在无穷多的自相似结构，圆圈的精细结构和图 2(a)一样都包含从左到右的倍周期分岔序列和从右到左的混沌带反序列.

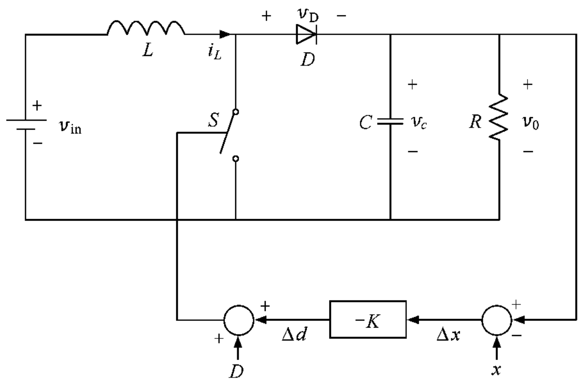


图 1　电压模式控制的 Boost 变换器

2.1.1. 倍周期分岔序列

图 2(a) Boost 变换器从左到右包含主倍周期分岔序列：周期 1，周期 2，周期 4，周期 8，周期 16，然后由准周期振荡进入混沌. 根据倍周期分岔定理[18] 得到 Boost 变换器倍周期分岔临界条件：

1)在(k, x)平面中存在一个不动点

$$f(k, x^*) = x^*;$$

2)在不动点处稳定性条件达到边界值，即

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} f(k, x)\right| = 1;$$

3)在此不动点处二阶导数

$$\frac{\partial^2}{\partial k \partial x} f^2(k, x^*) \neq 0;$$

4)在此不动点处，函数 f 的施瓦茨导数

$$S(f, x) \equiv \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 < 0.$$

其中 f 为 Boost 变换器的离散迭代映射，k 为分岔参数. Boost 变换器一维离散系统倍周期分岔参数图如图 4 所示，d 表示分岔后两分支的间距.

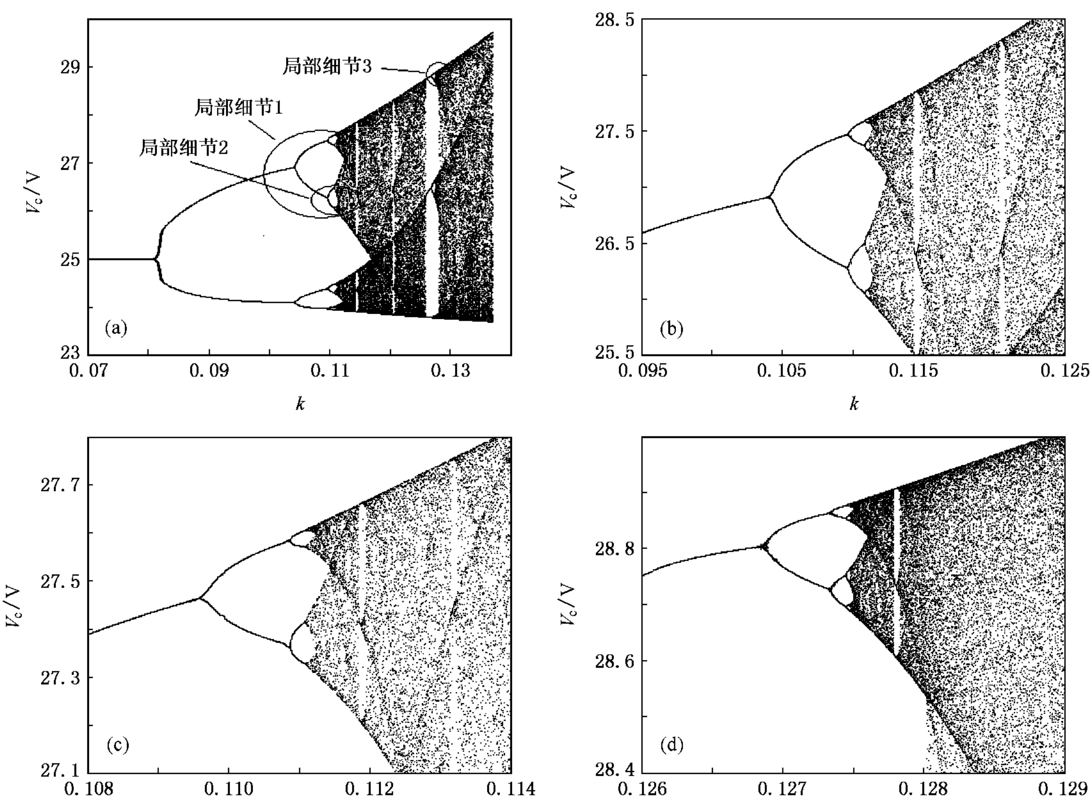


图 2　以 k 为参数的 Boost 变换器分岔图　(a) Boost 变换器分岔图；(b)局部细节 1；(c)局部细节 2；(d)局部细节 3

根据倍周期分岔序列临界条件，可以求得各分岔点反馈系数 k 的取值，见表 1 第三列. 计算反馈系数 k 的边界值间距 Δk，很明显边界值间距 Δk 随分岔序列 n 的增大而减小. 为了得到 Δk 的变化特征，进一步计算边界值间距 Δk 的变化率 δ_n，如表 1 第五列所示.

