第 57 卷 第 6 期 2008 年 6 月
1000-3290/2008/57(06)/3481-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57, No.6, June, 2008

非傍轴矢量高斯光束单缝衍射的严格理论*

李建龙　吕百达†

(四川大学激光物理与化学研究所,成都　610064)

(2007 年 9 月 12 日收到;2007 年 10 月 24 日收到修改稿)

提出非傍轴矢量光束衍射严格的电磁场理论,并以非傍轴矢量高斯光束的单缝衍射为例加以说明.与基于矢量瑞利-索末菲衍射积分推出的解析结果做了数值计算比较,表明了二者的一致性.对理论的进一步推广做了简要讨论.

关键词:严格的电磁场衍射理论,矢量瑞利-索末菲衍射积分,非傍轴矢量高斯光束的单缝衍射

PACC:4200,2410H,0365G

1. 引　　言

在研究非傍轴矢量光束的衍射传输问题时,可从衍射积分方程,例如矢量瑞利-索末菲衍射积分方程[1]出发,使用适当的近似,常可得到场分布的解析公式[2—9].当传输距离 $R\gg\lambda$(波长)时,所得到的解是足够精确的.另一方面,也可以从麦克斯韦方程组,或等价地从亥姆霍兹方程出发,加上边界条件,用严格的电磁场理论来研究非傍轴矢量光束的衍射传输.在 Born 和 Wolf 的《光学原理》[10]第 11 章中给出了几个典型例,但要求专门的数学技巧,并且一般都很复杂,故使用受到一定限制.本文的目的是以非傍轴矢量高斯光束的单缝衍射为例,提出处理非傍轴矢量光束衍射严格的电磁场理论,并与矢量瑞利-索末菲衍射积分公式的解析结果比较.数值计算例表明在 $R\gg\lambda$ 时用二种方法得到的计算结果相同.本文所提出方法,可推广用于严格处理一般非傍轴矢量光束的衍射传输,具有应用意义.

2. 高斯光束单缝衍射的严格电磁场理论

设源平面 $z=0$ 处沿 x 方向偏振高斯光束的电场为

$$E(x_0,0)=\exp\left(-\frac{x_0^2}{w_0^2}\right),\tag{1}$$

式中 w_0 为束腰宽度.(1)式的傅里叶变换为

$$A(\alpha)=\frac{w_0}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{\alpha^2 w_0^2}{4}\right),\tag{2}$$

式中 α 为 x 方向的空间频率.设(1)式所示的高斯光束沿 z 方向入射到 $z=0$ 处的单缝上(沿 x 方向单缝的半宽为 a),电场满足赫姆霍兹方程:

$$\frac{\partial^2 E(x,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E(x,z)}{\partial z^2}+k^2E(x,z)=0,\tag{3}$$

式中 k 为波数,与波长 λ 的关系为 $k=2\pi/\lambda$.在入射区电场是入射场和反射场的叠加,透射区中的电场是透射场,分别表示为

$$\begin{aligned}E_1(x,z)=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}[A(\alpha)\exp(-\mathrm{i}\beta z)\\&+B(\alpha)\exp(\mathrm{i}\beta z)]\\&\times\exp(\mathrm{i}\alpha x)\mathrm{d}\alpha\quad(\text{入射区}),\end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}E_2(x,z)=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}[C(\alpha)\exp(-\mathrm{i}\beta z)\\&+D(\alpha)\exp(\mathrm{i}\beta z)]\\&\times\exp(\mathrm{i}\alpha x)\mathrm{d}\alpha\quad(\text{透射区}),\end{aligned}\tag{5}$$

式中 $\beta=\sqrt{k^2-\alpha^2}$.(4)式中的第一项表示振幅为 $A(\alpha)$的入射电场 E_i 的傅里叶变换,第二项表示振幅为 $B(\alpha)$的单缝表面的反射波,且($|\alpha|>k$)时 $A(\alpha)=0$.(5)式的第一项表示系数为 $C(\alpha)$的透射波,因透射区域中无反射波,故 $D(\alpha)=0$.现用角谱表示法将入射区域和透射区中的电场 $E_1(x,z)$和

---

* 国家自然科学基金(批准号:10574097)资助的课题.

