

# 四阶 Colpitts 混沌振荡器\*

禹思敏†

(广东工业大学自动化学院, 广州 510006)

(2007 年 8 月 20 日收到, 2007 年 11 月 18 日收到修改稿)

提出了一种新的四阶 Colpitts 混沌振荡器. 理论设计与电路实验表明, 在三阶 Colpitts 混沌振荡器中的电感两端并联一个电容器  $C_3$ , 可构建出一种四阶 Colpitts 混沌振荡器. 当  $C_3$  的取值变化时, 电路的谐振频率随之改变, 从而使该振荡器经过倍周期分岔进入混沌状态. 对四阶 Colpitts 混沌振荡器的平衡点、分岔和李氏指数等基本动力学问题进行了分析. 最后通过数值仿真和电路实验证实了这一方法的可行性.

关键词: 四阶 Colpitts 混沌振荡器, 混沌吸引子, 电路实现

PACC: 0545

## 1. 引 言

混沌电子电路的设计与硬件实现是近年来非线性系统与混沌领域的一个热点课题, 其研究历史可追溯到 1927 年有关 Van Der Pol 振荡器的分析和实验<sup>[1,2]</sup>. 直到 20 世纪 80 年代初期蔡氏电路的问世时<sup>[3-5]</sup>, 这一领域正为人们所关注和重视, 新的混沌电路不断出现, 如多涡卷 Chua 电路、Lorenz 电路、广义 Jerk 电路、基于时滞函数和饱和函数的多涡卷电路、多折叠环面电路、MCK 多涡卷超混沌电路和 Colpitts 电路等<sup>[6-21]</sup>. 最近, Li 和 Chen 综述了这一领域的一系列研究进展<sup>[18]</sup>.

1994 年, Kennedy<sup>[16]</sup>基于非线性振荡理论, 在电容三点式正弦波振荡器的基础上, 提出了三阶 Colpitts 混沌振荡器, 并给出了电路设计与实验结果. 此后不久, Maggio 等人<sup>[17]</sup>还进一步给出了有关三阶 Colpitts 混沌振荡器更一般的理论分析与设计结果, 为深入研究 Colpitts 混沌振荡器提供了理论和实验依据.

我们研究了在三阶 Colpitts 混沌电路的基础上构建出更为一般的高阶 Colpitts 混沌振荡器问题, 为高阶正弦波振荡器过渡到高阶混沌振荡器的分析与设计提供一种实际可行的方法. 本文的理论分析与

电路实验结果表明, 在现有三阶 Colpitts 混沌电路中的电感  $L$  两端并联一个电容  $C_3$ , 可形成一个具有并联谐振选频特性的子电路, 从而能构建出一种由四个动态元件组成的四阶 Colpitts 混沌振荡器. 与三阶 Colpitts 混沌电路相比, 该电路的主要特点是: 当并联谐振选频网络的谐振频率在较大的范围内改变时, 能使该电路经倍周期分岔进入混沌状态, 并呈现出复杂的分岔与混沌特性. 此外, 电路实验结果表明, 由于增加了电容  $C_3$ , 改变原有系统的平衡点位置分布, 使得四阶 Colpitts 混沌振荡器的起振条件更容易得到满足. 本文对这一新的四阶 Colpitts 混沌振荡器的动力学特性进行理论分析和数值计算, 并通过电路实验结果证实了这一方案的可行性.

## 2. 四阶 Colpitts 混沌振荡器

根据文献[16, 17]的研究结果, 本文在三阶 Colpitts 混沌电路中电感  $L$  的两端并联一个电容  $C_3$ , 可构成一个四阶 Colpitts 混沌振荡器, 如图 1 所示. 电路的状态方程为

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dV_{CE}}{dt} &= I_R - I_C, \\ C_2 \frac{dV_{BE}}{dt} &= -I_B - I_R - \frac{V_{EE} + V_{BE}}{R_{EE}}, \end{aligned}$$

\* 国家自然科学基金(批准号: 60572073), 广东省自然科学基金(批准号: 32469 和 5001818)和广州市科技计划项目(批准号: 2004J1-C0291)资助的课题.

