第 57 卷 第 7 期 2008 年 7 月
1000-3290/2008/57(07)/3969-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57, No.7, July, 2008

坐标算符本征矢的表示与不对称投影算符的积分

李体俊†

(菏泽学院物理系,菏泽 274015)

(2007 年 12 月 4 日收到;2008 年 1 月 10 日收到修改稿)

借助于粒子数算符的本征态和坐标算符函数的本征方程,把坐标算符的本征矢$\langle f(x)|$表示为一个算符对坐标本征矢$\langle x|$的作用.由此,把不对称的坐标投影算符转换为对称的坐标投影算符,再利用坐标本征矢的完备性,给出不对称坐标投影算符的积分.

关键词:本征矢,算符的积分,本征方程,完备性

PACC:0365

1. 引 言

牛顿–莱布尼兹公式仅适合普通函数(C-数)的积分,它不能直接应用于量子力学中投影算符的积分,比如

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,|x\rangle\langle\mu x|\,.$$

算符(Q-数)的不可交换性给量子系统的数学处理带来了复杂性,尽管可以把投影算符中的变量与算符分离后积分,但这样做比较困难,必须寻找另外更有效的方法[1—9].文献[1—9]发明了有序算符内的积分技术(IWOP),可以在有序算符内对变量直接积分.

在本工作中,通过坐标算符函数$f(\hat{x})$的本征方程

$$\langle x|f(\hat{x}) = \langle x|f(x),\tag{1}$$

实现 C-数与 Q-数之间的转换,用坐标本征矢$\langle x|$表示坐标本征矢$\langle f(x)|$,从而把不对称坐标投影算符用对称投影算符表示,然后利用坐标本征矢的完备性

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,|x\rangle\langle x| = 1,\tag{2}$$

得出不对称投影算符的积分值.

2. 坐标本征矢$\langle f(x)|$的表示

粒子数算符 N 的本征态$|n\rangle$在坐标表象中表示为

$$\langle x|n\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\mathrm{e}^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right),\tag{3}$$

其中 H_n 为厄米多项式,它的生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(x)t^n = \mathrm{e}^{-t^2+2xt}.\tag{4}$$

借助粒子数表象的完备性及粒子态$\langle n| = \langle 0|\frac{a^n}{\sqrt{n!}}$,可得坐标本征矢

$$\langle x| = \sum_{n=0}^{\infty}\langle x|n\rangle\langle n| = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\langle 0|\times\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2+\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}xa-\frac{a^2}{2}\right),\tag{5}$$

式中 a 为湮没算符.为了方便,取 $\hbar=\omega=m=1$,(5)式改写为

$$\langle x| = \pi^{-1/4}\langle 0|\exp\left(-\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2}xa-\frac{a^2}{2}\right),\tag{6}$$

由(6)式得

$$\begin{aligned}\langle -x| &= \pi^{-1/4}\langle 0|\exp\left(-\frac{1}{2}x^2-\sqrt{2}xa-\frac{a^2}{2}\right)\\&= \pi^{-1/4}\sum_{n=0}^{\infty}\langle n|(-1)^n\frac{(\sqrt{2}x)^n}{\sqrt{n!}}\\&\quad\times\exp\left(-\frac{1}{2}x^2-\frac{a^2}{2}\right),\end{aligned}\tag{7}$$

根据本征方程

$$\langle n|(-1)^n = \langle n|(-1)^N,\tag{8}$$

(7)式化为

$$\langle -x| = \langle x|\exp\left(\frac{a^2}{2}\right)(-1)^N\exp\left(-\frac{a^2}{2}\right).\tag{9}$$

设 s 为一实数,由(6)式得

$$\langle x+s| = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4}\langle 0|\exp\left[-\frac{1}{2}(x+s)^2+\sqrt{2}(x+s)a-\frac{a^2}{2}\right]$$

† E-mail:hz-ltj@163.com

$$=\langle x|\exp\left[-\left(xs+\frac{1}{2}s^2\right)\right]$$

$$\times\exp(\sqrt{2}sa),\tag{10}$$

用坐标算符 $\hat{x}$ 和动量算符 $\hat{p}$ 表示算符 a,即

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}+\mathrm{i}\hat{p}),\tag{11}$$

把(11)式代入(10)式,并利用 Glauber 公式:

$$\mathrm{e}^{A+B}=\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}\mathrm{e}^{-C/2},\tag{12}$$

