

# 一类约瑟夫森结混沌系统的谐和共振控制\*

雷佑铭<sup>†</sup> 徐 伟

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

(2007 年 9 月 13 日收到, 2007 年 11 月 13 日收到修改稿)

引入外激和参激两种不同形式的谐和共振激励, 探讨了一类约瑟夫森结(Josephson junction)系统的混沌控制问题. 利用 Melnikov 方法研究了异宿混沌的生成和抑制, 得到了在一定的控制激励振幅范围内, 能确保异宿混沌被控制住, 而且推导出控制激励与系统的激励两者之间的相位差和两者频率之间的共振阶数应满足的关系式. 从定性的角度说明相位差在异宿混沌的控制中确实有着至关重要的影响, 而且, 数值方法的研究表明可通过调节相位来控制非自治系统中的稳态混沌. 通过分析、比较外激和参激两种不同的共振激励对约瑟夫森结系统的异宿混沌的控制效果, 得到对于较小的共振频率, 宜采用参激激励, 而对于较大的共振频率, 宜采用外激激励.

关键词: 混沌控制, 谐和共振激励, 相位控制, Melnikov 方法

PACC: 0545

## 1. 引 言

研究表明, 混沌在现实世界中普遍存在, 而混沌控制也已成为混沌研究和应用的关键环节. 从控制原理上, 混沌控制可分为反馈控制和非反馈控制. 由于各种反馈控制方法要求对系统变量进行持续准确地监测, 同时实时计算微扰变量继而加以反馈控制, 对于某些系统往往不易实施.

与此同时, 另一类非反馈控制法则常常可以弥补其不足, 诸如常数激励控制、脉冲激励控制和谐和周期激励控制等等<sup>[1-7]</sup>. 针对谐和周期激励作用下的非线性系统, Wiggins<sup>[8]</sup>的专著和刘曾荣<sup>[9]</sup>的专著详细介绍了研究混沌的 Melnikov 方法, 并通过实例研究了混沌的生成. 另一方面, 借助 Melnikov 方法, Lima 和 Pettini<sup>[10]</sup>探讨了谐和共振参数激励对一类非自治混沌的抑制, 但是其证明过程并不严格, 并且, 作者在文中提出参数激励的相位对混沌抑制毫无影响, 不过, 其解析结果与数值模拟和实验符合较好. 此后, 许多学者对该问题进一步作了更为深入的研究.

1994 年, Kivshar<sup>[11]</sup>根据经典的摄动法原理研究了非共振参数激励对非自治混沌的抑制, 其思想是

首先利用谐波平衡法将系统约化为一个近似的“平均”系统, 然后借助 Melnikov 方法研究该“平均”系统, 从而得出非自治系统的混沌阈值, 并讨论谐和非共振激励的振幅和频率对混沌控制的影响. 结合摄动法和 Melnikov 方法, Yagasaki 等<sup>[12]</sup>, Haquang 等<sup>[13]</sup>, 以及 Belhaq 和 Houssni 等<sup>[14]</sup>也先后研究了拟周期激励作用下非线性系统的动力学行为. 值得一提的是, Cicogna 和 Fronzoni<sup>[15]</sup>, Qu 等<sup>[16]</sup>, Chacón<sup>[17-20]</sup>, Leung 和 Liu<sup>[21]</sup>分别从定性和定量的角度发现了相位对混沌抑制具有极其重要的作用, 这一结论与 Lima 和 Pettini 所提出的是否矛盾, 尚有待于进一步研究. 针对谐和周期激励作用下的混沌系统, 分别引入参数共振激励和谐和共振激励, 哪一种控制效果更好, 也有待于进一步研究.

Melnikov 方法不仅可以用来研究同(异)宿混沌的生成, 也可以用来研究同(异)宿混沌的抑制, 而两类数值方法, Lyapunov 指数法和 Poincaré 截面法, 则是研究稳定混沌吸引子的有力工具. 本文针对一类谐和共振激励作用下的约瑟夫森结系统, 分别利用 Melnikov 方法和数值方法研究混沌的生成和抑制, 同时考察相位对混沌控制的影响, 并探讨参激和外激两种共振激励对约瑟夫森结异宿混沌系统的控制的影响及其区别.

\* 国家自然科学基金重点项目(批准号:10332030)和国家自然科学基金(批准号:10502042)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: leiyuming@nwpu.edu.cn

### 2. 约瑟夫森结中的混沌

考虑谐和激励作用下的约瑟夫森结系统,无量纲形式为

$$\ddot{\theta} + \sin\theta - \epsilon[\rho - \alpha\dot{\theta} + f_1 \sin(\omega_1 t)] = 0, \quad (1)$$

其中常数  $\alpha$  为阻尼系数,  $\rho$  为标准化的直流偏流参数,  $f_1$  为标准化的微波直流振幅,  $\omega_1$  为谐和激励频率,  $\epsilon$  为小参数(取较大值时也可适用). 注意  $\theta$  为角变量, 将系统(1)改写为一阶形式, 有

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (2)$$

$$\dot{x}_2 = -\sin(x_1) + \epsilon[\rho - \alpha x_2 + f_1 \sin(\omega_1 t)].$$

与系统(2)相应的微扰系统为( $\epsilon = 0$ )

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (3)$$

$$\dot{x}_2 = -\sin(x_1).$$

系统(3)为 Hamilton 系统, 对应的 Hamilton 函数为

$$H(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 - \cos(x_1), \quad (4)$$

对于 Hamilton 系统(3)的奇点, 易得

- (i)  $(x_1^c, x_2^c) = (2k\pi, 0)$  ( $k$  为任意整数) 为中心;
- (ii)  $(x_1^s, x_2^s) = (2k\pi + \pi, 0)$  ( $k$  为任意整数) 为鞍点;

- (iii)  $\Gamma_{he}^{\pm} = (\pm \mathcal{X} \arctan(\sinh(t)), \pm \text{sech}(t))$  为连接不同鞍点的异宿轨道.

由于  $\theta$  为角变量, 故可令  $x_1 \triangleq \text{mod}(\theta, 2\pi) - \pi$ , 从而对于系统(3),  $(0, 0)$  为中心, 鞍点为  $S_1(-\pi, 0)$  和  $S_2(\pi, 0)$ , 两条异宿轨道  $\Gamma_{he}^+$  和  $\Gamma_{he}^-$  通过鞍点  $S_1$  和  $S_2$  相连接, 如图 1 所示.