† 通讯联系人.E-mail:baidalu0@tom.com

$E_2(x,z)$表示为

$$E_1(x,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}A(\alpha)\exp[\mathrm{i}(\alpha x-\beta z)]\,\mathrm{d}\alpha+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}B(\alpha)\exp[\mathrm{i}(\alpha x+\beta z)]\,\mathrm{d}\alpha \quad (\text{入射区}), \tag{6a}$$

$$E_2(x,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}C(\alpha)\exp[\mathrm{i}(\alpha x-\beta z)]\,\mathrm{d}\alpha \quad (\text{透射区}). \tag{6b}$$

在无限薄界面 $z=0$ 处的电场 $E_3(x,0)$为

$$E_3(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}b_1\sin\left[\frac{n\pi}{2a}(x+a)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}b_2\sin\left[\frac{n\pi}{2a}(x+a)\right]+\cdots+\sum_{n=1}^{\infty}b_N\sin\left[\frac{n\pi}{2a}(x+a)\right] \quad (-a<x<a), \tag{7}$$

式中 $n=1,2,3,\cdots,\infty$. 由界面电场的连续性边界条件,得到

$$A(\alpha)+B(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}b_1\hat{\phi}(\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}b_2\hat{\phi}(\alpha)+\cdots+\sum_{n=1}^{\infty}b_N\hat{\phi}(\alpha), \tag{8}$$

$$C(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}b_1\hat{\phi}(\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}b_2\hat{\phi}(\alpha)+\cdots+\sum_{n=1}^{\infty}b_N\hat{\phi}(\alpha), \tag{9}$$

式中

$$\hat{\phi}(\alpha)=\mathrm{i}\sqrt{2\pi}\left[\delta\left(\frac{n\pi}{a}-2a\right)-\delta\left(\frac{n\pi}{a}+2a\right)\right], \tag{10}$$

$\delta(\cdot)$为狄拉克 δ 函数,且有

$$\frac{\partial E_1}{\partial z}(x,0)-\frac{\partial E_2}{\partial z}(x,0)=0. \tag{11}$$

由帕萨伐尔定理[11]得

$$\frac{\partial \hat{E}_1(\alpha,0)}{\partial z}-\frac{\partial \hat{E}_2(\alpha,0)}{\partial z}=0. \tag{12}$$

将(6a)和(6b)两式微分后代入(11)式,并利用(8)和(9)式,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_1\beta\hat{\phi}(\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}b_2\beta\hat{\phi}(\alpha)+\cdots+\sum_{n=1}^{\infty}b_N\beta\hat{\phi}(\alpha)=\beta A(\alpha). \tag{13}$$

$\beta\hat{\phi}(\alpha)$包含了单缝的几何参数,且与入射光束的振幅 $A(\alpha)$成线性关系. 由(13)式选取合适的截断项数,对(9)式求解逆矩阵即可得到系数 b_N,由(7)式得到 $E_3(x,0)$,将这些系数代入(8)和(9)两式就可得到 $B(\alpha)$和 $C(\alpha)$,以及高斯光束的单缝衍射电场. 此外,利用麦克斯韦方程组,还可求出高斯光束单缝衍射的磁场 H 的各分量,在此从略.

在严格的电磁场理论中,光强是用玻印廷矢量的 z 分量表示[10,12],即

$$\begin{aligned}\langle S_z(x,y)\rangle &=(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})_z\\ &=\mathrm{Re}\left\{E_x(x,z)\left[-\frac{\mathrm{i}}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\frac{\partial E_x^*}{\partial z}-\frac{\partial E_z^*}{\partial x}\right)\right]\right\},\end{aligned} \tag{14}$$

式中〈〉为对时间的系统平均,ε 和 μ 分别表示介电常数和磁导率,$*$ 为复共轭. 显然,将(7)式做适当修改后,非傍轴矢量高斯光束的多缝衍射可用同样方法处理.

