第 57 卷 第 5 期 2008 年 5 月
1000-3290/2008/57(05)/2779-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57, No.5, May, 2008

具有不确定参数的 Liu 混沌系统的同步*

王 划† 韩正之 章 伟 谢七月

(上海交通大学电子信息学院,上海 200240)

(2007 年 8 月 17 日收到;2007 年 11 月 2 日收到修改稿)

基于控制 Lyapunov 函数,对具有不确定参数的 Liu 混沌系统提出一种同步控制方法,控制律只依赖参数变化范围而不必知道参数的具体数值. 与已有结果相比,该设计比较简单,有较强的鲁棒性,能克服较大参数误差对同步的影响. 仿真结果说明了所提方法的有效性.

关键词:参数系统,同步,鲁棒控制,控制 Lyapunov 函数

PACC:0545

1. 引 言

混沌系统具有对初始条件以及系统参数极其敏感的特性. 系统参数和初始条件的微小差异,最终会导致系统完全不同的行为. 1990 年,Pecora 和 Carroll 利用驱动响应法实现了两个混沌系统的同步[1]. 此后,混沌系统的同步由于广阔的应用前景而成为研究的热点,学者们提出了多种实现混沌系统同步控制的设计方法[2—6],其中大多数方法是建立在混沌系统精确数学模型的基础上的,即需要精确知道驱动系统和响应系统的模型和参数. 然而由于环境的变化,元器件的老化及建模误差等很多因素,系统的参数总在一个小范围内摄动. 因此,考虑具有不确定参数的混沌系统的同步具有重要的现实意义. 从 20 世纪 80 年代 Artsein[7] 和 Sontag[8] 提出控制 Lyaupunov 函数(CLF)概念以来,CLF 在非线性系统的设计中发挥了重要的作用. 然而将 CLF 方法用于混沌系统同步设计的还比较少见. 本文采用 CLF 来设计 Liu 系统同步控制,其反馈律相对比较简单,具有不需要准确知道系统参数的特点,鲁棒性强,并且可以方便地把此设计方法推广到其他系统中.

本文第二节给出一些必要的预备知识;第三节先考虑参数已知的混沌系统的同步,然后考虑响应系统具有不确定参数的情况;第四节是对 Liu 系统的仿真,用来说明文章所提方法的有效性.

2. 系统描述

在 2004 年,Liu 等发现了一个新的混沌系统[9],其方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= bx - kxz, \\ \dot{z} &= -cz + hx^2, \end{aligned} \tag{1}$$

指出当 $a = 10, b = 40, k = 1, c = 2.5, h = 4$ 时,系统(1)有三个不稳定的平衡点[9] $O = (0,0,0), O_+ = (5,5,40), O_- = (-5,-5,40)$ 和一个混沌吸引子. 在本文中,基于 CLF 来研究 Liu 系统的同步控制问题. CLF 的概念是在研究非线性系统的全局渐近稳定问题时,由 Artsein[7] 和 Sontag[8] 独立地引入的,这里先给出几个必要的定义.

定义 1[8] 给定连续函数 $V: R^n \to R$,称 V 是正定的,如果 $V(0) = 0$,且当 $x \neq 0$ 时,$V(x) > 0$;称 V 是真的(或径向无界),如果当 $\|x\| \to \infty$ 时,$V(x) \to \infty$.

设 V 满足定义 1,那么任给 $a > 0$,集合 $V^{-1}([0, a]) = \{x \in R^n : 0 \leqslant V(x) \leqslant a\}$ 总是紧的.

定义 2[11] 定义于 R^n 上的函数 $u = \alpha(x)$,若满足在 R^n 的开(稠密)子集 $R^n \setminus \{0\}$ 上 C^1(光滑),且在 $x = 0$ 处至少是连续的,则称之为殆 C^1(殆光滑)函数.

* 国家自然科学基金(批准号:60674024)资助的课题.