记过鞍点  $S_1$  和  $S_2$  的异宿轨道为  $\Gamma_{he}^{\pm} = (x_{h1}(t), x_{h2}(t))$ , 借助文献[8, 9], 易得对应的 Melnikov 函数为

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{h2}(t) [\rho - \alpha x_{h2}(t) + f_1 \sin(\omega_1 t + \omega_1 t_0)] dt, \quad (5)$$

利用偶函数性质和留数定理<sup>[22]</sup> 积分上式, 得

$$M_{\pm}(t_0) = \pm 2\pi\rho - 8\alpha \pm 2\pi f_1 \text{sech}(\pi\omega_1/2) \sin(\omega_1 t_0), \quad (6)$$

从而系统(2)基于异宿分岔, 出现 Smale 马蹄意义混沌的必要条件为

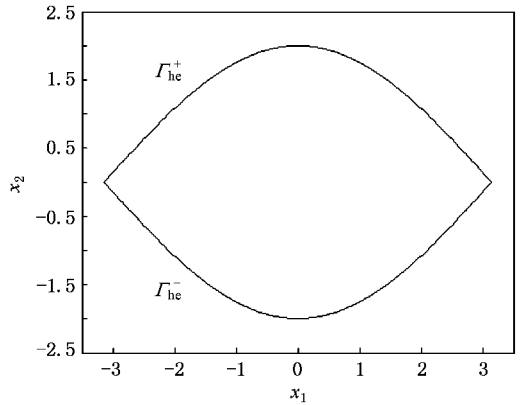


图 1 通过鞍点  $S_1$  和  $S_2$  相连接的异宿轨道  $\Gamma_{he}^{\pm}$

$$|\pm\rho + 4\alpha/\pi| \cosh(\pi\omega_1/2) \leq f_1. \quad (7)$$

为考察 Melnikov 方法的有效性, 可通过计算最大 Lyapunov 指数的零点来寻求系统(2)出现混沌的参数阈值. 取  $\rho = 0, \alpha = 0.2$ , 由 Melnikov 方法和最大 Lyapunov 指数方法(本文均采用 Wolf 方法<sup>[23]</sup>)所得的混沌阈值如图 2 所示, 由图可以看出, 用解析方法所得的阈值小于最大 Lyapunov 指数法, 这是因为前者是系统出现 Smale 马蹄意义下的混沌的必要条件, 即异宿混沌的临界值, 而后者往往表征系统出现混沌吸引子(稳态混沌)之临界值的充要条件.

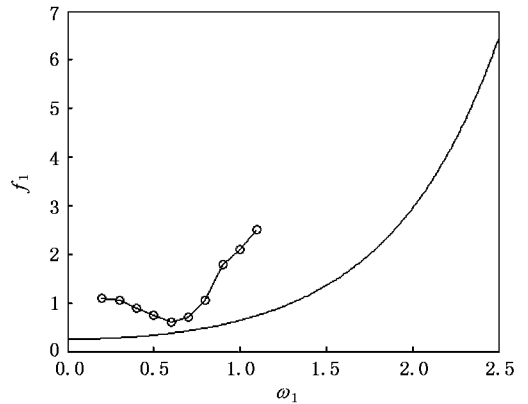


图 2 系统产生混沌的阈值示意图. 实线表示由 Melnikov 方法所得的结果, 而点“○”表示由最大 Lyapunov 指数方法所得结果

### 3. 约瑟夫森结混沌系统的谐和共振激励控制

引入谐和激励控制约瑟夫森结系统(2), 则受控系统为

$$\dot{x}_1 = x_2, \tag{8}$$

$$\dot{x}_2 = -\sin(x_1) + \epsilon[\rho - \alpha x_2 + f_1 \sin(\omega_1 t)] + u(t).$$

对于  $u(t)$  分两种情形考虑：

$$u(t) = \epsilon f_c \cos(\omega_2 t + \phi)$$

或

$$u(t) = \epsilon f_c \sin(x_1) \cos(\omega_2 t + \phi),$$

即施加的控制激励为外激情形或参激情形. 本节首先借助 Melnikov 方法, 分别研究施加激励为外激和参激两种情形的控制条件, 然后进一步分析两种控制方法的适用范围的差别.

### 3.1. 外激谐和共振激励控制

设所施加的控制激励为外激激励, 即  $u(t) = \epsilon f_c \cos(\omega_2 t + \phi)$  则受控系统(8)形式为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\sin(x_1) + \epsilon[\rho - \alpha x_2 + f_1 \sin(\omega_1 t)] \\ &\quad + \epsilon f_c \cos(\omega_2 t + \phi). \end{aligned} \tag{9}$$

由文献 [8, 9], 对应系统(9)的两条异宿轨道  $\Gamma_{\text{he}}^+$  和  $\Gamma_{\text{he}}^-$  的 Melnikov 函数为

$$M_{\pm}(t_0) = -C \pm A \sin(\omega_1 t_0) \pm B \cos(\omega_2 t_0 + \phi), \tag{10}$$

其中

$$\begin{aligned} A &= 2\pi f_1 \operatorname{sech}(\pi\omega_1/2), \\ B &= 2\pi f_c \operatorname{sech}(\pi\omega_2/2). \end{aligned}$$

为便于讨论, 此后都假定  $\rho = 0$ , 此时  $C = 8\alpha$ , 若  $\rho \neq 0$  时,  $C = C_{\pm} = 8\alpha \mp 2\pi\rho$ , 可用类似方法进行研究. 由参数的物理意义易知  $A > 0, B > 0, C > 0$ .

设系统在未受控情形 ( $f_c = 0$ ) 处于混沌, 则必有

$$A - C = r > 0, \tag{11}$$

其中  $r = 0$  表明稳定流形和不稳定流形相切, 即 Melnikov 函数的零点非简单零点. 为控制异宿混沌, 引入谐和激励 ( $f_c \neq 0$ ) 要求  $M_{\pm}(t_0)$  不变号. 针对外激情形, 下面分别考虑控制异宿轨道  $\Gamma_{\text{he}}^+$  和  $\Gamma_{\text{he}}^-$  附近的稳定流形和不稳定流形横截相交所引起的 Smale 马蹄意义下的混沌.

#### 3.1.1. 抑制异宿轨道 $\Gamma_{\text{he}}^+$ 附近的流形横截相交

设期望恒有  $M_+(t_0) < 0$  成立, 则又可分为两种情形考虑, 即恒成立  $A - C - B < 0$  或  $-A - C + B < 0$ . 先假定  $B > r$ , 即设下述条件恒成立：

$$A - C - B < 0, \tag{12}$$

将(10)式的系数带入(12)式, 得

$$f_c > \left(1 - \frac{C}{A}\right) p,$$

其中

$$p = \frac{f_1 \cosh(\pi\omega_2/2)}{\cosh(\pi\omega_1/2)}. \tag{13}$$

然而条件(13)并非  $M_+(t_0) < 0$  的充分条件, 为此引入如下引理<sup>[17]</sup>.

引理 1 设  $\omega_2/\omega_1$  为无理数, 则必存在  $t_0^*$  使得  $A \sin(\omega_1 t_0^*) + B \cos(\omega_2 t_0^* + \phi) > A - B$ .

引理 2 设  $\omega_2/\omega_1 = m/n$  (其中  $m, n$  为正整数), 则存在  $t_0^*$  使得

$$\sin(\omega_1 t_0^*) = -\cos(\omega_2 t_0^* + \phi) = 1$$

成立的充要条件为

$$\frac{m}{n} = \frac{4l + 2 - 2\phi/\pi}{4k + 1}, \tag{14}$$

其中  $k, l$  为整数.

引理 3 设

$$f(t, m, n) = \frac{1 - \cos(mt/n)}{1 - \cos(t)}$$

其中  $t$  为任意实数,  $m, n$  为不可约的正整数, 则函数  $f(t, m, n)$  有界当且仅当  $n = 1$ . 并且,  $n = 1$  时  $0 \leq f(t, m, 1) \leq m^2$ .

定理 1 设  $\omega_2/\omega_1 = m$  ( $m$  为正整数), 且存在整数  $k, l$  使得

$$m = \frac{4l + 2 - 2\phi/\pi}{4k + 1},$$

若  $f_{\min} < f_c < f_{\max}$ , 其中  $f_{\min} = \left(1 - \frac{C}{A}\right) p$ ,  $f_{\max} = \frac{p}{m^2}$ , 则恒有  $M_+(t_0) < 0$ .