† E-mail: siminyu@163.com

$$C_3 \frac{dV_{C3}}{dt} = I_R - I_L, \quad (1)$$

$$L \frac{dI_L}{dt} = V_{C3},$$

式中  $I_R, I_C, I_B$  的数学表达式为

$$\begin{aligned} I_R &= (V_{CC} - V_{C3} - V_{CE} + V_{BE}) / R_L, \\ I_C &= \beta_F I_B, \end{aligned} \quad (2)$$

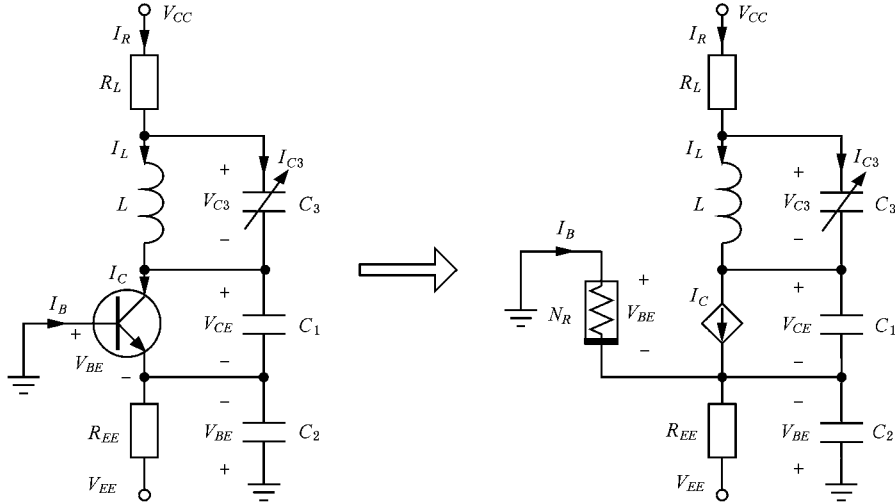


图 1 四阶 Colpitts 混沌振荡器电路图

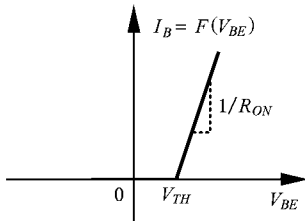


图 2  $N_R$  的伏安特性关系

将 (2) 式代入 (1) 式, 经整理, 得

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dV_{CE}}{dt} &= \frac{1}{R_L} (-V_{CE} + V_{BE} - V_{C3}) \\ &\quad - \beta_F F(V_{BE}) + \frac{V_{CC}}{R_L}, \\ C_2 \frac{dV_{BE}}{dt} &= \frac{1}{R_L} V_{CE} - \left( \frac{1}{R_L} + \frac{1}{R_{EE}} \right) V_{BE} + \frac{1}{R_L} V_{C3} \\ &\quad - F(V_{BE}) - \left( \frac{V_{CC}}{R_L} + \frac{V_{EE}}{R_{EE}} \right), \\ C_3 \frac{dV_{C3}}{dt} &= \frac{1}{R_L} (-V_{CE} + V_{BE} - V_{C3}) - I_L + \frac{V_{CC}}{R_L}, \\ L \frac{dI_L}{dt} &= V_{C3}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} I_B &= F(V_{BE}) \\ &= [V_{BE} - V_{TH} + |V_{BE} - V_{TH}|] / (2R_{ON}). \end{aligned}$$

注意到 (2) 式中  $I_B$  为非线性电阻 (即三极管的基极与发射极之间的电阻)  $N_R$  的伏安特性函数, 其中  $V_{TH}$  为  $N_R$  的导通电压,  $R_{ON}$  为  $N_R$  的导通电阻, 如图 2 所示.