† E-mail:wanghua609@yahoo.com.cn

定义 3[8] 考虑仿射系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \tag{2}$$

若存在真的和正定的 C^1 函数 $V(x)$,使得

$$L_gV(x) = 0, x \neq 0 \Rightarrow L_fV(x) < 0, \tag{3}$$

那么称 $V(x)$ 是系统(2)的控制 Lyapunov 函数(CLF),这里 $L_{c(x)}V(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}c(x)$ 为 $V(x)$ 沿着函数 $c(x)$ 的 Lie 导数. 如果 $g = [g_1 g_2 \cdots g_m]$,则 $L_gV(x) = [L_{g_1}V(x) L_{g_2}V(x) \cdots L_{g_m}V(x)]$.

关于 CLF 的等价叙述为

$$\inf_u\left\{\frac{\partial V}{\partial x}(f(x) + g(x)u)\right\} < 0 \quad (x \neq 0).$$

3. 主要结果

一般在讨论同步的时候,总认为驱动系统动态行为是已知的,而响应系统为实际操作系统,其系统参数可能是确定的也可能会带有某些不确定性,我们分两种情况来讨论.

首先研究响应系统参数已知的情况. 考虑驱动系统为 Liu 系统,其动态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= bx_1 - kx_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= -cx_3 + hx_1^2. \end{aligned} \tag{4}$$

参数已知情况下的响应系统为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a(y_2 - y_1), \\ \dot{y}_2 &= by_1 - ky_1y_3 + u_1, \\ \dot{y}_3 &= -cy_3 + hy_1^2 + u_2. \end{aligned} \tag{5}$$

记 $e_1 = y_1 - x_1, e_2 = y_2 - x_2, e_3 = y_3 - x_3$,由(4)式和(5)式得到误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= a(e_2 - e_1), \\ \dot{e}_2 &= be_1 - k(e_1e_3 + x_1e_3 + x_3e_1) + u_1, \\ \dot{e}_3 &= -ce_3 + he_1(e_1 + 2x_1) + u_2. \end{aligned} \tag{6}$$

为分析方便,记 $e = (e_1, e_2, e_3)^{\mathrm{T}}$ 和 $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$,系统(6)可以记为

$$\dot{e} = f(x, e) + Bu, \tag{7}$$

其中

$$f(x, e) = \begin{pmatrix} a(e_2 - e_1) \\ be_1 - k(e_1e_3 + x_1e_3 - x_3e_1) \\ -ce_3 + he_1(e_1 + 2x_1) \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

显然,$f(0,0) = 0$. 我们的目的是设计反馈控制使响应系统(5)与驱动系统(4)同步,即设计控制器 $u = u(x, e)$, $u(0,0) = 0$ 使误差系统(6)闭环后的原点全局渐近稳定,即对任意的 $e(0)$ 和 $x(0)$,成立:

$$\lim_{t\to\infty}\| y - x \| = \lim_{t\to\infty}\| e \| = 0.$$

对误差系统(6)考虑如下正定函数:

$$V(e) = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 + \frac{1}{2}e_3^2, \tag{9}$$

则

$$\frac{\partial V}{\partial e}B = 0, e \neq 0 \Rightarrow e_2 = e_3 = 0, e_1 \neq 0,$$

于是当 $\frac{\partial V}{\partial e}B = 0, e \neq 0$ 时有

$$\frac{\partial V}{\partial e}f(x, e) = -ae_1^2 < 0. \tag{10}$$

根据定义 3,函数(9)为误差系统(6)的 CLF.

定理 1 对于驱动系统(4),存在一个殆光滑控制器 $u = u(x, e)$, $u(0,0) = 0$,使得响应系统(5)与(4)同步.

证明 考虑 R^2 上的开集

$$S = \{(a, b) \in R^2 \mid b \neq 0 \text{ 或 } a < 0\} \subset R^2,$$

S 是 2 维平面上除去原点和正实轴的剩余点组成的集合,定义函数

$$\phi(a, b) = \begin{cases} 0, & b = 0, \\ \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} & b \neq 0, \end{cases}$$

则 $\phi(a, b)$ 是 S 上的光滑函数.