证明 若任给实数  $t_0$ , 恒有

$$\begin{aligned} M_+(t_0) &= -C + A \sin(\omega_1 t_0) + B \cos(\omega_2 t_0 + \phi) \\ &< -C + A - B < 0, \end{aligned}$$

则结论成立. 又  $f_{\min} < f_c$ , 由不等式(12)和(13), 即得  $-C + A - B < 0$ , 因此只需证任给实数  $t_0$ , 有

$$A \sin(\omega_1 t_0) + B \cos(\omega_2 t_0 + \phi) < A - B.$$

令

$$t = \omega_1 t_0 - \frac{1}{2}\pi - 2k\pi,$$

利用条件：

$$\omega_2/\omega_1 = m = \frac{4l + 2 - 2\phi/\pi}{4k + 1},$$

则只需证  $\frac{1 - \cos(mt)}{1 - \cos(t)} < \frac{A}{B}$ . 由引理 3, 只需证  $m^2 < \frac{A}{B} = \frac{p}{f_c}$ , 此即  $f_c < f_{\max}$ . 证毕.

另一方面,亦可假定如下条件恒成立:

$$-A - C + B < 0, \tag{15}$$

将(10)式的系数带入(15)式,得

$$f_c < \left(1 + \frac{C}{A}\right)p,$$

其中

$$p = \frac{f_1 \cosh(\pi\omega_2/2)}{\cosh(\pi\omega_1/2)}. \tag{16}$$

然而条件(16)并非  $M_+(t_0) < 0$  的充分条件,为此引入如下引理<sup>[17]</sup>.

引理 4 设  $\omega_2/\omega_1$  为无理数,则必有  $t_0^*$  使得

$$A \sin(\omega_1 t_0^*) + B \cos(\omega_2 t_0^* + \phi) > -A + B.$$

定理 2 设  $\omega_2/\omega_1 = 1/m$  ( $m$  为正整数),且存在

整数  $k, l$  使得  $m = \frac{4k-1}{4l-2\phi/\pi}$ , 若

$$f'_{\min} < f_c < f'_{\max},$$

其中

$$f'_{\min} = pm^2 f'_{\max} = \left(1 + \frac{C}{A}\right)p,$$

则恒有  $M_+(t_0) < 0$ .

证明 若任给实数  $t_0$ , 恒有

$$M_+(t_0) = -C + A \sin(\omega_1 t_0) + B \cos(\omega_2 t_0 + \phi) < -C - A + B < 0,$$

则结论成立. 又  $f_c < f'_{\max}$ , 由不等式(15)和(16), 即得  $-C - A + B < 0$ , 因此只需证任给实数  $t_0$ , 有

$$A \sin(\omega_1 t_0) + B \cos(\omega_2 t_0 + \phi) < -A + B.$$

令  $t = \omega_2 t_0 + \phi - 2l\pi$ , 利用条件

$$\omega_1/\omega_2 = m = \frac{4k-1}{4l-2\phi/\pi},$$

则只需证

$$\frac{1 - \cos(mt)}{1 - \cos(t)} < \frac{B}{A}.$$

由引理 3, 只需证

$$m^2 < \frac{B}{A} = \frac{f_c}{p},$$

此即  $f_c > f'_{\min}$ . 证毕.

注 1 由定理 1 和 2 易知, 为抑制异宿轨道  $\Gamma_{he}^+$  附近的稳定流形和不稳定流形横截相交, 可引入外激谐和共振激励的频率使得  $\omega_2/\omega_1 = m$  (或  $\omega_2/\omega_1 = 1/m$ ), 通过选择合适的相位  $\phi$ , 使之与  $m$  及某整数

$k, l$  满足关系式  $m = \frac{4l+2-2\phi/\pi}{4k+1}$  (或  $m = \frac{4k-1}{4l-2\phi/\pi}$ ), 且若  $f_{\min} < f_c < f_{\max}$  (或  $f'_{\min} < f_c < f'_{\max}$ ),

则必恒有  $M_+(t_0) < 0$ , 从而达到抑制混沌的目的. 可见, 选取合适的相位  $\phi$  (可能为分段函数) 在控制非自治混沌系统中起着至关重要的作用. 然而, 值得注意的是, 利用上述类似方法, 可以验证, 不能选择参数确保不等式  $M_+(t_0) > 0$  恒成立.

### 3.1.2. 抑制异宿轨道 $\Gamma_{he}^-$ 附近的流形横截相交

设恒有  $M_-(t_0) < 0$ , 则可得到条件(13)或(16), 然而条件(13)并非  $M_-(t_0) < 0$  的充分条件, 为此引入如下引理<sup>[17]</sup>.

引理 5 设  $\omega_2/\omega_1$  为无理数, 则必存在  $t_0^*$  使得

$$-A \sin(\omega_1 t_0^*) - B \cos(\omega_2 t_0^* + \phi) > A - B.$$

引理 6 设  $\omega_2/\omega_1 = m/n$  (其中  $m, n$  为正整数), 则存在  $t_0^*$  使得

$$-\sin(\omega_1 t_0^*) = \cos(\omega_2 t_0^* + \phi) = 1$$

成立的充要条件为

$$\frac{m}{n} = \frac{4l-2\phi/\pi}{4k-1}, \tag{17}$$

其中  $k, l$  为整数.

类似于定理 1 的证明, 可以得到如下结论:

定理 3 设  $\omega_2/\omega_1 = m$  ( $m$  为正整数), 且存在整数  $k, l$  使得

$$m = \frac{4l-2\phi/\pi}{4k-1},$$

若

$$f_{\min} < f_c < f_{\max},$$

其中

$$f_{\min} = \left(1 - \frac{C}{A}\right)p, f_{\max} = \frac{p}{m^2},$$

则恒有  $M_-(t_0) < 0$ .

另一方面, 设恒有  $M_-(t_0) < 0$ , 可得到条件(16), 而条件(16)亦非  $M_-(t_0) < 0$  的充分条件, 为此引入如下引理<sup>[17]</sup>:

引理 7 设  $\omega_2/\omega_1$  为无理数, 则必存在  $t_0^*$  使得下式成立:

$$-A \sin(\omega_1 t_0^*) - B \cos(\omega_2 t_0^* + \phi) > -A + B.$$

类似于定理 2 的证明, 我们可以得到如下结论:

定理 4 设  $\omega_2/\omega_1 = 1/m$  ( $m$  为正整数), 且存在整数  $k, l$  使得

$$m = \frac{4k+1}{4l+2-2\phi/\pi},$$

若

$$f'_{\min} < f_c < f'_{\max},$$

其中

$$f'_{\min} = pm^2 f'_{\max} = \left(1 + \frac{C}{A}\right)p,$$

则恒有  $M_-(t_0) < 0$ .

注2 由定理3和定理4易知,为抑制异宿轨道  $\Gamma_{\text{he}}^-$  附近的稳定流形和不稳定流形横截相交,可引入外激谐和共振激励的频率使得  $\omega_2/\omega_1 = m$  (或  $\omega_2/\omega_1 = 1/m$ ) 通过选择合适的相位  $\phi$ ,使之与  $m$  及某整数  $k, l$  满足关系式

$$m = \frac{4l - 2\phi/\pi}{4k - 1}$$

或

$$m = \frac{4k + 1}{4l + 2 - 2\phi/\pi},$$

且若

$$f_{\min} < f_c < f_{\max}$$

或

$$f'_{\min} < f_c < f'_{\max},$$

则必恒有  $M_-(t_0) < 0$ ,从而达到抑制混沌的目的.然而,值得注意的是,利用上述类似方法,我们可以验证,不能选择参数确保不等式  $M_-(t_0) > 0$  恒成立.

