第 57 卷 第 6 期 2008 年 6 月
1000-3290/2008/57(06)/3333-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.57, No.6, June, 2008

噪声间关联程度的时间周期调制对单模激光随机共振的影响

陈德彝 王忠龙

(三峡大学理学院物理系, 宜昌 443002)

(2007 年 10 月 25 日收到; 2007 年 11 月 19 日收到修改稿)

用线性化近似的方法研究了噪声间关联程度 λ 受时间周期性调制的单模激光增益模型的光强功率谱及信噪比. 具体讨论信噪比 R 受加法噪声强度 D, 乘法噪声强度 Q 及噪声间关联程度 λ 的影响, 以及受周期调制频率 Ω_λ, 输入信号频率 Ω 的影响. 发现了一些新颖的现象.

关键词: 时间周期调制频率, 噪声间关联程度, 随机共振, 信噪比

PACC: 0540, 4260K

1. 引 言

20 多年前 Benzi[1] 提出了随机共振概念, 随后, 随机共振现象多次被实验所观察到[2,3], 对随机共振现象的研究已成为近年来人们关注的重要课题, 并有大量的理论和实验研究报道[4—7]. 对随机共振现象的理论解释最有影响的是绝热近似理论[8]、微扰理论[5] 和线性化近似理论[9]. 绝热近似理论对信号、噪声和系统的限制条件非常严格, 但在实际的物理系统中这些限制是合理的; 微扰理论的适用范围比绝热近似理论要宽, 但求解困难; 线性化近似理论对信号、噪声没有任何限制. 将单模激光方程线性化以后去研究随机共振, 其优点在于对信噪比的计算是精确的. 只要各个参数选择适当, 即能满足线性化的要求, 是很好的一种方法. 这方面的工作已有很多研究成果, 特别是输入信号被调制以及噪声受周期信号和偏置信号调制对信噪比的影响, 文献 [10—13] 已作了研究. 噪声会受到调制信号的影响从而对信噪比产生影响, 噪声之间的关联也会受到调制信号的影响, 从而对信噪比产生影响. 我们知道, 加性噪声与乘性噪声之间相互关联是用关联程度 λ 来描述, 取值为 $-1 \leqslant \lambda \leqslant 1$. 本文研究噪声间关联程度 λ 受时间的周期调制[14] 对信噪比所产生的影响, 发现一些新颖的现象, 例如 R-Ω_λ 曲线会出现很尖锐的共振峰等.

本文首先推导噪声间关联程度 λ 受时间周期调制的单模激光增益模型的光强关联函数和信噪比, 然后讨论当 $\Omega_\lambda \neq n\Omega$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 时噪声参数 Q, D, λ 对信噪比的影响、以及时间周期调制频率 Ω_λ 和输入信号频率 Ω 对信噪比的影响.

2. 关联程度受时间周期调制的单模激光增益模型的光强关联函数和信噪比

受信号调制的单模激光增益模型的光强朗之万方程为

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -2KI + \frac{2\Gamma I}{1+\beta I} + D + \frac{2I}{1+\beta I}\xi(t) + 2\sqrt{I}\eta(t) + A\cos(\Omega t), \tag{1}$$

方程(1)中噪声 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的统计性质为

$$\begin{aligned}
\langle\xi(t)\rangle &= \langle\eta(t)\rangle = 0,\\
\langle\xi(t)\xi(t')\rangle &= 2Q\delta(t-t'),\\
\langle\eta(t)\eta(t')\rangle &= 2D\delta(t-t'),\\
\langle\xi(t)\eta(t')\rangle &= \langle\eta(t)\xi(t')\rangle\\
&= 2\lambda\cos(\Omega_\lambda t)\sqrt{QD}\delta(t-t'),\\
&\quad -1 \leqslant \lambda \leqslant 1.
\end{aligned} \tag{2}$$

方程(1)中, I 表示光强, K 为损失系数, Γ 是增益系数, $\beta = \tilde{A}/\Gamma$, 式中 $\tilde{A}$ 为自饱和系数, D 是量子噪声强度, Ω 为输入信号频率. (2)式中 Q 是抽运噪声强度, λ 为噪声间关联程度, Ω_λ 是对 λ 的时间周期调制频率.