对 (3) 式作无量纲处理, 令

$$\begin{aligned} x &= V_{CE} / V_{TH}, \quad y = V_{BE} / V_{TH}, \\ z &= V_{C3} / V_{TH}, \quad w = (R_{ON} I_L) / V_{TH}, \\ \tau &= t / (R_{ON} C_1), \quad \alpha_1 = R_{ON} / R_L, \\ \alpha_2 &= (R_{ON} V_{CC}) / (R_L V_{TH}), \\ \beta_1 &= (R_{ON} C_1) / (R_L C_2), \\ \beta_2 &= [R_{ON} C_1 (1/R_L + 1/R_{EE})] / C_2, \\ \beta_3 &= C_1 / C_2, \\ \beta_4 &= [R_{ON} C_1 (V_{CC} / R_L + V_{EE} / R_{EE})] / (C_2 V_{TH}), \\ \gamma_1 &= (R_{ON} C_1) / (R_L C_3), \quad \gamma_2 = C_1 / C_3, \\ \gamma_3 &= (R_{ON} C_1 V_{CC}) / (R_L C_3 V_{TH}), \\ \delta &= (R_{ON}^2 C_1) / L, \end{aligned}$$

得四阶 Colpitts 混沌振荡器的无量纲状态方程为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha_1 (-x + y - z) - \beta_2 f(y) + \alpha_2, \\ \frac{dy}{dt} &= \beta_1 (x + z) - \beta_2 y - \beta_3 f(y) + \beta_4, \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma_1 (-x + y - z) - \gamma_2 w + \gamma_3, \\ \frac{dw}{dt} &= \delta z, \end{aligned} \quad (4)$$

式中  $f(y) = 0.5(y - 1 + |y + 1|)$  为非线性电阻  $N_R$  的无量纲伏安特性函数.

设电路参数为  $V_{CC} = 5 \text{ V}$ ,  $V_{EE} = -5 \text{ V}$ ,  $V_{TH} = 0.75 \text{ V}$ ,  $R_L = 35 \text{ } \Omega$ ,  $R_{EE} = 400 \text{ } \Omega$ ,  $R_{ON} = 100 \text{ } \Omega$ ,  $L = 98.5 \text{ mH}$ ,  $C_1 = 54 \text{ nF}$ ,  $C_2 = 54 \text{ nF}$ ,  $C_3 = 2.7 \text{ nF}$ . 进一步

得  $\alpha_1 = 2.86$ ,  $\alpha_2 = 19.0$ ,  $\beta_1 = 2.86$ ,  $\beta_2 = 3.11$ ,  $\beta_3 = 1$ ,  $\beta_4 = 17.38$ ,  $\gamma_1 = 57.14$ ,  $\gamma_2 = 20.0$ ,  $\gamma_3 = 381$ ,  $\delta = 5.48$ . 根据(4)式, 用 MATLAB 数值计算所得混沌吸引子的相图如图 3 所示.