综合3.1.1和3.1.2的结论,从定理1和定理3可以得出,为抑制异宿轨道  $\Gamma_{\text{he}}^+$  和  $\Gamma_{\text{he}}^-$  附近的稳定流形和不稳定流形横截相交所引起的Smale马蹄意义下的混沌,只要频率满足  $\omega_2/\omega_1 = m$  ( $m$  为正整数),激励的振幅有  $f_{\min} < f_c < f_{\max}$ ,针对异宿轨道  $\Gamma_{\text{he}}^+$  (或  $\Gamma_{\text{he}}^-$ ),为控制异宿混沌,选择相位:当  $m = 4k + 1$  ( $k$  为某非负整数),则可选择  $\phi = \frac{\pi}{2}$ ; 当  $m = 4k + 2$ ,则可选择相位  $\phi = 0$  (或  $\phi = \pi$ ); 当  $m = 4k + 3$ ,则可选择相位  $\phi = \frac{3\pi}{2}$ ; 当  $m = 4k + 4$ ,则可选择相位  $\phi = \pi$  (或  $\phi = 0$ ).可见,选取合适的相位  $\phi$  (可能为分段函数)在控制非自治混沌系统中起着至关重要的作用.而由定理2和定理4知,若  $\omega_2/\omega_1 = 1/m$  ( $m$  为正整数),则针对异宿轨道  $\Gamma_{\text{he}}^+$  (或  $\Gamma_{\text{he}}^-$ ),为控制异宿混沌:当  $m = 1$  时,且  $f'_{\min} < f_c < f'_{\max}$ ,可选择相位  $\phi = \frac{\pi}{2}$ ; 当  $m \geq 2$  时,总有  $f'_{\min} > f'_{\max}$ ,因此若取  $\omega_1 = m\omega_2$ ,则任意选取其他参数都不能确保一定能控制异宿混沌.

因此当  $m = 1$  时,针对异宿轨道  $\Gamma_{\text{he}}^+$  (或  $\Gamma_{\text{he}}^-$ ) 选择相位  $\phi = \frac{\pi}{2}$ ,则外激的振幅为如下表达式时,都可

以控制异宿混沌:

$$f_{\min} = \left(1 - \frac{C}{A}\right)p < f_c < f'_{\max} \\ = \left(1 + \frac{C}{A}\right)p$$

此时我们有

$$1 - \frac{C}{A} < \frac{f_c}{p} = \frac{B}{A} < 1 + \frac{C}{A},$$

即

$$|A - B| < C,$$

而

$$M_{\pm}(t_0) = -C \pm (A - B) \sin(\omega_1 t_0) < 0$$

恒成立,显然不会产生异宿混沌.当  $m \geq 2$  时,若取  $\omega_1 = m\omega_2$ ,则任意选取其他参数都不能确保能控制异宿混沌;而若取  $\omega_2 = m\omega_1$ ,再如前所述选取适当的相位,只要  $f_{\min} < f_c < f_{\max}$ ,就可以控制异宿混沌.当  $m = 1$  时,定义

$$\Delta f_c(1) \triangleq f'_{\max} - f_{\min} = \frac{2C}{A}p;$$

当  $m \geq 2$ ,定义

$$\Delta f_c(m) \triangleq f_{\max} - f_{\min} = \left(\frac{1}{m^2} + \frac{C}{A} - 1\right)p.$$

由此  $m = 1$  时,总有  $\Delta f_c(1) > 0$ ,即施加外激激励取主共振情形总可以通过选择参数控制异宿混沌;而当  $m \geq 2$  时,若同时有  $\Delta f_c(m) < 0$  (即  $m > \sqrt{\frac{A-C}{A}}$ ) 则不能控制异宿混沌.

由文献[8,9]知,Melnikov函数有简单零点是系统出现Smale马蹄意义下的异宿混沌(混沌鞍)的充要条件,也应当是系统出现混沌吸引子(稳态混沌)的一个前提条件,因此,只要如上述选择控制参数使得如下不等式恒成立就可能抑制稳态混沌:

$$M_{\pm}(t_0) = -C \pm (A - B) \sin(\omega_1 t_0) < 0$$

下面用数值方法来研究这一点.对系统(9),取定参数  $\varepsilon = 1, \rho = 0, \alpha = 0.2, \omega_1 = 0.6$  (除非重述,以后4个参数都取定值),则不施加控制激励(即  $f_c = 0$ )时,系统的最大Lyapunov指数随振幅  $f_1$  的变化如图3所示,由图可知,当  $f_1 = 0.75$  时,最大Lyapunov指数  $Lya \approx 0.13 > 0$ ,Poincare截面如图4所示,此时系统处于混沌;为控制混沌,施加控制激励(即  $f_c \neq 0$ )取  $\omega_2 = \omega_1, \phi = \frac{\pi}{2}$ ,此时取  $f_c \in (f_{\min}, f'_{\max}) \approx (0.374, 1.126)$  都可以控制住混沌,系统的最大Lyapunov指数随振幅  $f_c$  的变化如图5所示,由图知实际的控制

范围比理论结果更大, 设  $f_c = 0.4$ , 则最大 Lyapunov 指数  $L_{ya} \approx -0.10 < 0$ , 此时系统处于稳定的周期态, 相应的 Poincare 截面如图 6 所示.

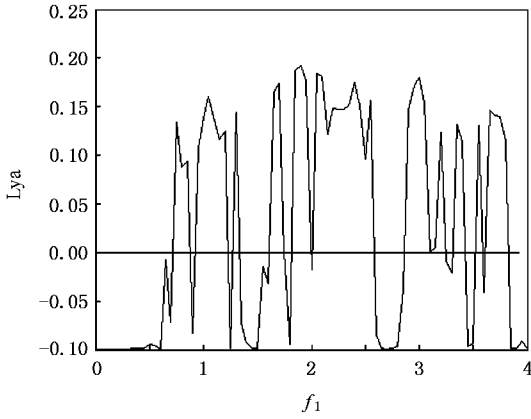


图 3  $f_c = 0$  时最大 Lyapunov 指数随振幅  $f_1$  的变化图

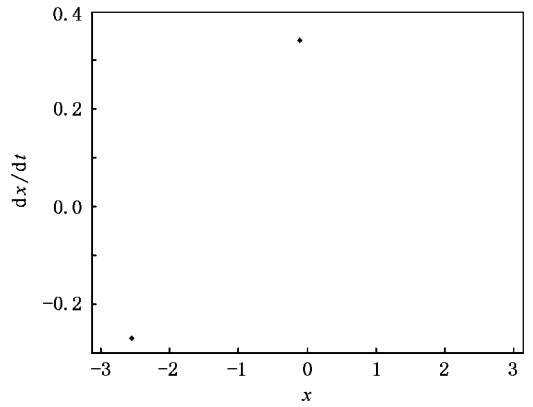


图 6  $f_c = 0.4$  时的 Poincare 截面图

借助 Melnikov 方法, 可以从定性的角度说明, 选取合适的相位  $\phi$  在控制非自治混沌系统中有相当重要的作用(因为相位  $\phi$  的选择会影响 Melnikov 函数的符号). 下面采用数值方法来论证, 取参数  $\omega_2 = 3\omega_1 = 3$ ,  $f_1 = 2.3$ ,  $f_c = 2.5$ , 最大 Lyapunov 指数随控制激励相位  $\phi$  的变化如图 7 所示, 由图可知通过调节相位确实可用来控制混沌.

