

Canard 轨迹原理*

徐 云¹⁾ 张建峡^{2)†} 徐 霞³⁾ 周 红¹⁾

1) 清华大学电机工程与应用电子技术系, 电力系统及大型发电设备安全控制国家重点实验室, 北京 100084)

2) 贵州大学工学院, 贵阳 550003)

3) 广东政法学院基础系, 广州 510232)

(2007 年 11 月 19 日收到, 2008 年 1 月 13 日收到修改稿)

为了精确的求出 Canard 轨迹的描述方程, 提出了一个分段表达的非线性模型, 能直接求出一个非线性二阶自治方程的相轨迹方程的解析解, 能定量求出 Canard 轨迹的描述方程和参数条件, 可以用两类方程简单描述所有的 Canard 轨迹.

关键词: 非线性系统, Canard 轨迹, 弛张振荡

PACC: 0547, 4630M

1. 引 言

Callat 等报道了 Canard 解轨迹现象^[1,2], 有趣的 Canard 解轨迹在电路^[3]、物理、生物和化学系统中引起广泛关注^[4-7]、看似复杂的 Canard 相轨迹实际上主要包含无头鸭相轨迹、有头鸭相轨迹和弛张振荡相轨迹, 虽然很多近似的数学方法和定性理论用于解释 Canard 相轨迹^[8-13], 由于非线性微分方程的求解的困难, 都无法准确解释. 本文提出了一个由二阶自治方程描述的系统, 该系统的相轨迹方程不仅能直接求出解析解, 还能产生 Canard 相轨迹. 能定量地求出无头鸭相轨迹、有头鸭相轨迹和弛张振荡相轨迹的描述方程和参数条件.

2. 含分段非线性函数模型系统方程

典型的 Canard 微分方程为

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= u - g(i) = P(i, u), \\ \varepsilon \frac{du}{dt} &= i - I = Q(i, u), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 i 和 u 为状态变量, ε 是常数, $P(i, u), Q(i, u) \in C^0$, 这个二阶自治系统是李纳(Lienard)方程的变形. 在文献 [2, 4, 10] 中, 非线性函数 $g(i) = -i +$

$\frac{1}{3}i^3$, 是有 N 形的 3 次多项式曲线, 如图 1 所示. 该方程的不可积性吸引了很多近似的数学方法用于探索 Canard 相轨迹的数学机理.

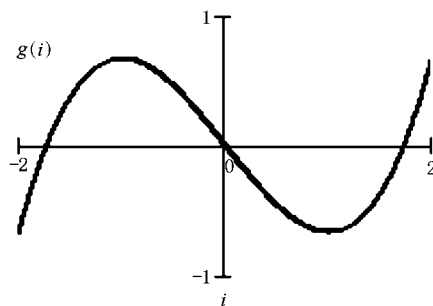


图 1 $g(i) = -i + \frac{1}{3}i^3$ 的 N 形曲线

为了完整准确地研究 Canard 相轨迹, 能够直接求出(1)式的解析解是最好的方法. 为此, 将(1)式变成

$$\begin{aligned} 2L \frac{di}{dt} &= -u - f(i), \\ C \frac{du}{dt} &= i, \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $f(i)$ 是 N 形曲线的分段非线性函数表达式:

$$f(i) = i^2, \quad -2 < i, \quad (3a)$$

$$f(i) = 6 + i, \quad -2 \geq i, \quad (3b)$$

曲线的形状如图 2 所示.

* 国家自然科学基金(批准号 59577025)和清华大学基础研究基金(批准号 JC2001021)资助的课题.

† E-mail: xuyun@tsinghua.edu.cn

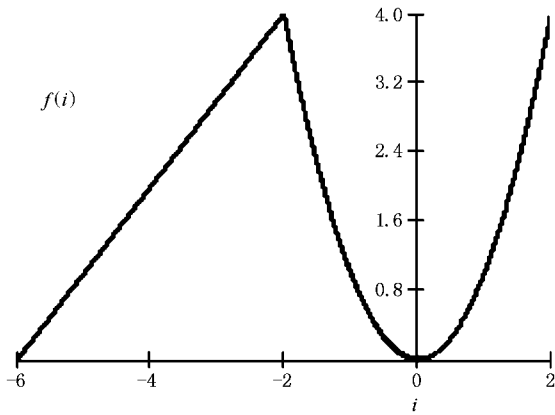


图 2 由直线和二次曲线分段表示的 N 形曲线

3. 无头鸭相轨迹方程

无头鸭相轨迹是 Canard 相轨迹的一部分,应用 (2) 式可以求出描述无头鸭相轨迹的方程. 先研究 (3a) 式的情况, 此时 (2) 式可表示如下:

$$2L \frac{di}{dt} = -(u + i^2), \quad -2 < i, \quad (4a)$$

$$C \frac{du}{dt} = i, \quad (4b)$$

将 (4) 式的两式相比后得到系统相图轨迹的切线方程

$$\frac{2di}{du} = \frac{-C(u + i^2)}{Li}. \quad (5)$$

积分 (5) 式, 方程的解为

$$i^2 = Ae^{-Cu/L} - u + \frac{L}{C}$$

或

$$\left(i^2 + u - \frac{L}{C}\right)e^{Cu/L} = A, \quad (6)$$

式中 A 是积分常数. 由不同的积分常数, 给出一组积分曲线族, 也给出平面 $i-u$ 上的曲线族, 其上面每一点都有着由方程 (5) 确定的切线斜率^[14].

(6) 式中的积分常数 A 取决于 (2) 式的初始条件 (i_0, u_0) , 为了研究 A 对解的性质的影响, 先设参数 $C = L = 1$ 的情况, 此时 (6) 式^[15]为

$$(i^2 + u - 1)e^u = A. \quad (7)$$

当 $A \geq 0$ 时,

$$(i^2 + u - 1)e^u > 0, \quad (8)$$

方程 (8) 的相轨迹将是随 i 发散的曲线, 在时域上随时间 t 发散, 称为发散轨线.