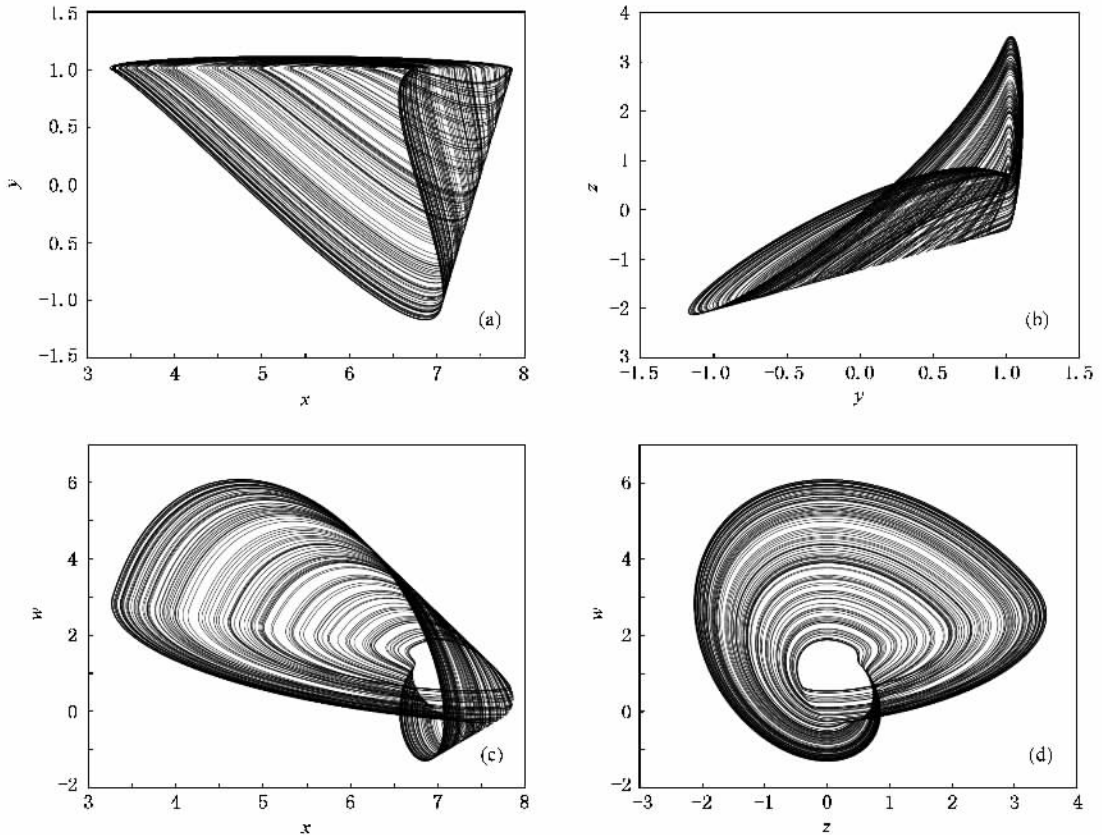


图 3 四阶 Colpitts 混沌振荡器的混沌吸引子相图数值模拟结果 (a)  $x$ - $y$  平面相图 (b)  $y$ - $z$  平面相图 (c)  $x$ - $w$  平面相图; (d)  $z$ - $w$  平面相图

### 3. 四阶 Colpitts 混沌振荡器的动力学特性

下面分析四阶 Colpitts 混沌振荡器的动力学特性, 包括平衡点及其特征值、电路随电容  $C_3$  改变时的分岔图和李氏指数等.

令(4)式的左边等于零, 得平衡点的数学表达式为

$$\begin{aligned} \alpha_1(-x + y) - \beta_F f(y) + \alpha_2 &= 0, \\ \beta_1 x - \beta_2 y - \beta_3 f(y) - \beta_4 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1(-x + y) - \gamma_2 w + \gamma_3 &= 0, \\ z &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

由(5)式消去变量  $x$  得

$$\left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)y - \left(\frac{\beta_F}{\alpha_1} + \frac{\beta_3}{\beta_1}\right)f(y) + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\beta_4}{\beta_1}\right) = 0 \tag{6}$$