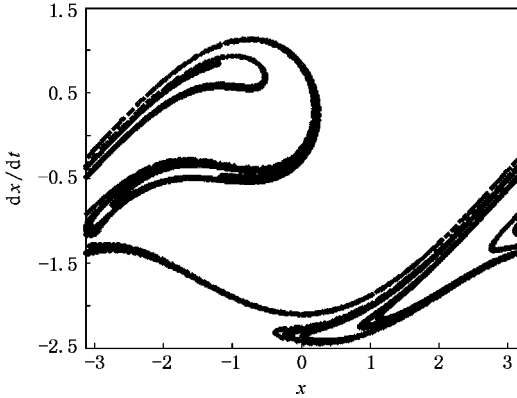


图 4  $f_c = 0$  时的 Poincare 截面图

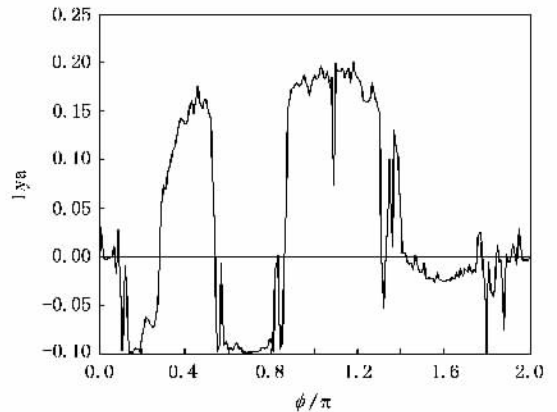


图 7  $\omega_2 = 3\omega_1 = 3$ ,  $f_1 = 2.3$ ,  $f_c = 2.5$  时, 最大 Lyapunov 指数随外激励控制激励相位  $\phi$  的变化

### 3.2. 参激谐和共振激励控制

设所施加的控制激励为参激激励, 即  $u(t) = \epsilon f_c \sin(x_1) \cos(\omega_2 t + \phi)$ , 则受控系统(8)形式变为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\sin(x_1) + \epsilon[\rho - ax_2 + f_1 \sin(\omega_1 t)] \\ &\quad + \epsilon f_c \sin(x_1) \cos(\omega_2 t + \phi). \end{aligned} \quad (18)$$

由文献[8,9]对应其未扰系统的两条异宿轨道  $\Gamma_{hc}^+$  和  $\Gamma_{hc}^-$  的 Melnikov 函数为

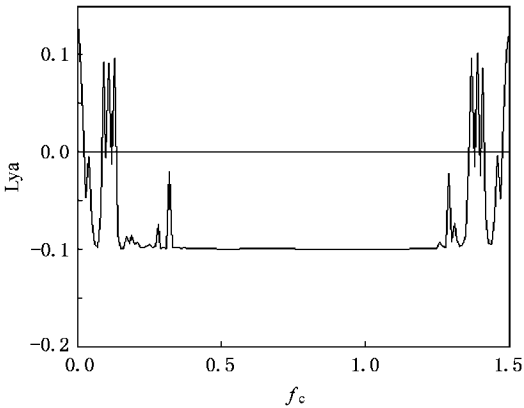


图 5 施加控制激励时, 最大 Lyapunov 指数随外激励控制激励振幅  $f_c$  的变化图

$$M_{\pm}(t_0) = -C \pm A \operatorname{sh}(\omega_1 t_0) - B' \operatorname{sh}(\omega_2 t_0 + \phi), \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= 2\pi f_1 \operatorname{sech}(\pi\omega_1/2), \\ B' &= 2\pi f_c \omega_2^2 \operatorname{csch}(\pi\omega_2/2), \\ C &= 8\alpha, \end{aligned}$$

由参数的物理意义易知  $A > 0, B' > 0, C > 0$ .

设系统在未受控情形 ( $f_c = 0$ ) 处于混沌, 则必有

$$A - C = r > 0, \quad (20)$$

其中  $r = 0$  表明稳定流形和不稳定流形相切, 即 Melnikov 函数的零点非简单零点. 为控制异宿混沌, 引入谐和激励 ( $f_c \neq 0$ ), 要求  $M_{\pm}(t_0)$  不变号. 针对参激情形, 下面分别考虑控制异宿轨道  $\Gamma_{\text{he}}^+$  和  $\Gamma_{\text{he}}^-$  附近的稳定流形和不稳定流形横截相交所引起的 Smale 马蹄意义下的混沌.

### 3.2.1. 抑制异宿轨道 $\Gamma_{\text{he}}^+$ 附近的流形横截相交

设期望恒有  $M_+(t_0) < 0$  成立, 则又可分为两种情形考虑, 即恒成立  $A - C - B' < 0$  或  $-A - C + B' < 0$ . 先假定  $B' > r$ , 即设下述条件恒成立:

$$A - C - B' < 0, \quad (21)$$

将 (19) 式的系数带入 (21) 式, 得

$$f_c > \left(1 - \frac{C}{A}\right)p',$$

其中

$$p' = \frac{f_1 \operatorname{sh}(\pi\omega_2/2)}{\omega_2^2 \operatorname{cosh}(\pi\omega_1/2)}, \quad (22)$$

然而条件 (22) 并非  $M_+(t_0) < 0$  的充分条件, 为此引入如下引理<sup>[17]</sup>:

引理 8 设  $\omega_2/\omega_1$  为无理数, 则必存在  $t_0^*$  使得

$$A \operatorname{sh}(\omega_1 t_0^*) - B' \operatorname{sh}(\omega_2 t_0^* + \phi) > A - B'.$$

引理 9 设  $\omega_2/\omega_1 = m/n$  (其中  $m, n$  为正整数) 则存在  $t_0^*$  使得

$$\operatorname{sh}(\omega_1 t_0^*) = \operatorname{sh}(\omega_2 t_0^* + \phi) = 1$$

成立的充要条件为

$$\frac{m}{n} = \frac{4l + 1 - 2\phi/\pi}{4k + 1}, \quad (23)$$

其中  $k, l$  为整数.

类似于定理 1 的证明, 可以得到如下结论:

定理 5 设  $\omega_2/\omega_1 = m$  ( $m$  为正整数), 且存在整

数  $k, l$  使得  $m = \frac{4l + 1 - 2\phi/\pi}{4k + 1}$  若

$$\bar{f}_{\min} < f_c < \bar{f}_{\max},$$

其中

$$\bar{f}_{\min} = \left(1 - \frac{C}{A}\right)p', \quad \bar{f}_{\max} = \frac{p'}{m^2},$$

则恒有  $M_+(t_0) < 0$ .