3. 高斯光束单缝衍射的解析公式

在 $z>0$ 半空间中,用瑞利-索末菲衍射积分公式可得 z 面处的场分布[1,6]:

$$E_x(x,y,z)=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{+a}E_x(x_0,0)\times\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{R}\right)\mathrm{d}x_0, \tag{15a}$$

$$E_y(x,y,z)=0 \tag{15b}$$

$$E_z(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{+a}E_x(x_0,0)\times\frac{\partial}{\partial x}\frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{R}\mathrm{d}x_0, \tag{15c}$$

式中 $R=\sqrt{(x-x_0)^2+z^2}$. 当 $R_1\gg\lambda$ 时,在(15)式中用 $R\approx r+\frac{x_0^2-2xx_0}{r}$近似[6],经过复杂的积分运算得到

$$E_x(x,z)=\frac{(1+\mathrm{i}kr)z\exp(\mathrm{i}kr)}{2r^3\sqrt{2p\pi}}\exp\left(-\frac{q^2}{4p}\right)\left[\mathrm{erf}\left(\mathrm{i}\frac{2ap+q}{2\sqrt{p}}\right)+\mathrm{erf}\left(\mathrm{i}\frac{2ap-q}{2\sqrt{p}}\right)\right],\tag{16a}$$

$$E_y(x,z)=0,\tag{16b}$$

$$\begin{aligned}E_z(x,z)=&\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r^3}\frac{1}{4\sqrt{2\pi}p^3}\exp\left(-\frac{q^2}{4p}\right)\left\{2p^{5/2}(1+\mathrm{i}kr)x\left[\mathrm{erfi}\left(\frac{2ap-q}{2\sqrt{p}}\right)+\mathrm{erfi}\left(\frac{2ap+q}{2\sqrt{p}}\right)\right]\right.\\&+(\mathrm{i}kr-1)(\exp(-aq)\times\left(2\sqrt{p}\exp\left(\frac{4a^2p^2+q^2}{4p}\right)(\exp(2aq)-1)\right.\\&\left.\left.-q\sqrt{\pi}\exp(aq)\left[\mathrm{erfi}\left(\frac{2ap-q}{2\sqrt{p}}\right)+\mathrm{erfi}\left(\frac{2ap+q}{2\sqrt{p}}\right)\right]\right)\right\},\end{aligned}\tag{16c}$$

式中

$$p=-\frac{1}{w_0^2}+\mathrm{i}\frac{k}{r},\quad q=-\mathrm{i}k\frac{2x}{r},\tag{17}$$

$\mathrm{erf}(\cdot)$为误差函数．在远场近似 $R_1=r-\frac{xx_0}{r}$ 下，由(16)式得到远场电场公式为

$$E_{xf}(x,z)=\frac{z(r-\mathrm{i}k)}{2\sqrt{2}f}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{kr^3}\exp\left(-\frac{x^2}{4f^2r^2}\right)\left[\mathrm{erf}\left(\Delta-\frac{\mathrm{i}x}{2fr}\right)+\mathrm{erf}\left(\Delta+\frac{\mathrm{i}x}{2fr}\right)\right],\tag{18a}$$

$$E_{yf}(x,z)=0,\tag{18b}$$

$$\begin{aligned}E_{zf}(x,z)=&\frac{w_0(r-\mathrm{i}k)}{4\sqrt{2\pi}r^4}\exp\left[\frac{\mathrm{i}k(r^2-ax)}{r}-\Delta^2-\frac{x^2}{4f^2r^2}\right]\left\{-2\sqrt{\pi}xr\exp\left[a\left(\frac{\mathrm{i}kx}{r}+\frac{\Delta}{w_0}\right)\right]\right.\\&\times\left(\mathrm{erf}\left[\Delta-\frac{\mathrm{i}x}{2fr}\right]+\mathrm{erf}\left[\Delta+\frac{\mathrm{i}x}{2fr}\right]\right)\\&+\frac{2r}{kf}\exp\left(\frac{x^2}{4f^2r^2}\right)\left(\exp\left(\mathrm{i}\frac{2ax}{frw_0}\right)-1\right)-\mathrm{i}\frac{x\sqrt{\pi}}{kf^2}\exp\left[a\left(\frac{\mathrm{i}kx}{r}+\frac{a}{w_0^2}\right)\right]\\&\left.\times\left(\mathrm{erf}\left[\Delta-\frac{\mathrm{i}x}{2fr}\right]+\mathrm{erf}\left[\Delta+\frac{\mathrm{i}x}{2fr}\right]\right)\right\},\end{aligned}\tag{18c}$$