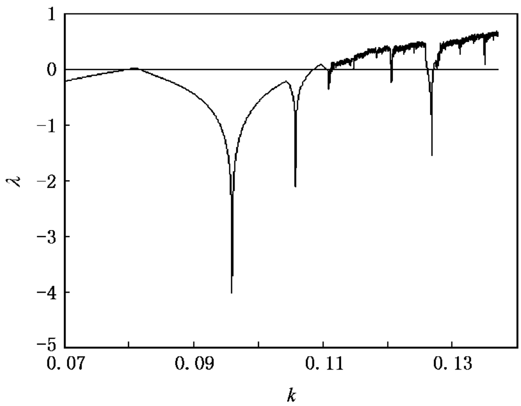


图 3 以 k 为参数的 Boost 变换器 Lyapunov 指数

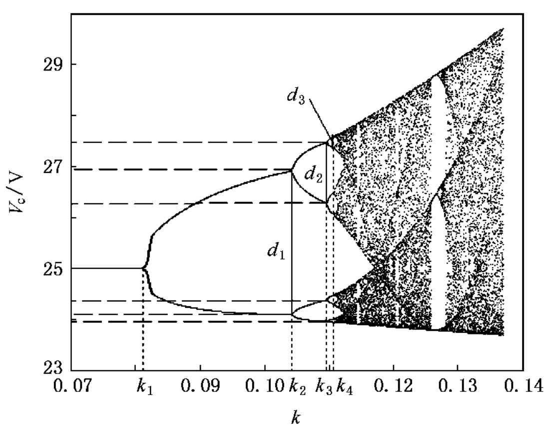


图 4 Boost 变换器一维离散系统倍周期分岔参数图

令 $$\delta_n = \frac{k_n - k_{n-1}}{k_{n+1} - k_n} = \frac{\Delta k_{n-1}}{\Delta k_n}, n = 2,3,4,\cdots \quad (1)$$

图 2 显示在开关变换器倍周期分岔级联过程中，各次级分岔形式上都是上一次分岔的重复，只是分岔间距 d（2^n 周期的振幅）越来越小，最后趋于零. 进一步计算分岔间距 d 的变化率 a_n 如表 1 第六列.

令 $$a_n = \frac{d_n}{d_{n-1}}, n = 2,3,4,\cdots \quad (2)$$

表 1 Boost 变换器一维离散系统主倍周期分岔点参数

n	周期 $2^n p$	边界值 k_n	分岔间距 d_n	收敛速率 δ_n	α_n
1	$2P$	0.08022	2.8	4.3144	2.389
2	$4P$	0.10368	1.172	3.9071	2.6636
3	$8P$	0.10942	0.44		
4	$16P$	0.11082			
	…	…		…	

表 1 显示边界值间距 Δk，分岔间距 d 的变化率收敛.

为了得到普适规律，进一步计算图 2 Boost 变换器局部细节倍周期分岔序列各分频周期解的边界值 k_n，分岔间距 d，及收敛速率 δ_n，α_n 如表 2，3，4 所示.

表 2 Boost 变换器局部细节 1 倍周期分岔点参数

n	周期 $2^n p$	边界值 k_n	分岔间距 d_n	收敛速率 δ_n	α_n
1	$2P$	0.10368	1.168	4.11510	2.8280
2	$4P$	0.1094	0.413	4.79310	2.4438
3	$8P$	0.11079	0.169		
4	$16P$	0.11108			
	…	…		…	

表 3 Boost 变换器局部细节 2 倍周期分岔点参数

n	周期 $2^n p$	边界值 k_n	分岔间距 d_n	收敛速率 δ_n	α_n
1	$2P$	0.10925	0.414	4.1429	2.5714
2	$4P$	0.1107	0.161	4.375	2.7759
3	$8P$	0.11105	0.058		
4	$16P$	0.11113			
	…	…		…	

表 4 Boost 变换器局部细节 3 倍周期分岔点参数

n	周期 $2^n p$	边界值 k_n	分岔间距 d_n	收敛速率 δ_n	α_n
1	$2P$	0.12679	0.134	4.41666	2.52830
2	$4P$	0.12732	0.053	4	2.94444
3	$8P$	0.12744	0.018		
4	$16P$	0.12747			
	…	…		…	

表 1—4 显示了开关变换器主倍周期分岔序列和嵌套在混沌带中的倍周期分岔序列的分岔参数及其特征. 其中主要分岔参数——边界值间距和分岔间距的收敛速率分别在 4—5 之间，和 2—3 之间，与 Feigenbaum 普适常数（4.669 和 2.5029）基本一致.