另一方面, 亦可假定如下条件恒成立:

$$-A - C + B' < 0, \quad (24)$$

将 (19) 式的系数带入 (24) 式, 得

$$f_c < \left(1 + \frac{C}{A}\right)p',$$

其中

$$p' = \frac{f_1 \operatorname{sh}(\pi\omega_2/2)}{\omega_2^2 \operatorname{cosh}(\pi\omega_1/2)}, \quad (25)$$

然而条件 (25) 并非  $M_+(t_0) < 0$  的充分条件, 为此引入如下引理<sup>[17]</sup>:

引理 10 设  $\omega_2/\omega_1$  为无理数, 则必存在  $t_0^*$  使得下式成立:

$$A \operatorname{sh}(\omega_1 t_0^*) - B' \operatorname{sh}(\omega_2 t_0^* + \phi) > -A + B'.$$

类似于定理 1 的证明, 易得:

定理 6 设  $\omega_2/\omega_1 = 1/m$  ( $m$  为正整数), 且存在

整数  $k, l$  使得  $m = \frac{4k - 1}{4l - 1 - 2\phi/\pi}$  若

$$\bar{f}'_{\min} < f_c < \bar{f}'_{\max},$$

其中

$$\bar{f}'_{\min} = p'm^2 \bar{f}'_{\max} = \left(1 + \frac{C}{A}\right)p',$$

则恒有  $M_+(t_0) < 0$ .

注 3 由定理 5 和定理 6 易知, 为抑制异宿轨道  $\Gamma_{\text{he}}^+$  附近的稳定流形和不稳定流形横截相交, 可引入外激谐和共振激励的频率使得  $\omega_2/\omega_1 = m$  (或  $\omega_2/\omega_1 = 1/m$ ) 通过选择合适的相位  $\phi$ , 使之与  $m$  及某整数  $k, l$  满足关系式

$$m = \frac{4l + 1 - 2\phi/\pi}{4k + 1}$$

或

$$m = \frac{4k - 1}{4l - 2 - 2\phi/\pi},$$

且若

$$\bar{f}_{\min} < f_c < \bar{f}_{\max}$$

或

$$\bar{f}'_{\min} < f_c < \bar{f}'_{\max},$$

则必恒有  $M_+(t_0) < 0$ , 从而达到抑制混沌的目的. 可见, 选取合适的相位  $\phi$  在控制非自治混沌系统中起着至关重要的作用. 然而, 利用上述类似方法, 我们可以验证, 不能选择参数确保不等式  $M_+(t_0) > 0$  恒成立.

### 3.2.2. 抑制异宿轨道 $\Gamma_{\text{he}}^-$ 附近的流形横截相交

设恒有  $M_-(t_0) < 0$  则可得到条件(22)或(25), 然而条件(22)并非  $M_-(t_0) < 0$  的充分条件, 为此引入如下引理<sup>[17]</sup>:

**引理 11** 设  $\omega_2/\omega_1$  为无理数, 则必存在  $t_0^*$  使得下式成立:

$$-A \sin(\omega_1 t_0^*) - B' \sin(\omega_2 t_0^* + \phi) > A - B'.$$

**引理 12** 设  $\omega_2/\omega_1 = m/n$  (其中  $m, n$  为正整数) 则存在  $t_0^*$  使得

$$-\sin(\omega_1 t_0^*) = \sin(\omega_2 t_0^* + \phi) = 1$$

成立的充要条件为

$$\frac{m}{n} = \frac{4l + 1 - 2\phi/\pi}{4k - 1}, \quad (26)$$

其中  $k, l$  为整数.

类似于定理 1 的证明, 可以得到如下结论:

**定理 7** 设  $\omega_2/\omega_1 = m$  ( $m$  为正整数), 且存在整数  $k, l$  使得

$$m = \frac{4l + 1 - 2\phi/\pi}{4k - 1},$$

若

$$\bar{f}_{\min} < f_c < \bar{f}_{\max},$$

其中

$$\bar{f}_{\min} = (1 - \frac{C}{A})p', \quad \bar{f}_{\max} = \frac{p'}{m^2},$$

则恒有  $M_-(t_0) < 0$ .

另一方面, 设恒有  $M_-(t_0) < 0$ , 可得到条件(25), 而条件(25)亦非  $M_-(t_0) < 0$  的充分条件, 为此引入如下引理<sup>[17]</sup>:

**引理 13** 设  $\omega_2/\omega_1$  为无理数, 则必存在  $t_0^*$  使得下式成立:

$$-A \sin(\omega_1 t_0^*) - B' \sin(\omega_2 t_0^* + \phi) > -A + B'.$$

类似于定理 2 的证明, 可以得到如下结论:

**定理 8** 设  $\omega_2/\omega_1 = 1/m$  ( $m$  为正整数), 且存在整数  $k, l$  使得

$$m = \frac{4k + 1}{4l - 1 - 2\phi/\pi},$$

若

$$\bar{f}'_{\min} < f_c < \bar{f}'_{\max},$$

其中

$$\bar{f}'_{\min} = p'm^2 \bar{f}'_{\min} = (1 + \frac{C}{A})p',$$

则恒有  $M_-(t_0) < 0$ .

**注 4** 由定理 7 和定理 8 易知, 为抑制异宿轨道

$\Gamma_{\text{he}}^-$  附近的稳定流形和不稳定流形横截相交, 可引入外激谐和共振激励的频率使得  $\omega_2/\omega_1 = m$  (或  $\omega_2/\omega_1 = 1/m$ ) 通过选择合适的相位  $\phi$ , 使之与  $m$  及某整数  $k, l$  满足关系式

$$m = \frac{4k + 1 - 2\phi/\pi}{4k - 1}$$

或

$$m = \frac{4k + 1}{4l - 1 - 2\phi/\pi},$$

且若

$$\bar{f}_{\min} < f_c < \bar{f}_{\max}$$

或

$$\bar{f}'_{\min} < f_c < \bar{f}'_{\max},$$

则必恒有  $M_-(t_0) < 0$ , 从而达到抑制混沌的目的. 然而, 利用上述类似方法, 可以验证, 不能选择参数确保不等式  $M_-(t_0) > 0$  恒成立.

综合 3.2.1 和 3.2.2 的结论, 从定理 5 和定理 7 可以得出, 为抑制异宿轨道  $\Gamma_{\text{he}}^+$  和  $\Gamma_{\text{he}}^-$  附近的稳定流形和不稳定流形横截相交所引起的 Smale 马蹄意义下的混沌, 只要频率满足  $\omega_2/\omega_1 = m$  ( $m$  为正整数), 激励的振幅有  $\bar{f}_{\min} < f_c < \bar{f}_{\max}$ , 针对异宿轨道  $\Gamma_{\text{he}}^+$  (或  $\Gamma_{\text{he}}^-$ ), 为控制异宿混沌, 选择相位: 当  $m = 4k + 1$  ( $k$  为某非负整数), 则可选择  $\phi = \alpha$  (或  $\phi = \pi$ ); 当  $m = 4k + 2$ , 则可选择  $\phi = \frac{3\pi}{2}$ ; 当  $m = 4k + 3$ , 则可选择  $\phi = \pi$  (或  $\phi = 0$ ); 当  $m = 4k + 4$ , 则可选择  $\phi = \frac{\pi}{2}$ . 而由

定理 6 和定理 8 知, 若  $\omega_2/\omega_1 = 1/m$  ( $m$  为正整数), 则针对异宿轨道  $\Gamma_{\text{he}}^+$  (或  $\Gamma_{\text{he}}^-$ ), 为控制异宿混沌: 当  $m = 1$  时, 且  $\bar{f}_{\min} < f_c < \bar{f}_{\max}$ , 可选择相位  $\phi = \alpha$  或  $\phi = \pi$ ; 当  $m \geq 2$  时, 总有  $\bar{f}'_{\min} > \bar{f}'_{\max}$ , 因此若取  $\omega_1 = m\omega_2$ , 则任意选取其他参数都不能确保一定能控制异宿混沌.