(10)式为

$$\langle x+s|=\langle x|\exp(-sx)\exp(s\hat{x})\exp(\mathrm{i}s\hat{p}),\tag{13}$$

利用(1)式,(13)式为

$$\langle x+s|=\langle x|\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\hat{p}}.\tag{14}$$

进一步推广,让 $s=f(x)-x$,并考虑(1)式,(14)式为

$$\langle f(x)|=\langle x|\mathrm{e}^{\mathrm{i}[f(x)-x]\hat{p}}$$

$$=\langle x|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[f(\hat{x})-\hat{x}]^m}{m!}\mathrm{i}^m\hat{p}^m,\tag{15}$$

式中 $f(x)$ 为 x 的一个函数.比如取 $f(x)=\mu x$($\mu>0$),代入(15)式得

$$\langle\mu x|=\langle x|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\mu-1)^m}{m!}\mathrm{i}^m\hat{x}^m\hat{p}^m.\tag{16}$$

利用公式:

$$\text{若}[A,B]=C,\text{则}[A,B^n]=nCB^{n-1},\tag{17}$$

(16)式变为

$$\langle\mu x|=\langle x|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\mu-1)^m}{m!}$$

$$\times(\mathrm{i}\hat{x}\hat{p})(\mathrm{i}\hat{x}\hat{p}-1)(\mathrm{i}\hat{x}\hat{p}-2)\cdots$$

$$\times[\mathrm{i}\hat{x}\hat{p}-(m-1)]=\langle x|\mu^{\mathrm{i}\hat{x}\hat{p}}.\tag{18}$$

若让 $\mu=\mathrm{e}^{\alpha x}$,根据(18)式得

$$\langle x\mathrm{e}^{\alpha x}|=\langle x|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\mathrm{i}^m\alpha^m\hat{x}^m(\hat{x}\hat{p})^m.\tag{19}$$

3. 不对称投影算符的积分

应用态矢 $\langle f(x)|$ 的表示式,把不对称的投影算符转变为对称投影算符与算符的乘积,借助坐标表象的完备性,就能得出不对称投影算符的积分值,比如:

1) 根据(9)式,积分式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x|x\rangle\langle-x|$$

$$=\exp\left(\frac{a^2}{2}\right)(-1)^N\exp\left(-\frac{a^2}{2}\right),\tag{20}$$

借助 Baker-Hausdorff 公式

$$\mathrm{e}^{A}B\mathrm{e}^{-A}=B+[A,B]+\frac{1}{2!}[A,[A,B]]$$

$$+\frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]]+\cdots,\tag{21}$$

及恒等式

$$\text{若}[A,B]=\tau B,$$

$$\text{则}\ \mathrm{e}^{\lambda(A+\sigma B)}=\mathrm{e}^{\lambda A}\exp[\sigma(1-\mathrm{e}^{-\lambda\tau})B/\tau],\tag{22}$$

(20)式化为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x|x\rangle\langle-x|=(-1)^N\equiv P,\tag{23}$$

P 为宇称算符.

2) 根据(14)式,积分式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x|x\rangle\langle x+s|$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x|x\rangle\langle x|\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\hat{p}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\hat{p}}\equiv D,\tag{24}$$

D 为平移算符.

3) 根据(18)式,积分式

$$\sqrt{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x|x\rangle\langle\mu x|$$

$$=\sqrt{\mu}\mu^{\mathrm{i}\hat{x}\hat{p}}=\exp\left[\frac{\ln\mu}{2}(a^2-a^{+2})\right]\equiv S,\tag{25}$$

S 为单模压缩算符[10].

4) 借助(1),(14)及(23)式,积分式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\left|q+\frac{x}{2}\right\rangle\left\langle q-\frac{x}{2}\right|$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\pi}\mathrm{e}^{2p(x-q)\mathrm{i}}|x\rangle\langle 2q-x|$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\pi}\mathrm{e}^{2p(x-q)\mathrm{i}}|x\rangle\langle-x|\mathrm{e}^{2q\mathrm{i}\hat{p}}$$

$$=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{2p(\hat{x}-q)\mathrm{i}}(-1)^N\mathrm{e}^{2q\mathrm{i}\hat{p}}$$

$$=\frac{\exp(-2pq\mathrm{i})}{\pi}\mathrm{e}^{2p\hat{x}\mathrm{i}}(-1)^N\mathrm{e}^{2q\mathrm{i}\hat{p}}\equiv\Delta(p,q),\tag{26}$$

$\Delta(p,q)$ 为 Wigner 算符,它是把经典函数量子化为量子算符的一个积分核.