可求出稳态光强为

$$I_0 = (\Gamma - K)/\beta K,$$

在稳态光强 I_0 附近把方程(1)线性化,令

$$I = I_0 + \varepsilon(t),$$

其中 $\varepsilon(t)$ 为微扰项,代入方程(1)可得线性化方程:

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} = -\gamma\varepsilon(t) + D + \frac{2I_0}{1+\beta I_0}\xi(t) + 2\sqrt{I_0}\,\eta(t) + A\cos(\Omega t), \tag{3}$$

式中

$$\gamma = 2K(\Gamma - K)/\Gamma.$$

对(3)式直接积分可得 $\varepsilon(t')$,进而可求出 $\langle\varepsilon(t')\rangle$:

$$\langle\varepsilon(t')\rangle = \frac{D}{\gamma} - \left(\frac{D}{\gamma} + \frac{A\gamma}{\gamma^2+\Omega^2}\right)\mathrm{e}^{-\gamma t'} + \frac{A}{\sqrt{\gamma^2+\Omega^2}}\cos(\Omega t' - \theta), \tag{4}$$

式中 θ 由下式确定:

$$\cos\theta = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+\Omega^2}},$$

$$\sin\theta = \frac{\Omega}{\sqrt{\gamma^2+\Omega^2}}.$$

可计算出平均光强相关函数

$$\begin{aligned}
&\lim_{t'\to\infty}\overline{\langle I(t+t')I(t')\rangle}\\
&= \frac{\Omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}\lim_{t'\to\infty}\langle I(t+t')I(t')\rangle\mathrm{d}t'\\
&= \left(I_0 + \frac{D}{\gamma}\right)^2 + \left[4I_0\frac{D}{\gamma} + \left(\frac{2I_0}{1+\beta I_0}\right)^2\frac{Q}{\gamma}\right]\mathrm{e}^{-\gamma t}\\
&\quad + \frac{A^2}{2}\frac{1}{\gamma^2+\Omega^2}\cos(\Omega t)\\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\frac{\Omega}{\Omega_\lambda}\left[\sin\left(\frac{\Omega}{\Omega_\lambda}2\pi - \theta\right) - \sin(-\theta)\right]\\
&\quad \times \frac{8I_0^{3/2}}{1+\beta I_0}2\lambda\sqrt{QD}\frac{\mathrm{e}^{-\gamma t}}{\sqrt{4\gamma^2+\Omega^2}},
\end{aligned} \tag{5}$$

进而计算出输出功率谱

$$\begin{aligned}
S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{t'\to\infty}\overline{\langle I(t+t')I(t')\rangle}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\
&= S_1(\omega) + S_2(\omega) + S_3(\omega),
\end{aligned}$$

其中,输出信号功率谱为

$$S_1(\omega) = \frac{A^2}{4(\gamma^2+\Omega^2)}[2\pi\delta(\omega-\Omega) + 2\pi\delta(\omega+\Omega)],$$

输出噪声功率谱为

$$\begin{aligned}
S_2(\omega) &= 2\pi\left(I_0 + \frac{D}{\gamma}\right)\delta(\omega)\\
&\quad + \left[4I_0\frac{D}{\gamma} + \left(\frac{2I_0}{1+\beta I_0}\right)^2\frac{Q}{\gamma}\right]\frac{2\gamma}{\gamma^2+\omega^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_3(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\frac{\Omega}{\Omega_\lambda}\left[\sin\left(\frac{\Omega_\lambda}{\Omega}2\pi - \theta\right) - \sin(-\theta)\right]\\
&\quad \times \frac{8I_0^{3/2}}{1+\beta I_0}2\lambda\sqrt{QD}\frac{1}{\sqrt{4\gamma^2+\Omega^2}}\frac{2\gamma}{\gamma^2+\omega^2}.
\end{aligned}$$

输出信号总功率为

$$P_{\mathrm{S}} = \int_0^{\infty}S_1(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{A^2}{4(\gamma^2+\Omega^2)},$$