值得一提的是, 文献[17]认为  $M_{\pm}(t_0) < 0$  恒成立的必要条件是(21)式恒成立, 实际上是不正确的,  $M_{\pm}(t_0) < 0$  恒成立的必要条件应当是条件(21)或(24)式两者之一恒成立; 同时, 文献[17]认为  $M_{\pm}(t_0) < 0$  的充要条件是  $\bar{f}_{\min} < f_c < \bar{f}_{\max}$ , 这也是不正确的, 实际上至少还应该包含  $\bar{f}'_{\min} < f_c < \bar{f}'_{\max}$ . 相比而言, 本文的结果扩大了控制异宿混沌的参数范围.

因此当  $m = 1$  时, 针对异宿轨道  $\Gamma_{\text{he}}^+$  (或  $\Gamma_{\text{he}}^-$ ) 选择相位  $\phi = \alpha$  (或  $\phi = \pi$ ), 则外激的振幅  $\bar{f}_{\min} = (1 -$



$\frac{C}{A} p' < f_c < \bar{f}'_{\max} = (1 + \frac{C}{A}) p'$  时, 都可以控制异宿混沌. 此时有  $1 - \frac{C}{A} < \frac{f_c}{p'} = \frac{B'}{A} < 1 + \frac{C}{A}$ , 即  $|A - B'| < C$ , 而  $M_{\pm}(t_0) = -C \pm (A - B') \sin(\omega_1 t_0) < 0$  恒成立, 显然不会产生异宿混沌. 当  $m \geq 2$  时, 若取  $\omega_1 = m\omega_2$ , 则任意选取其他参数都不能保证一定能控制异宿混沌; 而若取  $\omega_2 = m\omega_1$ , 再如上选取适当的相位, 只要  $\bar{f}_{\min} < f_c < \bar{f}_{\max}$  就可以控制异宿混沌. 当  $m = 1$  时, 定义  $\Delta \bar{f}'_c \triangleq \bar{f}'_{\max} - \bar{f}'_{\min} = \frac{2C}{A} p'$ ; 当  $m \geq 2$  时, 定义  $\Delta \bar{f}'_c \triangleq \bar{f}'_{\max} - \bar{f}'_{\min} = (\frac{1}{m^2} + \frac{C}{A} - 1) p'$ . 由此, 当  $m = 1$  时, 总有  $\Delta \bar{f}'_c(1) > 0$ , 即施加参激激励取主共振情形总可以通过选择参数控制异宿混沌; 当  $m \geq 2$  时, 若同时有  $\Delta \bar{f}'_c(m) < \alpha$  (即  $m > \sqrt{\frac{A-C}{A}}$ ), 则不能控制异宿混沌.

下面采用数值方法考察 Melnikov 方法所得结论. 对系统 (18) 取参数  $\omega_1 = 0.8, f_1 = 1.1$ , 由图 3 知  $f_c = 0$  时, 系统处于混沌, 为控制混沌, 施加控制激励 (即  $f_c \neq 0$ ), 取  $\omega_2 = \omega_1$ , 针对异宿轨道  $\Gamma_{\text{he}}^+$  (或  $\Gamma_{\text{he}}^-$ ) 选择相位  $\phi = 0$  (或  $\phi = \pi$ ), 此时取  $f_c \in (\bar{f}_{\min}, \bar{f}_{\max}) \approx (0.66, 1.68)$  都可以控制住混沌, 系统的最大 Lyapunov 指数随振幅  $f_c$  的变化如图 8 所示. 为验证相位  $\phi$  对混沌控制的影响, 取  $\omega_2 = 2\omega_1 = 1.6, f_1 = 1.1, f_c = 2.1$ , 可得最大 Lyapunov 指数随控制激励相位  $\phi$  的变化, 如图 9 所示, 由图可知通过调节相位确实可用来控制混沌.

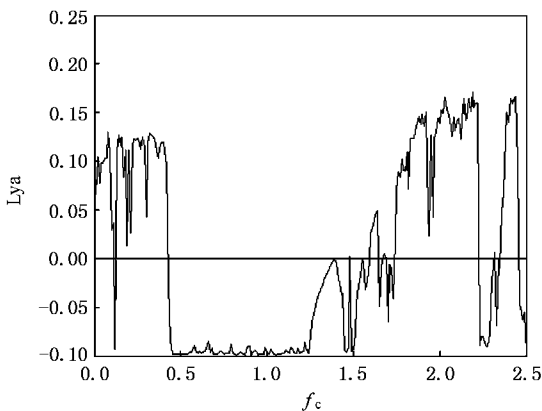


图 8  $f_c \neq 0, \omega_2 = \omega_1, \phi = 0$  时最大 Lyapunov 指数随参激控制激励振幅  $f_c$  的变化

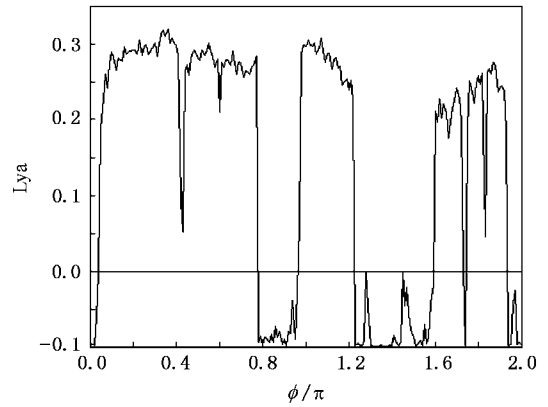


图 9  $\omega_2 = 2\omega_1 = 1.6, f_1 = 1.1, f_c = 2.1$  时最大 Lyapunov 指数随参激控制激励相位  $\phi$  的变化

### 4. 外激与参激两种共振激励控制效果的比较

针对外激激励控制情形, 如果利用主共振 ( $\omega_2/\omega_1 = m = 1$ ) 来控制异宿混沌, 则控制激励的振幅变化范围可取为  $(f_{\min}, f_{\max})$ , 且  $\Delta f_c \triangleq f'_{\max} - f_{\min} = \frac{2C}{A} p$ , 其中  $p = \frac{f_1 \cosh(\pi\omega_2/2)}{\cosh(\pi\omega_1/2)}$ ; 若  $\omega_2/\omega_1 = m > 2$ , 则控制激励的振幅变化范围可取为  $(f_{\min}, f_{\max})$ , 且  $\Delta f_c \triangleq f'_{\max} - f_{\min} = (\frac{1}{m^2} + \frac{C}{A} - 1) p$ . 针对参激激励控制情形, 如果利用主共振 ( $m = 1$ ) 来控制异宿混沌, 则控制激励的振幅变化范围可取为  $(\bar{f}_{\min}, \bar{f}'_{\max})$ , 且  $\Delta \bar{f}'_c \triangleq \bar{f}'_{\max} - \bar{f}_{\min} = \frac{2C}{A} p'$ , 其中  $p' = \frac{f_1 \sinh(\pi\omega_2/2)}{\omega_2^2 \cosh(\pi\omega_1/2)}$ ; 若  $m > 2$ , 则控制激励的振幅变化范围可取为  $(\bar{f}_{\min}, \bar{f}_{\max})$ , 且可以得到  $\Delta \bar{f}'_c \triangleq \bar{f}_{\max} - \bar{f}_{\min} = (\frac{1}{m^2} + \frac{C}{A} - 1) p'$ . 由此可知, 施加相同频率之共振激励时, 对于外激与参激两种不同的控制方式, 两者振幅的最大变化范围值之比为  $R_f = \frac{\Delta f_c}{\Delta \bar{f}'_c} = \frac{p}{p'} = \omega_2^2 \coth(\pi\omega_2/2)$ , 该比值仅依赖于所施加激励的频率, 与所施加激励的共振阶数  $m$  无关, 如图 10 所示, 随着频率  $\omega_2$  的增加, 比值  $R_f(\omega_2)$  迅速增加, 且  $R_f(0.95) \approx 1$ , 由图 10 可知, 当  $\omega_2 < 0.95$  时,  $R_f < 1$ , 此时施加参激共振激励的振幅控制范围大于外激情形; 而当  $\omega_2 > 0.95$  时,  $R_f > 1$ , 此时施加外激共振激励的振幅控制范围大于参激情形, 并且随着频率  $\omega_2$  的增加, 前者将大大超