式中  $f(y)$  的数学表达式为

$$f(y) = \begin{cases} y - 1 & y \geq 1, \\ 0 & y < 1. \end{cases} \tag{7}$$

根据(6)和(7)式, 当  $y \geq 1$  时, 系统的平衡点可表示为

$$x_1^{(e)} = \frac{(\beta_2/\beta_1 + \beta_3/\beta_1) [(\beta_F/\alpha_1 + \beta_3/\beta_1) + (\alpha_2/\alpha_1 - \beta_4/\beta_1)]}{(\beta_F/\alpha_1 + \beta_3/\beta_1) + (\beta_2/\beta_1 - 1)} + \frac{\beta_4}{\beta_1} - \frac{\beta_3}{\beta_1},$$

$$\begin{aligned} y_1^{(e)} &= \frac{(\beta_F/\alpha_1 + \beta_3/\beta_1) + (\alpha_2/\alpha_1 - \beta_4/\beta_1)}{(\beta_F/\alpha_1 + \beta_3/\beta_1) + (\beta_2/\beta_1 - 1)}, \\ z_1^{(e)} &= 0, \\ w_1^{(e)} &= \frac{\gamma_1}{\gamma_2}(y_1^{(e)} - x_1^{(e)}) + \frac{\gamma_3}{\gamma_2}; \end{aligned} \quad (8)$$

当  $y < 1$  时,系统的平衡点可表示为

$$\begin{aligned} x_2^{(e)} &= \frac{(\beta_2/\beta_1)(\alpha_2/\alpha_1 - \beta_4/\beta_1)}{(\beta_2/\beta_1 - 1)} + \frac{\beta_4}{\beta_1}, \\ y_2^{(e)} &= \frac{(\alpha_2/\alpha_1 - \beta_4/\beta_1)}{(\beta_2/\beta_1 - 1)}, \\ z_2^{(e)} &= 0, \\ w_2^{(e)} &= \frac{\gamma_1}{\gamma_2}(y_2^{(e)} - x_2^{(e)}) + \frac{\gamma_3}{\gamma_2}. \end{aligned} \quad (9)$$

根据前面所给定的参数,当  $\alpha_1 = 2.86, \alpha_2 = 19.0, \beta_1 = 2.86, \beta_2 = 3.11, \beta_3 = 1, \beta_4 = 17.38, \gamma_1 = 57.14, \gamma_2 = 20.0, \gamma_3 = 381, \delta = 5.48$  时,得混沌振荡器中两个平衡点的值分别为  $(x_1^{(e)}, y_1^{(e)}, z_1^{(e)}, w_1^{(e)}) = (7.18, 1.00, 0.00, 1.41)$  和  $(x_2^{(e)}, y_2^{(e)}, z_2^{(e)}, w_2^{(e)}) = (13.33, 6.67, 0.00, 0.00)$ .

根据(4)式,得平衡点  $(x_1^{(e)}, y_1^{(e)}, z_1^{(e)}, w_1^{(e)})$  和  $(x_2^{(e)}, y_2^{(e)}, z_2^{(e)}, w_2^{(e)})$  处的 Jacobian 矩阵为

$$\mathbf{J}_{1,2}^{(e)} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \alpha_1 - \beta_F \partial f / \partial y & -\alpha_1 & 0 \\ \beta_1 & -\beta_2 - \beta_3 \partial f / \partial y & \beta_1 & 0 \\ -\gamma_1 & \gamma_1 & -\gamma_1 & -\gamma_2 \\ 0 & 0 & \delta & 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

式中当  $y \geq 1$  时  $\partial f / \partial y = 1$ , 当  $y < 1$  时  $\partial f / \partial y = 0$ .

根据(10)式,得平衡点  $(x_1^{(e)}, y_1^{(e)}, z_1^{(e)}, w_1^{(e)})$  所对应的特征值为  $\gamma_{11} = -48.1699, \gamma_{12} = -19.8411, \sigma_{13} \pm j\omega_{13} = 1.9490 \pm j7.8873$ , 由此可知,平衡点  $(x_1^{(e)}, y_1^{(e)}, z_1^{(e)}, w_1^{(e)})$  为指标 2 的鞍点. 而平衡点  $(x_2^{(e)}, y_2^{(e)}, z_2^{(e)}, w_2^{(e)})$  所对应的特征值为  $\gamma_{21} = -61.2498, \gamma_{22} = -0.1224, \sigma_{23} \pm j\omega_{23} = -0.8689 \pm j3.1135$ , 故平衡点  $(x_2^{(e)}, y_2^{(e)}, z_2^{(e)}, w_2^{(e)})$  为指标 0 的鞍点, 是一个稳定的平衡点.