因此,对任意 $e \neq 0$, $(L_{f(x,e)}V(e), \| L_BV(e) \|^2) \in S$,考虑如下状态反馈:

$$u(e, x) = \begin{cases} -(L_BV)^{\mathrm{T}}\dfrac{L_fV + \sqrt{(L_fV)^2 + \| L_BV \|^4}}{\| L_BV \|^2}, & L_BV \neq 0, \\ 0, & L_BV = 0, \end{cases} \tag{11}$$

则对 $e \neq 0$, $u(e, x)$ 是 S 上的光滑函数,考虑闭环系统

$$\dot{e} = f(x,e) + Bu(x,e). \tag{12}$$

沿着(12)式对 $V(e)$ 进行求导，则当 $e \neq 0$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}V(e)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial e}f(x,e) + \frac{\partial V}{\partial e}Bu = -\sqrt{(L_fV)^2 + \|L_BV\|^4} < 0,$$

因此根据 Lyapunov 定理，(12)式全局渐近稳定，即 $e \to 0$.

下面我们考虑驱动系统仍为 Liu 系统(4)，而响应系统的某些参数存在扰动，即响应系统为

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= a(z_2 - z_1),\\ \dot{z}_2 &= (b + \Delta b)z_1 - kz_1z_3 + u_1,\\ \dot{z}_3 &= -(c + \Delta c)z_3 + (h + \Delta h)z_1^2 + u_2.\end{aligned} \tag{13}$$

假设扰动有界，即 $\sup\{|\Delta b|, |\Delta c|, |\Delta h|\} \leqslant N$，其中 N 为一常数. 类似地，定义响应误差为 $e_1 = z_1 - x_1$，$e_2 = z_2 - x_2$，$e_3 = z_3 - x_3$，则误差系统为

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= a(e_2 - e_1),\\ \dot{e}_2 &= be_1 - k(e_1e_3 + x_1e_3 + x_3e_1) + \Delta b(e_1 + x_1) + u_1,\\ \dot{e}_3 &= -ce_3 + he_1(e_1 + 2x_1) + \Delta h(e_1 + x_1)^2 - \Delta c(e_3 + x_3) + u_2.\end{aligned} \tag{14}$$

误差系统(14)的紧凑形式为

$$\dot{e} = f(x,e) + p(e,x)M(\Delta\theta) + Bu, \tag{15}$$

其中

$$f(x,e) = \begin{pmatrix} a(e_2 - e_1) \\ be_1 - k(e_1e_3 + x_1e_3 + x_3e_1) \\ -ce_3 + he_1(e_1 + 2x_1)\end{pmatrix},$$

$$p(e,x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e_1 + x_1 & 0 & 0 \\ 0 & (e_1 + x_1)^2 & -(e_3 + x_3)\end{pmatrix},$$

$$M(\Delta\theta) = (\Delta b, \Delta h, \Delta c)^{\mathrm{T}},$$

矩阵 B 与在(8)式中定义的一样，$M(\Delta\theta)$ 为扰动组成的向量. 由于假设扰动是有界的，即存在 $\delta > 0$，使得

$$\|M(\Delta\theta)\| < \delta.$$

对误差系统(15)仍然考虑标称系统的真的正定函数 $V(e)$ 如(9)式所示，即

$$V(e) = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 + \frac{1}{2}e_3^2,$$

则当 $\frac{\partial V}{\partial e}B = 0, e \neq 0 \Rightarrow e_2 = e_3 = 0, e_1 \neq 0$ 时，有

$$\frac{\partial V}{\partial e}(f(x,e) + p(e,x)M(\Delta\theta)) = -ae_1^2 < 0,$$

因此标称系统的 $V(e)$ 也为具有不确定参数的误差系统(14)的控制 Lyapunov 函数(CLF).

定理 2　对于驱动系统(4)，存在一个殆光滑控制器 $u = u(x,e)$，$u(0,0) = 0$，使得响应系统(13)与(4)同步.