$\omega = \Omega$ 处单位噪声谱的平均功率为

$$S_2(\omega = \Omega) = \left[4I_0\frac{D}{\gamma} + \left(\frac{2I_0}{1+\beta I_0}\right)^2\frac{Q}{\gamma}\right]\frac{2\gamma}{\gamma^2+\Omega^2},$$

$$\begin{aligned}
S_3(\omega = \Omega) &= \frac{1}{2\pi}\frac{\Omega}{\Omega_\lambda}\left[\sin\left(\frac{\Omega_\lambda}{\Omega}2\pi - \theta\right) - \sin(-\theta)\right]\\
&\quad \times \frac{8I_0^{3/2}}{1+\beta I_0}2\lambda\sqrt{QD}\frac{1}{\sqrt{4\gamma^2+\Omega^2}}\frac{2\gamma}{\gamma^2+\Omega^2}.
\end{aligned}$$

最后计算出输出信噪比

$$\begin{aligned}
R &= \frac{P_{\mathrm{S}}}{S_2(\omega=\Omega) + S_3(\omega=\Omega)}\\
&= \frac{A^2}{4(\gamma^2+\Omega^2)}\Bigg/\left\{\left[4I_0\frac{D}{\gamma} + \left(\frac{2I_0}{1+\beta I_0}\right)^2\frac{Q}{\gamma}\right]\frac{2\gamma}{\gamma^2+\Omega^2}\right.\\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\frac{\Omega}{\Omega_\lambda}\left[\sin\left(\frac{\Omega_\lambda}{\Omega}2\pi - \theta\right) - \sin(-\theta)\right]\\
&\quad \left.\times \frac{8I_0^{3/2}}{1+\beta I_0}2\lambda\sqrt{QD}\frac{1}{\sqrt{4\gamma^2+\Omega^2}}\frac{2\gamma}{\gamma^2+\Omega^2}\right\}.
\end{aligned} \tag{6}$$

3. 讨 论

3.1. $\Omega_\lambda = n\Omega$ $(n = 1,2,3,\cdots)$时的输出信噪比

当 $\Omega_\lambda = n\Omega$ $(n = 1,2,3,\cdots)$时,输出信噪比为

$$R = \frac{A^2}{4(\gamma^2+\Omega^2)}\Bigg/\left\{\left[4I_0\frac{D}{\gamma} + \left(\frac{2I_0}{1+\beta I_0}\right)^2\frac{Q}{\gamma}\right]\frac{2\gamma}{\gamma^2+\Omega^2}\right\}, \tag{7}$$

即输入信号频率为时间周期调制频率的整数倍时,输出信噪比与噪声间关联程度 λ 无关.

本文以下仅讨论 $\Omega_\lambda \neq n\Omega$ $(n = 1,2,3,\cdots)$时的情况.

3.2. 噪声参数 Q,D,λ 对信噪比的影响

图 1 和图 2 是根据(6)式以噪声间关联程度 λ 为参数画出的 R-Q 曲线.当 λ 取负值,对 λ 的调制频率 $\Omega_\lambda = 0.7$ 时,图形显示随着噪声强度 Q 的变化出现随机共振,当 λ 的绝对值减小时,共振峰向左移(图 1),峰值减小;当 λ 为零或正值时,R-Q 曲线单调下降(图 2),不出现随机共振.