调节图 1 中电容  $C_3$  的大小,进一步得四阶 Colpitts 混沌振荡器随电容  $C_3$  在 0.1—5.0 nF 范围内变化时的分岔图和最大李氏指数谱,如图 4 和图 5 所示.从图中可以看出它们都是从倍周期分岔进入混沌状态,并且出现了若干明显的周期窗口,特别是当  $C_3 = 2.2\text{--}2.4$  nF 时,在分岔图中出现了一

个较宽的周期 3 窗口.

若选取电路参数为  $V_{CC} = 5 \text{ V}, V_{EE} = -5 \text{ V}, V_{TH} = 0.75 \text{ V}, R_L = 35 \Omega, R_{EE} = 400 \Omega, R_{ON} = 100 \Omega, L = 98.5 \text{ mH}, C_1 = 54 \text{ nF}, C_2 = 54 \text{ nF}, C_3 = 2.7 \text{ nF}$ .进一步得  $\alpha_1 = 2.86, \alpha_2 = 19.0, \beta_1 = 2.86, \beta_2 = 3.11, \beta_3 = 1, \beta_4 = 17.38, \gamma_1 = 57.14, \gamma_2 = 20.0, \gamma_3 = 381, \delta = 5.48$ .计算所得上述参数情况下的 Lyapunov 指数谱分别为  $LE_1 = 0.23, LE_2 = 0.00, LE_3 = -4.15, LE_4 = -59.33$ .

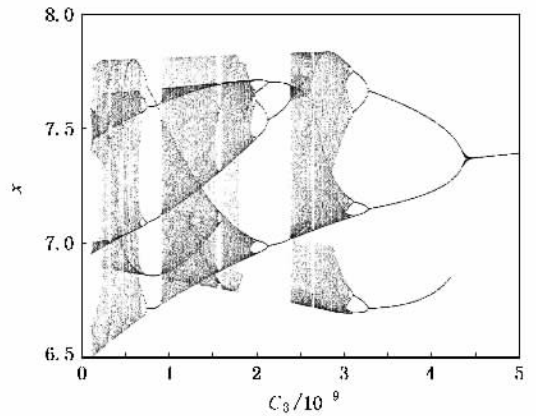


图 4 随电容  $C_3$  变化时的分岔图

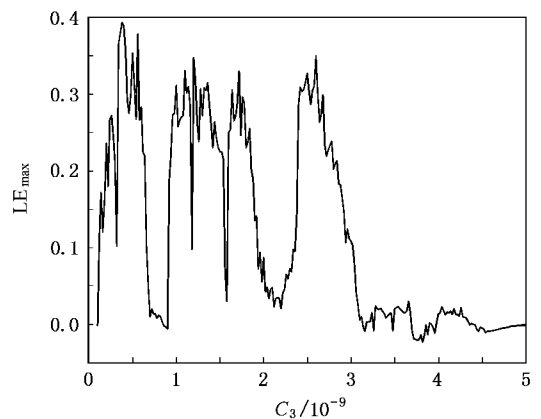


图 5 随电容  $C_3$  变化时的最大李氏指数

## 4. 电路实验结果

根据图 1 所示的电路及上述分析结果,取电路参数为  $V_{CC} = 5 \text{ V}$ ,  $V_{EE} = -5 \text{ V}$ ,  $V_{TH} = 0.75 \text{ V}$ ,  $R_L =$

$35 \Omega$ ,  $R_{EE} = 400 \Omega$ ,  $R_{ON} = 100 \Omega$ ,  $L = 98.5 \text{ mH}$ ,  $C_1 = 54 \text{ nF}$ ,  $C_2 = 54 \text{ nF}$ ,  $C_3 = 2.7 \text{ nF}$ . 根据前面的分析,电路为混沌状态. 注意到图 1 中三极管的型号为 2N2222 (或 BC108, 2N3904 等特性相近的三极管均可). 得四阶 Colpitts 混沌振荡器的实验结果如图 6 所示.