证明　对误差系统(15)，取反馈控制

$$u(e,x) = \begin{cases} -(L_BV)^{\mathrm{T}}\dfrac{L_fV + \delta\|L_pV\| + \sqrt{(L_fV + \delta\|L_pV\|)^2 + \|L_BV\|^4}}{\|L_BV\|^2}, & L_BV \neq 0,\\ 0, & L_BV = 0,\end{cases} \tag{16}$$

此处简记 $\frac{\partial V(e)}{\partial e}B$ 为 L_BV，把 $\frac{\partial V(e)}{\partial e}p(e,x)$ 简记为 L_pV，由于 $L_BV(e) = 0$ 时 $L_pV = 0$，所以 $u(e,x)$ 还是殆光滑的，仍然考虑如(9)式所示正定函数 $V(e)$，并对其沿着闭环误差系统(15)进行求导，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V(e)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial V}{\partial e}(f(x,e) + p(e,x)M(\Delta\theta)) + \frac{\partial V}{\partial e}Bu\\ &= \frac{\partial V}{\partial e}(f(x,e) + p(e,x)M(\Delta\theta)) - L_fV - \delta\|L_pV\| - \sqrt{(L_fV + \delta\|L_pV\|)^2 + \|L_BV\|^4}\\ &\leqslant -\sqrt{(L_fV + \delta\|L_pV\|)^2 + \|L_BV\|^4} < 0,\end{aligned}$$

即沿着闭环误差系统(15)，如(9)式所示的正定函数 $V(e)$ 负定，根据 Lyapunov 稳定性定理，系统(15)是全局渐近稳定的，即 $e \to 0$.

4. 仿真结果

我们首先考虑参数已知的情况，驱动系统为 Liu 系统如(4)所示，响应系统方程如(5)所示，初始状态为 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0))^{\mathrm{T}} = (2,3,2)^{\mathrm{T}}$，$(y_1(0),$

$y_2(0), y_3(0))^{\mathrm{T}} = (1, -2, 2)^{\mathrm{T}}$,采用 ode45 算法,利用 Matlab 进行仿真其结果如下,图 1 显示了未加控制时的误差系统的响应情况,从图中可以明显看出驱动系统不能和响应系统达到同步,图 2 显示了采用控制律(11)时误差系统的响应情况,从图 2 可以看出误差系统快速的衰减到了 0.

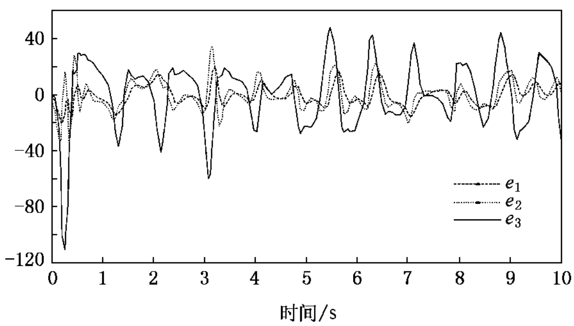

图 1 参数已知时误差系统的响应情况($u = 0$)

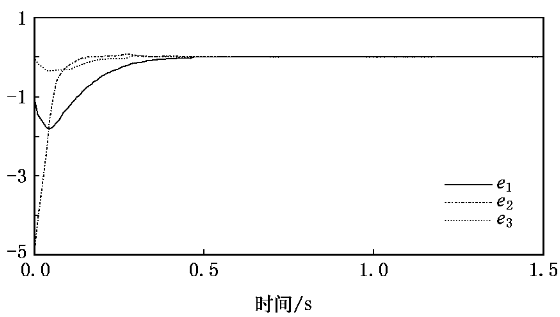

图 2 参数已知时误差系统的响应情况

考虑驱动系统仍为(4),响应系统为

$$\dot{z}_1 = a(z_2 - z_1),$$

$$\dot{z}_2 = (b + 2\sin(x_1))z_1 - kz_1 z_3 + u_1,$$

$$\dot{z}_3 = -(c + \sin(x_1))z_3 + (h + \cos(x_2))z_1^2 + u_2,$$

可以看出此处参数的扰动为

$$M(\Delta\theta) = (\Delta b, \Delta h, \Delta c)^{\mathrm{T}} = (2\sin(x_1), \cos(x_2), \sin(x_1))^{\mathrm{T}},$$

可知参数扰动上界 $\delta = \sqrt{6}$,取反馈控制律(15),图 3 显示初值与参数已知时相同时没有控制律作用时的误差响应情况,图 4 显示在控制器(16)的作用下误差系统的响应情况,从图中我们可以看到控制律(16)能够快速镇定误差系统,即响应系统(13)能够快速同步于混沌 Liu 系统(4).