2.1.2. 混沌带合并序列

开关变换器混沌区以与周期区相反的方向从右到左分为 2^m 个带，分别称为 1 Ⅰ（1 带混沌），2 Ⅰ（2 带混沌），4 Ⅰ（4 带混沌），…，2^m Ⅰ（2^m 带混沌），如图 5 所示.

数值仿真得到 Boost 变换器混沌带分岔参数及其特征如表 5 所示.

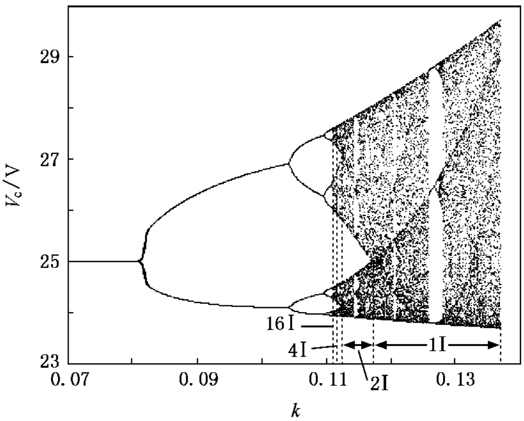


图 5　Boost 变换器混沌带分岔参数图

表 5　Boost 变换器混沌带分岔点参数

n	混沌带 2^n Ⅰ	边界值 k_n	收敛速率 δ_n
1	2Ⅰ	0.1795	4.0472
2	4Ⅰ	0.1281	3.4324
3	8Ⅰ	0.1154	
4	16Ⅰ	0.1117	
	…	…	…

结果表明 Boost 变换器混沌带自右向左倒分岔序列的收敛速率和倍周期分岔自左向右分岔的收敛速率基本一致.说明由非线性微分方程描述的开关变换器也存在非线性工作者在离散非线性系统中发现的某些普适规律,证明了普适常数在开关变换器中的存在性.

2.2. 二维动力系统

当开关变换器工作在连续导通模式,且输出电容不能忽略时为二维动力系统[17].Boost 变换器电流模式控制的二维离散动力系统如图 6 所示.选择输出电容上的输出电压及电感上的电流为状态向量 $[v_C \quad i_L]^{\mathrm{T}}$, Boost 变换器开关闭合即模态 1 的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{RC} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} V_{\mathrm{in}}. \tag{3}$$

Boost 变换器开关打开即模态 2 状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{RC} & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} V_{\mathrm{in}}. \tag{4}$$

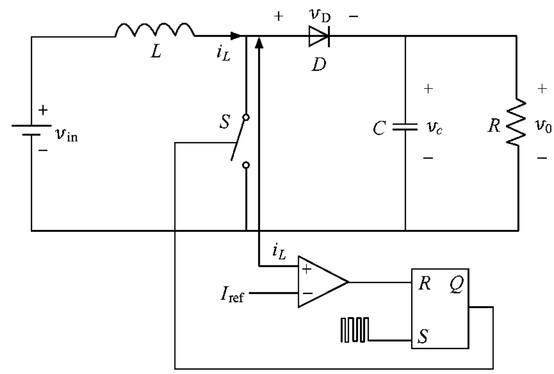


图 6　Boost 变换器电流模式控制的示意图

以参考电流 I_{ref} 为参数得到电感电流分岔图如图 7 所示.Matlab 数值仿真参数 $L = 1$ mH, $C = 12$ μF, $R = 20$ Ω, $V_{\mathrm{in}} = 10$ V, $T_C = 100$ μS.

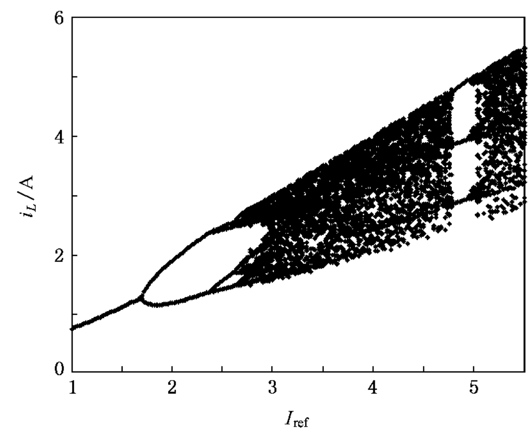


图 7　以 I_{ref} 为参数的 Boost 变换器分岔图

为了进一步分析开关变换器倍周期分岔精细层次结构及其普适常数,数值仿真得到 Boost 变换器二维动力系统分岔参数及数值特征如表 6 所示.