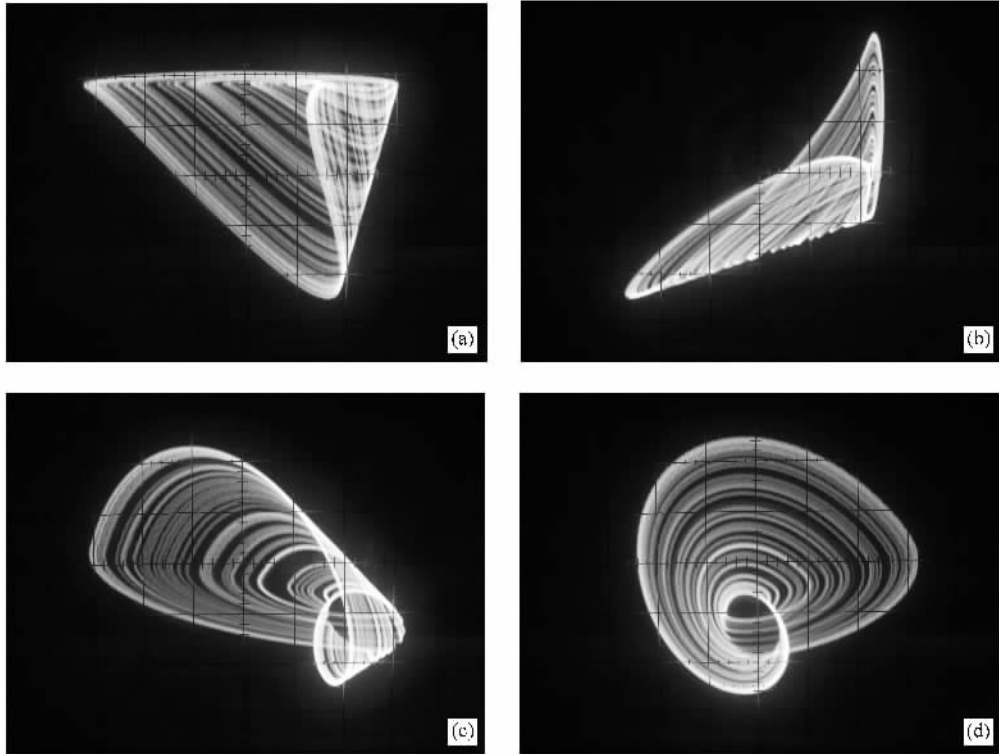


图 6 四阶 Colpitts 混沌振荡器的硬件实验结果 (a)  $x-y$  平面相图 (b)  $y-z$  平面相图 (c)  $x-w$  平面相图 ;(d)  $z-w$  平面相图

## 5. 结 论

基于一个典型的三阶 Colpitts 混沌电路,在该电路的电感  $L$  两端并联一个电容  $C_3$ ,形成了一个具有并联谐振选频特性的子电路,进而提出了一个新的四阶 Colpitts 混沌振荡器. 与三阶 Colpitts 混沌电路相比,该混沌振荡器具有以下几个主要特点: 1) 当并联谐振选频网络的谐振频率在较大范围内改变时,

能使该四阶 Colpitts 混沌振荡器经倍周期分岔进入混沌状态,并呈现出复杂的分岔与混沌特性. 2) 由于增加了电容  $C_3$ ,改变原有系统的平衡点位置分布,使得四阶 Colpitts 混沌振荡器的起振条件更容易得到满足. 3) 本文的研究结果对于高阶正弦波振荡器过渡到高阶混沌振荡器的研究提供了一种实际可行的依据,并对这类混沌振荡器的设计与实现起到了一定的借鉴作用,我们对此将作进一步的探讨.