式中 $f=1/(kw_0)$(f 参数)，$\Delta=a/w_0$(截断参数)．

在(15)式中令 $x=0$，直接积分得到高斯光束单缝衍射场轴上光强的精确解析结果为

$$\begin{aligned}E_x(0,z)=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x_0^2}{w_0^2}\right)\\&\times\left[\exp(\mathrm{i}kz)-\frac{z}{\sqrt{(a^2+z^2)}}\right.\\&\left.\times\exp\left(\mathrm{i}k\sqrt{a^2+z^2}\right)\right],\end{aligned}\tag{19a}$$

$$E_y(0,z)=0,\tag{19b}$$

$$E_z(0,z)=0,\tag{19c}$$

(19)式表明轴上电场只有 x 分量．

数值计算所取的参数为：$\lambda=1.06\ \mu\mathrm{m}$，$f=0.3$，$a=2w_0$．图1—3给出了用严格电磁场理论(4)—(13)式(简称微分法)和从瑞利-索末菲衍射积分推出的解析公式(16)—(19)式(简称积分法)得到非傍轴矢

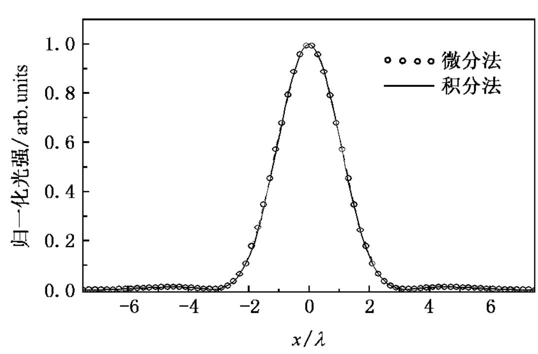

图1　非傍轴矢量高斯光束单缝衍射 $z=3z_R$ 处的横向光强分布

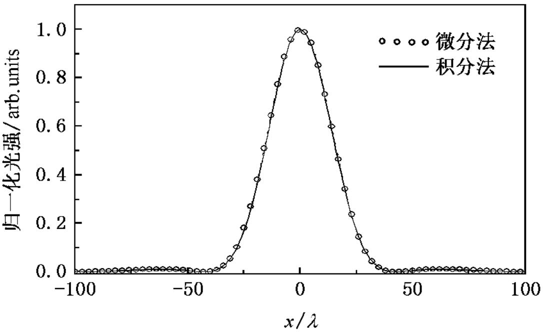

图 2 非傍轴矢量高斯光束单缝衍射 $z = 40\ z_R$ 处的横向光强分布

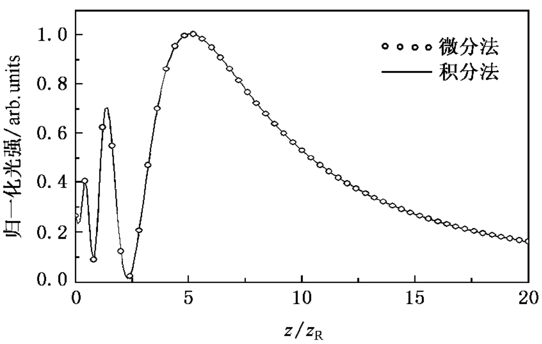

图 3 非傍轴矢量高斯光束单缝衍射轴上光强分布

量高斯光束单缝衍射的 $z = 3z_R$（$z_R = \pi w_0^2/\lambda$ 为瑞利长度）处的横向光强分布和轴上光强分布，由图知，二者符合甚好，证实了两种方法的等价性. 比较图 1 和图 2 还可知，$z = 40z_R$（远场）比 $z = 3z_R$（菲涅尔区）因衍射传输光束有显著扩展.