表 6　Boost 变换器二维系统主倍周期分岔点参数

n	周期 $2^n p$	边界值 k_n	分岔间距 d_n	收敛速率 δ_n	α_n
1	$2P$	1.62	0.9709	4.2222	3.2156
2	$4P$	2.38	0.3019	4.5	2.5242
3	$8P$	2.56	0.1196		
4	$16P$	2.6			
	…	…		…	
	∞				

可见二维动力系统分岔点收敛速率的数值范围和一维系统类似,也存在普适常数.因此无论是一维

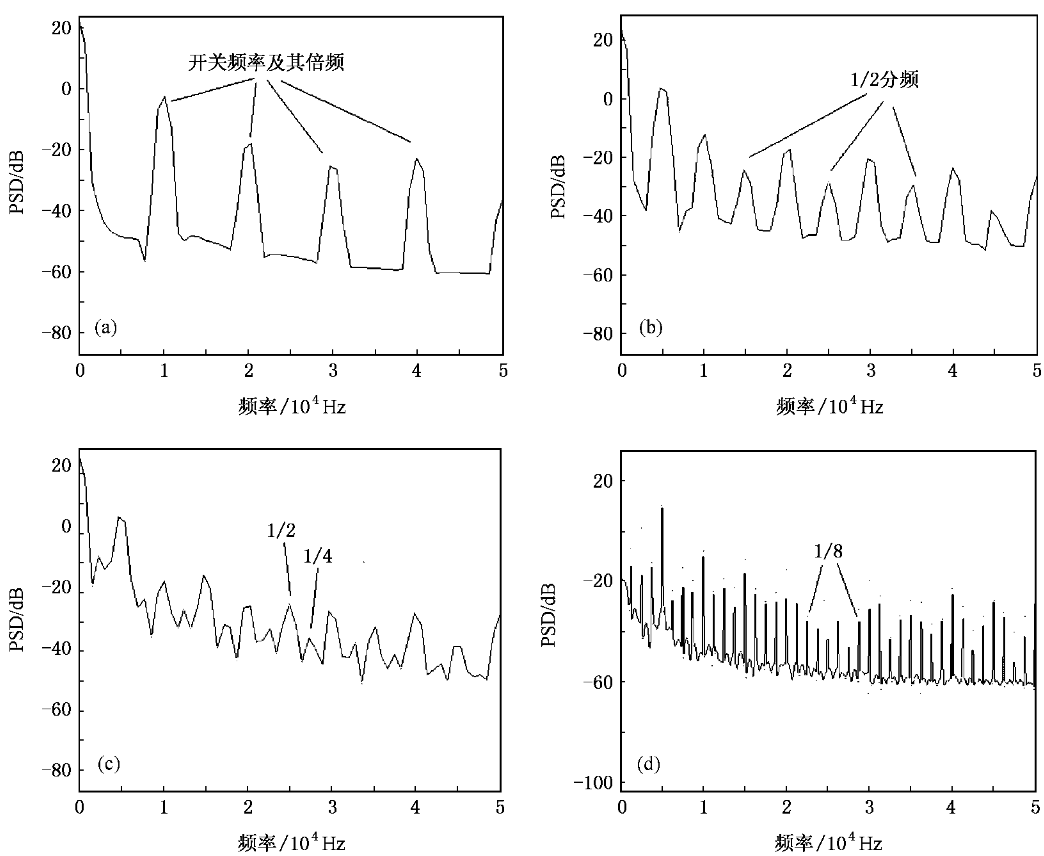
还是二维开关变换器系统,无论是主倍周期分岔,局部级联分岔,还是混沌带反序列,虽然分岔点的边界值和分岔间距千差万别,但是其收敛速率却有一致的规律,即开关变换器倍周期分岔的普适常数.

2.3. 开关变换器倍周期分岔谱结构

快速 Fourier 变换(FFT)进行频谱分析是研究开关变换器倍周期分岔的重要手段.图 6 Boost 变换器电流模式控制的二维离散动力系统的谱结构如图 8 所示,开关频率为 10 kHz.

$I_{ref}=1.5A$ 时对应周期 1,功率谱尖峰分布在开关频率及其倍频处(图 8(a));$I_{ref}=2A$ 时对应周期 2,功率谱在一个开关倍频内出现了 1/2 分频(图 8(b));$I_{ref}=2.56A$ 时对应周期 4,功率谱的精细结构为 $2\times 2I$,在 20 kHz—30 kHz 的一个开关倍频内 2 分频后再 2 分频(图 8(c));$I_{ref}=2.68A$ 时对应周期 8,功率谱在 20 kHz–30 kHz 的一个开关倍频内 8 分频(图 8(d));$I_{ref}=2.81A$ 时对应准周期,频谱由基频及无理数倍频构成,开关变换器由周期轨道向混沌过渡,这个过渡过程的频谱呈现某些分频点的过渡宽峰(图 8(e));$I_{ref}=3A$ 时对应混沌,在频谱中出现连续的噪声背景和宽峰,和周期轨道相比,混沌时连续频谱的幅值提升了,并且在开关频率处叠加有尖峰,即叠加有周期轨道,这也体现了混沌频谱和噪声频谱的区别之处(图 8(f));$I_{ref}=4.85A$ 时嵌套在 3 Ⅰ 混沌带中的周期 3,根据 Li-York 意义下的混沌定义,周期 3 的出现预示混沌的出现[19],3 Ⅰ 混沌带中的谱结构相当于在噪声背景上叠加了 $3P$ 谱线,这除了说明周期解与混沌解的区别,还进一步验证了混沌解分布在 3 个集中的区域上(图 8(g));$I_{ref}=4.96A$ 时嵌套在 3 Ⅰ 混沌带中的周期 6,功率谱的精细结构为 3×2,在一个开关倍频期内 3 分频后再 2 分频(图 8(h)).