- [1] Der Pol B V, Der Mark J V 1927 *Nature* **120** 363  
 [2] Kennedy M P, Chua L O 1986 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **1** 33 974  
 [3] Chua L O, Komuro M, Matsumoto T 1986 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **1** 33 1072  
 [4] Matsumoto T, Chua L O, Komuro M 1985 *IEEE Trans. Circuits*

- Syst.* **1** 32 798  
 [5] Keneedy M P 1993 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **1** 40 657  
 [6] Yu S M, Qiu S S, Lin Q H 2003 *Sci. Chin. F* **46** 104  
 [7] Yu S M, Ma Z G, Qiu S S, Lin Q H 2004 *Chin. Phys.* **13** 317  
 [8] Yu S M, Lin Q H, Qiu S S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2084 (in

- Chinese)[禹思敏、林清华、丘水生 2004 物理学报 **53** 2084]
- [ 9 ] Yu S M 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4111(in Chinese)[禹思敏 2004 物理学报 **53** 4111]
- [ 10 ] Yu S M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1500(in Chinese)[禹思敏 2004 物理学报 **54** 1500]
- [ 11 ] Yu S M, Lü J H, Leung H, Chen G R 2005 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **52** 1459
- [ 12 ] Lü J H, Yu S M, Leung H, Chen G R 2006 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **53** 149
- [ 13 ] Chen G R, Lü J H 2003 *Dynamics of the Lorenz System Family: Analysis, Control, and Synchronization* ( Beijing: Science Press ) ( in Chinese )[ 陈关荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步(北京 科学出版社)]
- [ 14 ] Yu S M, Lü J H, Tang K S, Chen G R 2006 *Chaos* **16** 033126
- [ 15 ] Yu S M, Lü J H, Chen G R 2007 *Chaos* **17** 013118
- [ 16 ] Kennedy M P 1994 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **41** 771
- [ 17 ] Maggio G M, Feo O D, Kennedy M P 1999 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **46** 1118
- [ 18 ] Lü J H, Chen G R 2006 *Int. J. Bifurc. Chaos* **16** 775
- [ 19 ] Liu F, Liu S D, Liu G, Liu S K 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5629(in Chinese)[刘峰、刘式达、刘刚、刘式适 2007 物理学报 **56** 5629]
- [ 20 ] Chen L, Wang D S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5661 ( in Chinese ) [ 谌龙、王德石 2007 物理学报 **56** 5661]
- [ 21 ] Yu S M, Lü J H, Chen G R 2007 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **54** 2087

## Fourth-order Colpitts chaotic oscillator<sup>\*</sup>

Yu Si-Min<sup>†</sup>

( College of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China )

( Received 20 August 2007 ; revised manuscript received 18 November 2007 )

### Abstract

A novel fourth-order Colpitts chaotic oscillator is presented. Theoretic design and circuit implementation shows that the fourth-order Colpitts chaotic oscillator can be obtained by parallelizing a capacitor  $C_3$  with inductor  $L$  in a canonical third-order Colpitts chaotic oscillator. The resonance frequency is changed by adjusting the value of  $C_3$ , and the oscillator becomes chaotic through doubling period bifurcation. The dynamical behaviors of the fourth-order Colpitts chaotic oscillator are further investigated, including equilibrium points, bifurcations and Lyapunov exponents. Finally, this approach is verified in both numerical simulations and circuit experiments.

**Keywords** : fourth-order Colpitts chaotic oscillator, chaotic attractors, circuit implementation

**PACC** : 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60572073 ), the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China ( Grant Nos. 32469 and 5001818 ) and the Science and Technology Program of Guangzhou City, China ( Grant No. 2004J1-C0291 ).

<sup>†</sup> E-mail : siminyu@163.com