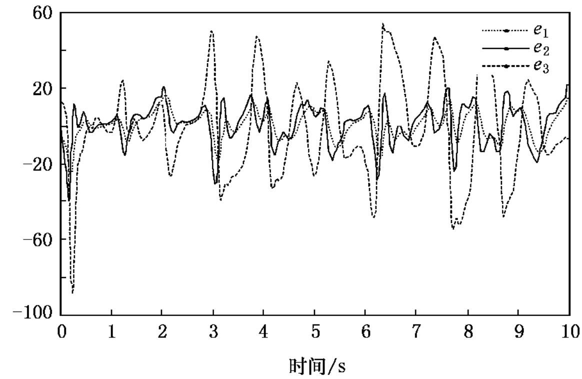

图 3 参数未知时误差系统的响应情况($u = 0$)

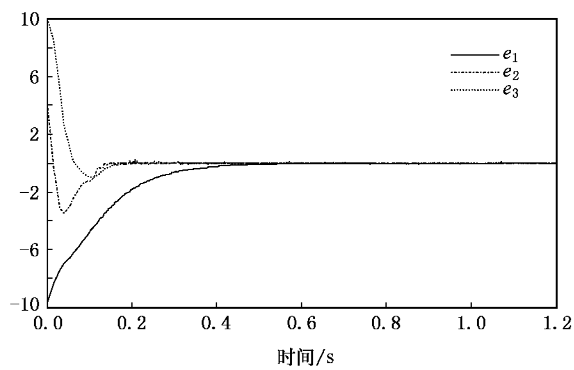

图 4 参数未知时误差系统的响应情况

5. 结 论

基于 CLF,本文设计了一个控制器使混沌 Liu 系统达到同步. 现阶段所研究的混沌系统大部分是低维的非线性系统,对于维数较低的非线性系统,CLF 还是很容易寻找的. 这点也可以从对 Liu 系统的分析中看出来. 将 CLF 应用到混沌系统的同步中,可以简化设计,并且此种方法也可以很容易地推广到其他的混沌系统同步设计中. 最后仿真结果也说明了所提方法的有效性.

[1] Pecora L M，Carroll T L 1990 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **64** 821
[2] Wang F Q，Liu C X 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 505（in Chinese）[王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 505]
[3] Yassen M T 2007 *Phys*. *Lett*. A **360** 582
[4] Chen F X，Zhang W D 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 937
[5] Li R H，Xu W，Li S 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 598（in Chinese）[李瑞红、徐 伟、李 爽 2006 物理学报 **55** 598]
[6] Liu Y Z，Jiang C S，Lin C S 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 707（in Chinese）[刘扬正、姜长生、林长圣 2007 物理学报 **56** 707]
[7] Artsein Z 1983 *Nonlinear Anal*. *TMA* **7** 1163
[8] Sontag E D 1983 *SIAM J*. *Control and Optimization* **21** 462
[9] Liu C X，Liu T，Liu L，Liu K 2004 *Chaos*，*Solitons & Fractals* **22** 1031
[10] Yassen M T 2006 *Phys*. *Lett*. A **350** 36
[11] Isidori A 1995 *Nonlinear control systems* 3th Edition（London：Springer-Verlag）
[12] Sontag E D 1989 *Systems and Control Letters* **13** 117
[13] Cai X S，Han Z Z 2005 *IEE Proceedings Control Theory and Applications* **52** 79

Synchronization of chaotic Liu system with uncertain parameters*

Wang Hua† Han Zheng-Zhi Zhang Wei Xie Qi-Yue
（*School of Electrical and Information Engineering*，*Shanghai Jiaotong University*，*Shanghai* 200240，*China*）

（Received 17 August 2007；revised manuscript received 2 November 2007）

Abstract

Based on the control Lyapunov function（CLF），a method of synchronizing chaotic Liu system with uncertain parameters is proposed. The feedback control law presented does not depend on the parameters but on the boundary of the parameters. It shows that the feedback is simple and robust. Simulation studies on Liu chaotic system also verify the effectiveness of the proposed scheme when the parameters vary largely.

Keywords：parameter system，synchronization，robust control，control Lyapunov function
PACC：0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China（Grant No.60674024）.
† E-mail：wanghua609@yahoo.com.cn