图 8 说明开关变换器混沌层次结构的尺度差别也反映在功率谱的精细结构上.由开关变换器倍周期分岔谱结构可以判断稳态解的性态,显示解的精细结构,区别周期轨道和混沌轨道,还有助于区分嵌套在不同混沌带中的周期轨道,有助了解开关变换器倍周期分岔层次的精细结构.



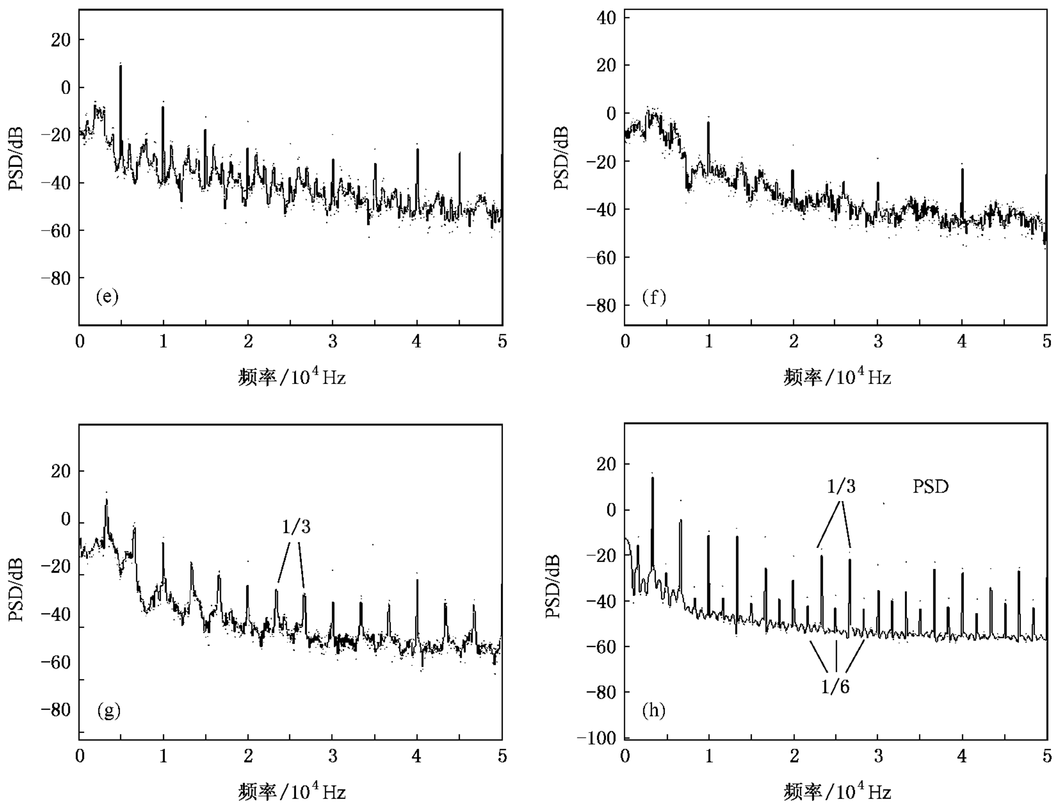


图 8　Boost 变换器频谱结构　(a) $1T$ 频谱($I_{ref}=1.5$A)；(b) $2T$ 频谱($I_{ref}=2$A)；(c) $4T$ 频谱($I_{ref}=2.56$A)；(d) $8T$ 频谱($I_{ref}=2.68$A)；(e)准周期频谱($I_{ref}=2.81$A)；(f) 混沌频谱($I_{ref}=3$A)；(g) $3T$ 频谱($I_{ref}=4.85$A)；(h) $6T$ 频谱($I_{ref}=4.96$A)

2.4. DC-DC 变换器倍周期分岔的标度不变性[17—19]

Boost 变换器分岔图的局部细节显示 n 次分岔的分岔点邻域内形状相似，只是比例缩小到 $1/\alpha$，这意味着 Boost 变换器离散迭代序列 $(-\alpha)^n f(2^n, k_{n+1}, v_c/(-\alpha)^n)$ 在分岔点 v_c^* 附近将趋于一个共同的极限函数 $g_1(v_c)$

$$\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n f\left[2^n, k^*_{n+1}, \frac{v_c}{(-\alpha)^n}\right] = g_1(v_c). \quad (5)$$

(5)式只是标度改变了一个因子 $(-\alpha)^n$，因此极限函数 $g_1(c_v)$ 具有普适性.