5) 根据(19)式,积分式

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x\rangle\langle xe^{\alpha x}|\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\mathrm{i}^m\alpha^m\hat{x}^m(\hat{x}\hat{p})^m.\tag{27}$$

6) 借助(15)式及(1)式,积分式

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(x)|g(x)\rangle\langle f(x)|\mathrm{d}x$$

$$=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\hat{p}^n\frac{[g(\hat{x})-\hat{x}]^n}{n!}(-\mathrm{i})^n\right\}u(\hat{x})$$

$$\times\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[f(\hat{x})-\hat{x}]^m}{m!}\mathrm{i}^m\hat{p}^m\right\}, \tag{28}$$

这里 $u(x)$, $g(x)$ 和 $f(x)$ 都是 x 的函数. 对于由算符 $\hat{p}$ 和 $\hat{x}$ 构成的算符函数 $A(\hat{p},\hat{x})$，原则上可以通过 $[\hat{x},\hat{p}]=\mathrm{i}$，把 $A(\hat{p},\hat{x})$ 化成 $\sum_i B_i(\hat{p})C_i(\hat{x})$ 或 $\sum_i B_i(\hat{x})C_i(\hat{p})$ 的形式. 如果规定 $\sum_i B_i(\hat{p})C_i(\hat{x})$ 为正序，用「 标识；$\sum_i B_i(\hat{x})C_i(\hat{p})$ 为反序，用 」标识，(28) 式可简单地表示为

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\,|g(x)\rangle\langle f(x)|\,\mathrm{d}x$$
$$=「\exp\{-\mathrm{i}[g(\hat{x})-\hat{x}]\hat{p}\}\;u(\hat{x})\times\exp\{[f(\hat{x})-\hat{x}]\hat{p}\}」. \tag{29}$$

4. 结　　论

借助于粒子态和坐标算符函数的本征方程，把坐标算符本征矢 $\langle f(x)|$ 表示为

$$\langle x|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[f(\hat{x})-\hat{x}]^m}{m!}\mathrm{i}^m\hat{p}^m .$$

由此，不对称的投影算符转换为对称的投影算符与算符的乘积，再利用对称投影算符的完备性，得到了诸如

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,|x\rangle\langle x+s|,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,|x\rangle\langle -x|,$$

$$\sqrt{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,|x\rangle\langle \mu x|,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\left|q+\frac{x}{2}\right\rangle\left\langle q-\frac{x}{2}\right|,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,|x\rangle\langle x\mathrm{e}^{\alpha x}|,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\,|g(x)\rangle\langle f(x)|\,\mathrm{d}x$$

的积分值. 但此种方法不便于推广到多维，积分结果也不是正规乘积的形式.

[1] Fan H Y, Lu H L, Fan Y 2006 *Ann. Phys.* **321** 480
[2] Fan H Y 2007 *Ann. Phys.* **322** 866
[3] Fan H Y 2007 *Ann. Phys.* **322** 886
[4] Fan H Y 2003 *J. Opt. B: Quan. and Semiclass. Opt.* **5** R147
[5] Fan H Y, Zaidi H R, Klauder J R 1987 *Phys. Rev.* D **35** 1831
[6] Fan H Y, Klauder J R 1994 *Phys. Rev.* A **49** 704
[7] Fan H Y, Zou H 1999 *Phys. Lett.* A **252** 281
[8] Fan H Y 1991 *J. Phys.* A **24** 2529
[9] Fan H Y 1989 *Phys. Rev.* A **40** 4237
[10] Shun Z H, Fan H Y 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 74 (in Chinese) [孙治湖、范洪义 2000 物理学报 **49** 74]

Expressions of coordinate eigen vectors and their integration over non-symmetric coordinate projective operators

Li Ti-Jun†

(*Department of Physics*, *Heze University*, *Heze* 274015, *China*)

(Received 4 December 2007; revised manuscript received 10 January 2008)

Abstract

The coordinate state vector $\langle f(x)|$ is expressed with $\langle x|$ in virtue of particle number states and the eigen equations of coordinate operator functions, accordingly we can convert non-symmetric projective operators into symmetric, the integrations over non-symmetric projective operators are obtained by the completeness relation of coordinate eigenstates.

Keywords: eigen vector, integration over operators, eigen equation, completeness relation

PACC: 0365

† E-mail: hz-ltj@163.com