图 3 是根据(6)式以 λ 的调制频率 Ω_λ 为参数画出的 R-Q 曲线.当噪声间关联程度 $\lambda = -0.7$,对 λ

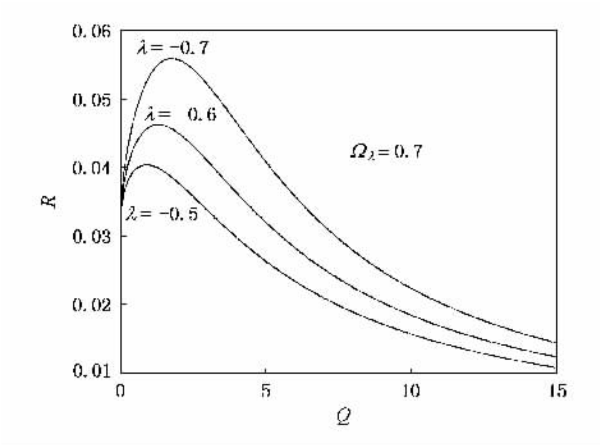

图 1　λ 为负值时的 R-Q 曲线　$A=1,\gamma=3,\Omega=3,I_0=1,D=1,\beta=1$

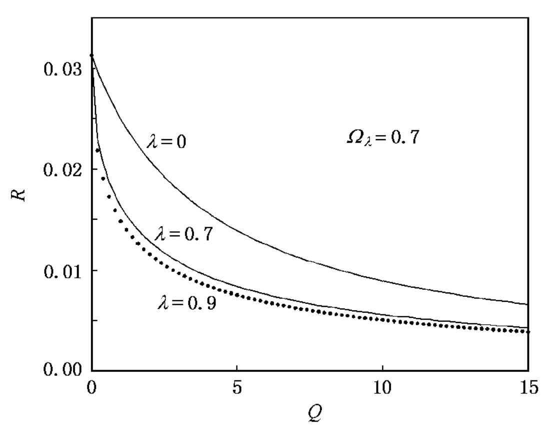

图 2　λ 为零和正值时的 R-Q 曲线　$A=1,\gamma=3,\Omega=3,I_0=1,D=1,\beta=1$

的调制频率由 $\Omega_\lambda=0.48$ 增大到 $\Omega_\lambda=0.495$ 时，随机共振的共振峰向左移，且峰值降低；当 $\Omega_\lambda=0.5$ 时，共振消失，曲线单调下降（图 3）.

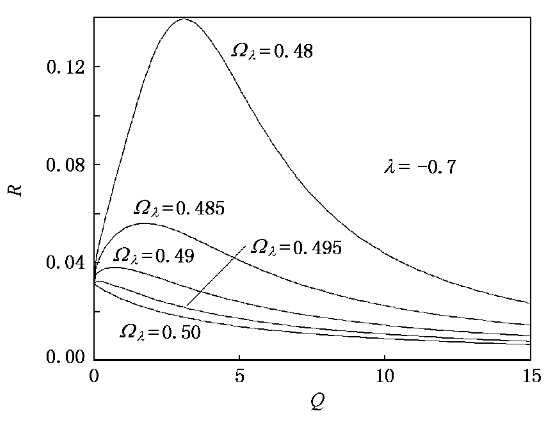

图 3　以 Ω_λ 为参数的 R-Q 曲线　$A=1,\gamma=3,\Omega=3,I_0=1,D=1,\beta=1$

以 λ 和 Ω_λ 为参数的 R-D 曲线，表现出与以 λ 和 Ω_λ 为参数的 R-Q 曲线相同的特性，这里不再讨论.

3.3. 周期调制频率 Ω_λ 对信噪比的影响

图 4 是以 Q 为参数的 R-Ω_λ 曲线. 图形明显显示出一尖锐的高峰，两边有许多小峰，表明当 Q 取一定值时，在对应 Ω_λ 一定值处出现一尖锐高峰，且随 Q 的增大峰更高（图 4）. 表明在特定时间周期调制频率处有很强的随机共振.

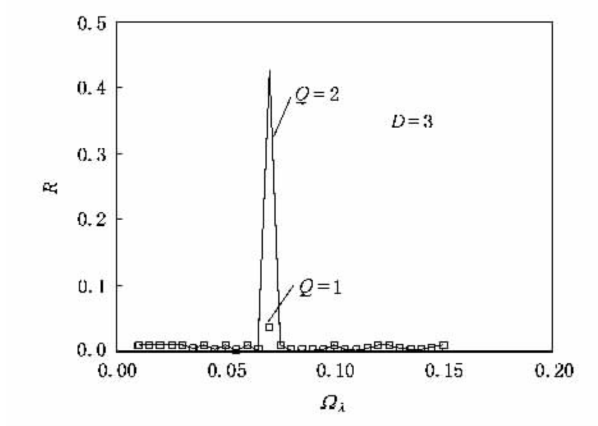

图 4　以 Q 为参数的 R-Ω_λ 曲线　$A=1,\gamma=3,\Omega=3,I_0=1,\lambda=0.8,\beta=1$

以 D 为参数的 R-Ω_λ 曲线，显示出与以 Q 为参数的 R-Ω_λ 曲线相同的特性，这里不再讨论.

3.4. 输入信号频率 Ω 对信噪比的影响

图 5 是以 Ω_λ 为参数的 R-Ω 曲线. 可以看出，随着输入信号频率的变化，出现周期性振荡（即出现随机多共振现象），且共振峰随 Ω 的增大而增高. 另一方面，随着参数 Ω_λ 值的增大，周期振荡的频率减小，且峰值降低（图 5）.