令

$$\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n f\left[2^n, k^*_{n+i}, \frac{v_c}{(-\alpha)^n}\right] = g_i(v_c), \quad (6)$$

有

$$\begin{aligned} g_{i-1}(v_c) &= \lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n f\left[2^n, k^*_{k+i-1}, \frac{v_c}{(-\alpha)^n}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}(-\alpha)(-\alpha)^{n-1} f\left[2^{n-1+1}, k^*_{n+i-1}, \frac{v_c}{(-\alpha)(-\alpha)^{n-1}}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}(-\alpha)(-\alpha)^m f\left\{\begin{array}{l} 2^m, \\ k^*_{m+i}, \frac{v_c}{(-\alpha)^m}(-\alpha)^m F\left[2^m, k^*_{m+i}, \frac{1}{-\alpha}\cdot\frac{v_c}{(-\alpha)^m}\right] \end{array}\right. \\ &= -\alpha g_i\left[g_i\left(-\frac{v_c}{\alpha}\right)\right]. \end{aligned} \quad (7)$$

上式可以用标度变换或算子 T 表示为

$$g_{i-1}(v_c) = -\alpha g_i\left[g_i\left(-\frac{v_c}{\alpha}\right)\right] = Tg_i(v_c). \quad (8)$$

再定义 g_i 的极限函数

$$\begin{aligned} g(v_c) &= \lim_{i\to\infty} g_i(v_c) \\ &= \lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n f[2^n, k_\infty, v_c/(-\alpha)^n], \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} g(v_c) &= Tg(v_c) \\ &= -\alpha g\left[g\left(\frac{v_c}{-\alpha}\right)\right], \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $g(v_c)$ 具有标度不变性，从而常数 α 也具有普适性.

3. 倍周期分岔通向混沌的实验波形

Boost 变换器倍周期分岔通向混沌的实验电路如图 9 所示. 其中开关管为 IRF530，$V_{in} = 18$ V，$V_{OUT} = 30$ V，$L = 500$ mH，$C = 10$ μF，$f = 50$ kHz，控制电路采用电流控制型脉宽调制芯片 UC3842 来完成.

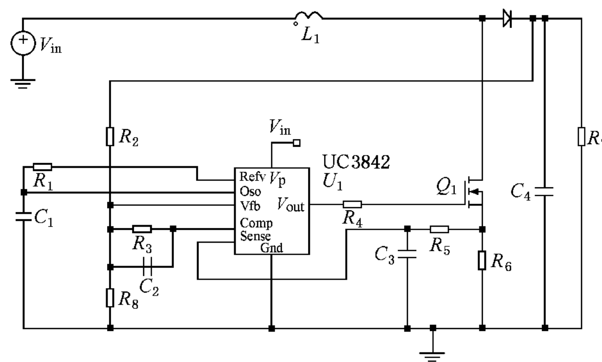
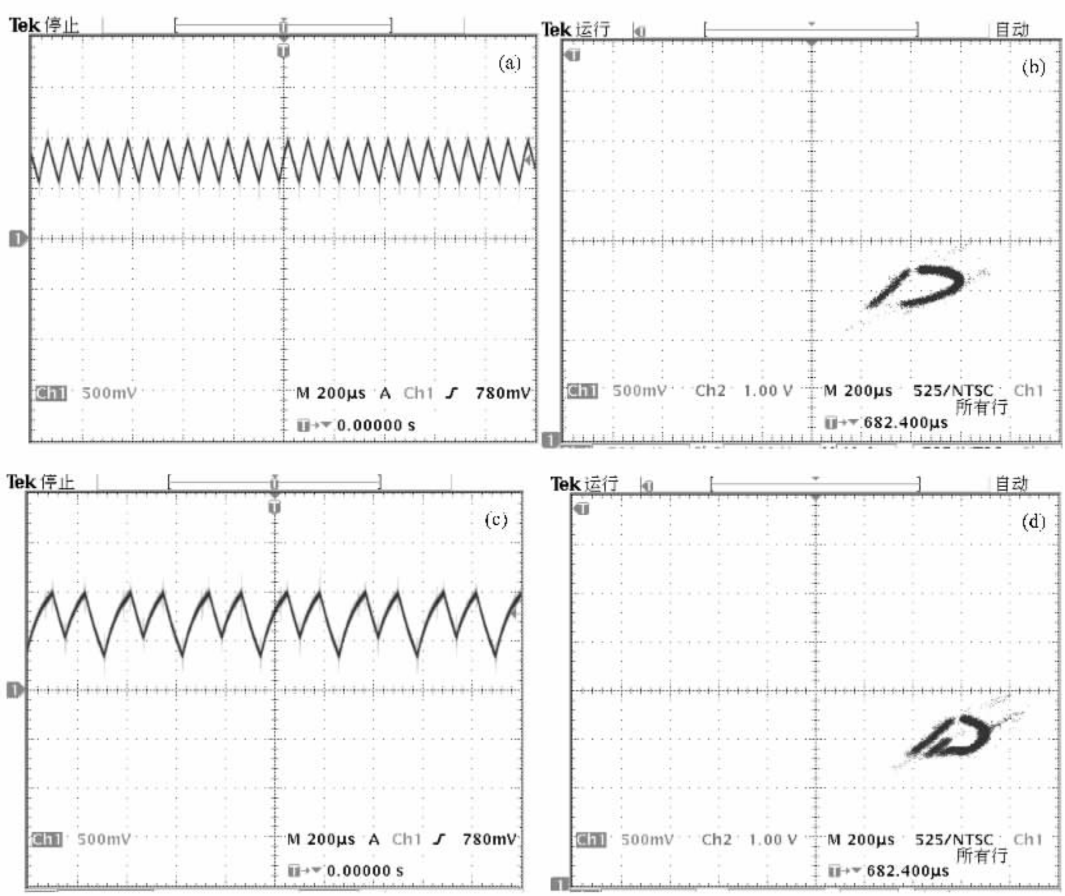