4. 结 论

本文用严格的电磁场理论研究了矢量非傍轴高斯光束的单缝衍射，其主要步骤为：首先分别给出满足赫姆霍兹方程的高斯光束单缝衍射的入射区，$z = 0$ 界面和透射区中电场的的角谱表达式. 然后利用电场在界面上连续的边界条件，将这三个区域中的电场联系起来，得到这三个区域的电场振幅系数组成的矩阵. 最后，利用初始条件和解逆矩阵的方法求出各区域中电场的振幅系数，得到高斯光束单缝衍射各区域中的电场. 利用麦克斯韦方程组可求出单缝衍射的磁场，而光强用玻印廷矢量的 z 分量（14）式表示. 将高斯光束单缝衍射的严格电磁场理论与用瑞利-索末菲衍射积分公式所得的解析结果做了比较（后者在横平面的场分布公式推导中用了 $R \gg \lambda$ 的近似），数值计算结果表明了二者的一致性. 值得指出的是，为说明主要物理问题和处理方法，文中以二维非傍轴矢量高斯光束的单缝衍射为例，但因对所使用基本方程（例如赫姆霍兹方程，边界条件等）和所使用的基本方法（角谱表示法，电场振幅系数的矩阵解法等）做相应推广都是直截了当的，故推广到一般三维非傍轴矢量光束的衍射传输时，除了数学复杂性增加外，没有原理性的障碍，而且，所用方法不受传输距离的限制，是严格的衍射理论，有推广应用意义.

傅克祥教授与本文作者之一李建龙进行了有益的讨论，提出了宝贵意见，特此致谢.

[1] Luneburg R K 1966 *Mathematical Theory of Optics* (Berkeley California: University of California Press) p77—81

[2] Zeng X, Liang C, An Y 1997 *Appl. Opt.* **36** 2042

[3] Borghi R, Ciattoni A, Santarsiero M 2002 *J. Opt. Soc. Am.* A **19** 1207

[4] Harvey J E, Krywonos A 2002 *Appl. Opt.* **41** 3790

[5] Cittoni A, Crosignani, Porto P D 2002 *Opt. Commun.* **202** 17

[6] Lü B D, Duan K L 2003 *Opt. Lett.* **28** 2440

[7] Duan K L, Lü B D 2003 *Opt. Exp.* **11** 1474

[8] Marathay A S, Mccalmont J F 2004 *J. Opt. Soc. Am.* A **21** 510

[9] Gao Z H, Lü B D 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5144 (in Chinese) [高曾辉、吕百达 2005 物理学报 **54** 5144]

[10] Born M, Wolf E 1999 *Principles of Optics* 7th (London: Cambridge University Press) p633—635

[11] Goodman J W 2004 *Introduction to Fourier Optics* (London: Roberts and Company Publishers) p168—171

[12] John M, Partha P 1999 *J. Opt. Soc Am.* A **16** 1097

The rigorous theory of nonparaxial vectorial Gaussian beams diffracted at a slit*

Li Jian-Long　Lü Bai-Da†

(*Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu* 610064, *China*)

(Received 12 September 2007; revised manuscript received 24 October 2007)

Abstract

The rigorous electro-magnetic diffraction theory of nonparaxial vectorial beam is proposed and illustrated by the diffraction of nonparaxial vectorial Gaussian beam diffracted at a slit. A numerical comparison with the analytical expressions based on the vectorial Rayleigh-Sommerfeld diffractiion integrals is given to show the consistency between them. A futher extension of the theory is briefly discussed.

Keywords: rigorous electro-magnetic diffraction theory, vectorial Rayleigh-Sommerfeld diffraction integrals, diffraction of non-paraxial vectorial Gaussian beams at a slit

PACC: 4200, 2410H, 0365G

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10574097).

† Corresponding author. E-mail: baidalu0@tom.com