过后者.

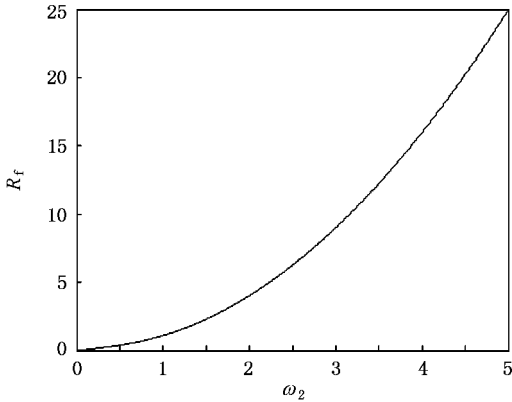


图 10 采用外激与参激两种不同的控制方式时,两者振幅的最大变化范围值之比  $R_f$  随激励频率  $\omega_2$  的变化图

## 5. 结 论

本文针对一类谐和激励作用下的约瑟夫森结系

统,首先由 Melnikov 方法给出了异宿混沌生成的阈值,然后通过引入外激和参激两种形式的谐和共振激励,借助 Melnikov 方法探讨了异宿混沌的抑制,分别推导出激励的振幅控制范围以及相位与共振阶数之间所必须满足的关系式,同时考察了相位对混沌控制的影响,最后比较了外激和参激两种共振激励对约瑟夫森结混沌系统的振幅控制范围的大小.

本文从定性的角度进一步说明,对于施加共振激励,不论外激或参激,选取合适的相位  $\phi$  在控制非自治混沌系统中都有相当重要的作用(因为相位  $\phi$  的选择会影响 Melnikov 函数的符号),数值方法证实了通过调节相位确实可用来控制混沌,如图 7 和图 9 所示.另一方面,通过比较外激和参激两种共振激励对约瑟夫森结异宿混沌系统之控制效果的差别,我们发现,从振幅选择范围的大小角度看,对于较小的共振频率,宜采用参激激励,而对于较大的共振频率,宜采用外激激励.

- [ 1 ] Parthasarathy S, Sinha S 1995 *Phys. Rev. E* **51** 6239
- [ 2 ] Ramesh M, Narayanan S 1999 *Chaos, Soliton & Fractals* **10** 1473
- [ 3 ] Wieland C 2002 *Phys. Rev. E* **66** 016205
- [ 4 ] Braiman Y, Goldhirsch I 1991 *Phys. Rev. Lett.* **20** 2545
- [ 5 ] Li S, Xu W, Li R H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1049 (in Chinese)  
[ 李 爽、徐 伟、李瑞红 2006 物理学报 **55** 1049 ]
- [ 6 ] Tang J S, Fu W B, Li K A 2002 *Chin. Phys.* **11** 1004
- [ 7 ] Lei Y M, Xu W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5103 (in Chinese) [ 雷佑铭、徐 伟 2007 物理学报 **56** 5103 ]
- [ 8 ] Wiggins S 1988 *Global Bifurcations and Chaos: Analytical Methods* (New York: Springer-Verlag)
- [ 9 ] Liu Z R 1994 *Perturbation Criteria for Chaos* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [ 刘曾荣 1994 混沌的微扰判据(上海:上海科技教育出版社) ]
- [ 10 ] Lima R, Pettini M 1990 *Phys. Rev. A* **41** 726
- [ 11 ] Kivshar Y S, Rüdelsperger F, Benner H 1994 *Phys. Rev. E* **49** 319
- [ 12 ] Yagasaki K, Sakata M, Kimura K 1990 *Journal of Applied Mechanics* **57** 209
- [ 13 ] Haquang N, Mook D T, Plaut R H 1987 *Journal of Applied Mechanics* **118** 425
- [ 14 ] Belhaq M, Houssni M 1999 *Nonlinear Dynamics* **18** 1
- [ 15 ] Cicogna G, Fronzoni L 1993 *Phys. Rev. E* **47** 4585
- [ 16 ] Qu Z L, Hu G, Yang G L, Qin G R 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 1736
- [ 17 ] Chacón R 1995 *Phys. Rev. E* **51** 761
- [ 18 ] Chacón R 1995 *Phys. Rev. E* **52** 2330
- [ 19 ] Chacón R 1998 *Phys. Lett. A* **249** 431
- [ 20 ] Chacón R, Balibrea F, Lopez M A 2001 *Phys. Lett. A* **279** 38
- [ 21 ] Leung A Y T, Liu Z R 2004 *Int. J. Bifurcation & Chaos* **14** 1455
- [ 22 ] Bartucelli M, Christiansen P L, Pedersen N F, Soerensen M P 1986 *Phys. Rev. B* **33** 4686
- [ 23 ] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, Vastano J A 1985 *Physica D* **16** 285



# Chaos control in the Josephson junction with a resonant harmonic excitation<sup>\*</sup>

Lei You-Ming<sup>†</sup> Xu Wei

( *Department of Applied Mathematics , Northwestern Polytechnical University , Xi 'an 710072 , China* )

( Received 13 September 2007 ; revised manuscript received 13 November 2007 )

## Abstract

In the present paper , the control of chaos in the Josephson junction with two different kinds of resonant harmonic excitations , namely the additive and parametric excitations , are investigated in detail. With the Melnikov method , we have obtained the regions of excitation amplitude in which heteroclinic chaos may be generated or suppressed. Meanwhile , for suppressing the heteroclinic chaos , we have determined the prerequisite relationships between parameters of the system excitation and the control excitation. The analytical results show that phase difference between the two excitations has important effect. Moreover , numerical methods show that the phase control method is feasible not only for controlling heteroclinic chaos , but also for controlling other types of chaos in nonautonomous systems. Comparing the effect of an additive harmonious excitation with that of a parametric one , we find the former one is more effective at the small resonant frequencies , while the latter one is more effective at the large ones.

**Keywords** : chaos control , resonant harmonic excitation , phase control , Melnikov method

**PACC** : 0545

---

<sup>\*</sup> Project supported by the State Key Program of National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10332030 ) and the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10502042 ).

<sup>†</sup> E-mail : leiyouming@nwpu.edu.cn