图 9 Boost 变换器倍周期分岔实验原理图

改变电压反馈系数分别为 0.0833，0.0767，0.07，0.06 得到周期 1，周期 2，周期 4 和混沌的实验波形如图 10 所示，图 10(a)，(c)，(e)，(g)所示为电容电压的波形图，图 10(b)，(d)，(f)，(h)所示为电容电压和电感电流的相图.



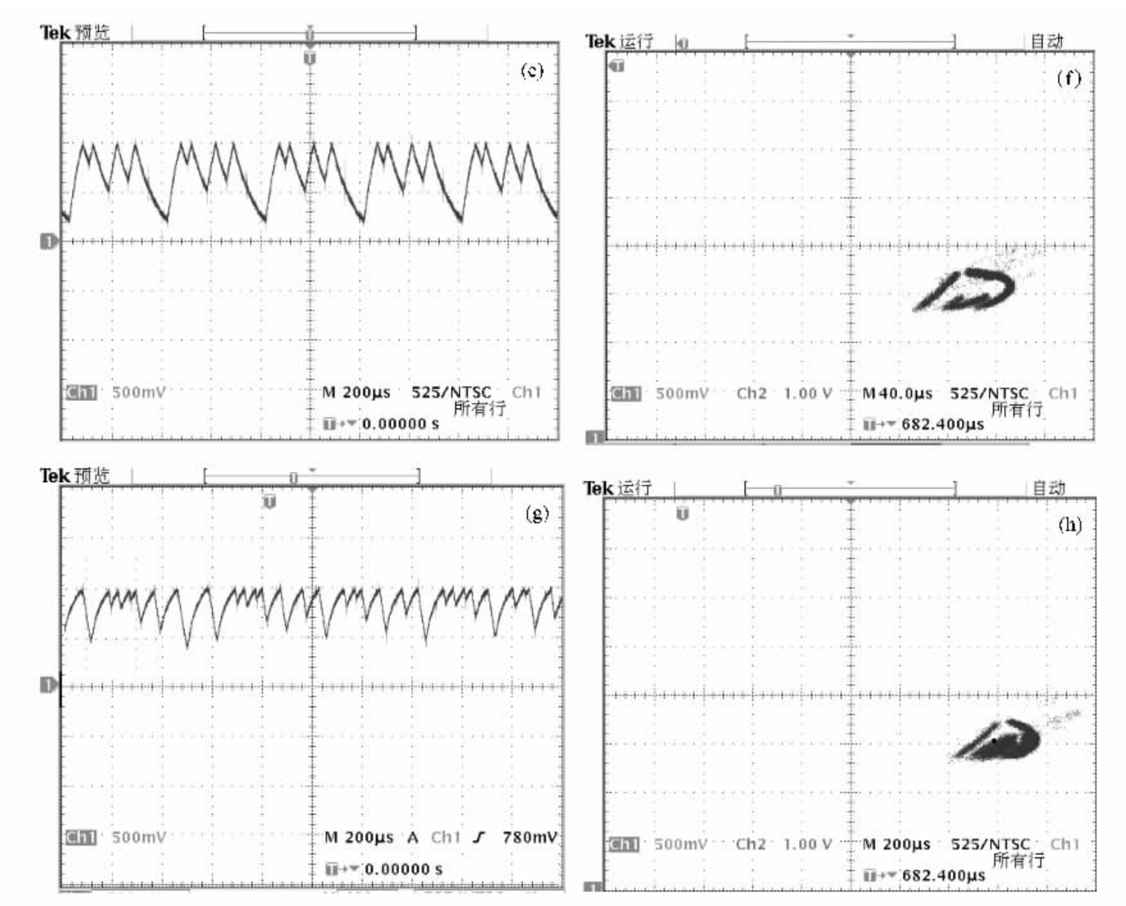


图 10　Boost 变换器倍周期分岔实验波形　(a) $1T$ 波形图；(b) $1T$ 相图；(c) $2T$ 波形图；(d) $2T$ 相图；(e) $4T$ 波形图；(f) $4T$ 相图；(g) 混沌波形图；(h) 混沌相图