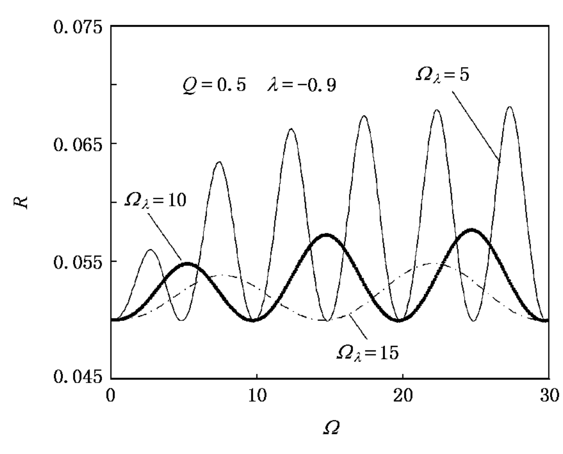

图 5　以 Ω_λ 为参数的 R-Ω 曲线　$A=1,\gamma=3,I_0=1,\beta=1$

4. 结　　论

从以上讨论可以看出，噪声间关联程度 λ 受到时间周期调制后，信噪比 R 随噪声参数（D，Q，λ）的变化除了出现通常的随机共振以及 R-Ω 曲线会出现周期振荡外，还出现了两个新颖现象：一是 R-Q 及 R-D 曲线以 Ω_λ 为参数的情况下，当 Ω_λ 增大时，共振峰向左移，且振幅降低，最后共振消失；二是 R-Ω_λ 曲线会出现很强且尖锐的共振峰，其两旁会出现很多小峰．

[1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A: Math. Gen.* **14** 453

[2] Gammaltoni L, Haggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223

[3] Hu G 1994 *Stochastic Force and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [胡　岗 1994 随机力与非线性系统(上海:上海科技教育出版社)]

[4] McNamara B, Wiesenfeld K 1989 *Phys. Rev.* A **39** 4854

[5] Hu G, Nicolis G, Nicolis C 1990 *Phys. Rev.* A **42** 2030

[6] Hu G, Haken H, Ning C Z 1992 *Phys. Lett.* A **172** 21

[7] Zhang L Y, Cao L, Wu D J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1174 (in Chinese) [张良英、曹　力、吴大进 2003 物理学报 **52** 1174]

[8] Hanggi P, Jung P, Marchesoni F 1989 *J. Stat. Phys.* **54** 1367

[9] Zhang L Y, Cao L, Wu D J 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 25

[10] Han L B, Cao L, Wu D J, Wang J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2127 (in Chinese) [韩立波、曹　力、吴大进、王　俊 2004 物理学报 **53** 2127]

[11] Zhang L Y, Cao L 2005 *J. Huazhong Univ. of Sci. & Tech.* (Nature Science Edition) **33** 119 (in Chinese) [张良英、曹　力 2005 华中科技大学学报(自然科学版) **33** 119]

[12] Cheng Q H, Cao L, Wu D J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2556 (in Chinese) [程庆华、曹　力、吴大进 2004 物理学报 **53** 2556]

[13] Han L B, Cao L, Wu D J, Wang J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3363 (in Chinese) [韩立波、曹　力、吴大进、王　俊 2004 物理学报 **53** 3363]

[14] Tessone C J, Wio H S, Hanggi P 2000 *Phys. Rev.* E **62** 4623

Effects of time period modulation of the noise correlation intensity on stochastic resonance of the single-mode laser

Chen De-Yi　Wang Zhong-Long

(*Department of Physics, College of Science, China Three Gorges University, Yichang* 443002, *China*)

(Received 25 October 2007; revised manuscript received 19 November 2007)

Abstract

By means of the linear approximation, we investigate the power spectrum and signal-to-noise ratio of the laser intensity for the gain-noise model of the single-mode laser with the noise correlation intensity λ modulated by the time period. Effects of the noise intensity D and Q, the noise correlation intensity λ, the period modulation frequency Ω_λ and the input signal frequency Ω on the signal-to-noise ratio R are discussed. Some novel phenomena are found.

Keywords: time period modulation frequency, noise correlation intensity, stochastic resonance, signal-to-noise ratio

PACC: 0540, 4260K