4. 结　　论

本文分析了开关变换器倍周期分岔级联的精细结构. 开关变换器的分岔混沌运动具有自相似性和标度不变性，频谱结构进一步反映了各级倍周期分岔和混沌的结构特征. 本文的研究可以为进一步揭示和探索非线性开关变换器系统的动力学行为的复杂性态、动力学性能的控制以及系统特性的改善提供依据.

[1] Daniel Kaplan, Leon Glass 1995 *Understanding nonlinear dynamics* (Springer-Verlag)

[2] Liu B Z, Peng J H 2004 *Nonlinear dynamics* (Beijing: High Education Press) (in Chinese) [刘秉正、彭建华 2004 非线性动力学 (北京: 高等教育出版社)]

[3] Zhang Q C, Wang H L, Shen F 2005 *Bifurcation and Chaos Theory and Application* (Tianjin: Tianjin University Press) (in Chinese) [张琪昌、王洪礼、沈　菲 2005 分岔与混沌理论及应用 (天津: 天津大学出版社)]

[4] Gao P Y 2005 *Nonlinear dynamics* (Changsha: Press of National University of Defence Technology) (in Chinese) [高普云 2005 非线性动力学 (长沙: 国防科技大学出版社)]

[5] Edward Ott 2002 *Chaos in dynamical systems* (Cambridge University Press)

[6] Guckenheimer P 1977 *Invent*. *Math*. **39** 165

[7] Chen X Z, Zhai W B, Chao K F 2004 *Journal of Yunnan University* **26** 331 (in Chinese) [陈晓舟、翟伟斌、曹克非 2004 云南大学学报 **26** 331]

[8] Luo X S, Chen G R 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 12 (in Chinese) [罗晓曙、陈关荣 2003 物理学报 **52** 12]

[9] Li M, Ma X K, Dai D, Zhang H 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 1084 (in Chinese) [李　明、马西魁、戴　栋、张　浩 2005 物理学报 **54** 1084]

[10] Dai D, Ma X K, Li X F 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 2369 (in Chinese) [戴　栋、马西魁、李小峰 2003 物理学报 **52** 2369]

[11] Zhou Y F, Chen J N 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 3676 (in Chinese)

[周宇飞、陈军宁 2004 物理学报 **53** 3676]

[12] Zhou Y L, Luo X S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2978 (in Chinese) [邹艳丽、罗晓曙 2003 物理学报 **52** 2978]

[13] Yang R, Zhang B 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5667 (in Chinese) [杨 汝、张 波 2006 物理学报 **55** 5667]

[14] Zhao Y L, Luo X S, Fang J Q, Wang B H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5022 (in Chinese) [赵益波、罗晓曙、方锦清、汪秉宏 2005 物理学报 **54** 5022]

[15] Lu H H C, Tse C K 2003 *IEEE Trans on Circuits and Systems* **50** 679

[16] Yang R, Zhang B, Qiu D Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3789 (in Chinese) [杨 汝、张 波 2007 物理学报 **56** 3789]

[17] Zhang B, Li P, Qi Q 2002 *Acta Electrial Engineering Sinica* **22**(11) 81 (in Chinese) [张 波、李 萍、齐 群 2002 中国电机工程学报 **22**(11) 81]

[18] Guckenheimer P 1977 *Invent. Math.* **39** 165

[19] Li T Y, York J A 1975 *Amer Math.* **82** 481

Research of fine structure and universal constants of bifurcation in converters*

Yang Ru[1)] Zhang Bo[2)] Chu Li-Li[2)]

1) (*School of Physics and Electronic Engineering, Guangzhou University, Guangzhou* 510400, *China*)

2) (*Electric Power Institute, South China University of Technology, Guangzhou* 510640, *China*)

(Received 27 July 2007; revised manuscript received 25 September 2007)

Abstract

The fine structure and scaling invariability of bifurcation in converters is discussed. Universal constants of converters of one and two dimensions and chaos combination belts have been obtained by numerical simulation. Spectrum structure is used to estimate the system behavior and reveal the structure of solution in the converter. The structure of spectrum also validates the fine structure of bifurcation in the converter. Experiment results illustrate the process of bifurcation to chaos and validate the simulation results.

Keywords: converter, bifurcation, universal constant, scaling invariability

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60474066, 50777009), the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. 05103540), and the Science and Technology Project of University of Guangzhou (Grant No. 62053).