当 $A = 0$ 时,

$$i^2 = 1 - u, \quad (9)$$

相轨迹是截距为 1 的抛物线, 是发散轨线和无头鸭

相轨迹的分界线.

当 $-1 < A < 0$ 时,

$$-1 < (i^2 + u - 1)e^u < 0, \quad (10)$$

相轨迹是层层镶套的闭曲线. 相平面上的闭曲线表示系统在进行周期运动, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 能在时域上观察到周期振荡的波形, 因为这种相轨迹的形状像文献 [2] 中称无头的鸭子, 称这种闭轨线为无头鸭相轨迹或无头鸭振荡. 无头鸭相轨迹有多种形状, 如大无头鸭和小无头鸭, 但它们的形状仅取决于 (10) 式中积分常数 A 的取值. 在图 3 中, 分别有 $A = -0.01$, $A = -0.3$, $A = -0.5$ 的 3 种不同取值的大无头鸭和小无头鸭相轨迹. 初始条件越接近分界线, 无头鸭相轨迹越大.

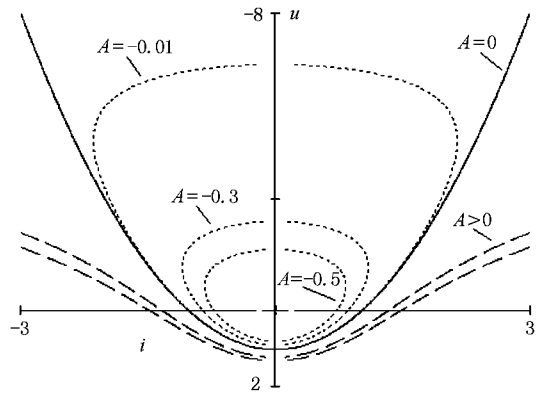


图 3 系统 (4) 产生的无头鸭相轨迹和其他类型的相轨迹

4. 有头鸭相轨迹方程

有头鸭相轨迹是 Canard 相轨迹的一部分, 由系统 (2) 产生的有头鸭相轨迹如图 4 所示. 有头鸭相轨迹能够被 3 个轨迹方程的分段精确描述. 图中有头鸭相轨迹由直线 $i = -2$ 分为两个区域; 在 $-2 < i$ 的部分 (鸭身体部分), 是微分方程 (2) 和 (3a) 式的解, 其相轨迹由 (6) 式描述. 图中相轨迹 $b-c-d$ 部分 (后背部), 由满足积分常数 $-1 < A < 0$ 闭曲线相轨迹方程 (10) 描述. 图中相轨迹 $d-a$ 部分 (前腹部), 由满足积分常数 $A \geq 0$ 的发散轨线相轨迹方程 (8) 描述.

在 $-2 \geq i$ 的部分 (鸭头部分), 非线性项 $f(x)$ 应为 (3b) 式, 系统 (2) 改由下式表示:

$$C \frac{du}{dt} = i, \quad (11a)$$

$$2L \frac{di}{dt} = -(u + 6 + i). \quad (11b)$$

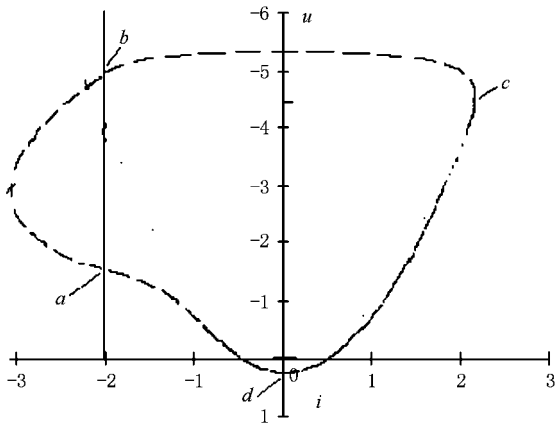


图 4 系统(2)产生的有头鸭相轨迹

将(11)式的两式相比,得相轨线的切线方程

$$\frac{di}{du} = \frac{-\alpha(u+6+i)}{2Li}, \quad (12)$$

积分式(4.2)后,得到相轨线方程

$$i^2 + 2hiu + \omega_0 u^2 = A_1 e^{\frac{2h}{\omega} \arctg \frac{i+hu}{\omega u}}, \quad (13a)$$

或

$$(i + q_1 u)^{q_1} = A_2 (i + q_2 u)^{q_2}, \quad (13b)$$

A_1, A_2 是由初始条件所确定的常数,

$$\begin{aligned} q_1 &= h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2}, \\ q_2 &= h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$h = \frac{1}{4L} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}. \quad (15)$$

(11)式的初始条件(i_0, u_0)是 $i_0 = -\alpha$ 换式的 i 分段非线性函数的分段值时,满足(6)式的 u_0 .

分段方程(11)平衡点为

$$i = 0, u = -6$$

为渐近稳定平衡点,我们称此平衡点为目标平衡点.方程(11)是线性正阻尼方程,所以该平衡点是换式后的相轨迹的运动目标,任何衰减过程(周期的或非周期的衰减过程)都是趋向目标平衡点运动,而方程(11)目标平衡点是位于 $-2 < i$ 的区域中.

有头鸭相轨迹的形成过程为满足于(11)式初始条件的轨迹由 d 点出发,达到 $i = -2$ 处后,按(13)式的规律沿 ab 段运动,达到 $i = -2$ 处的 b 点后,于

目标平衡点是位于无头鸭相轨迹运动的区域内,相轨迹的运动规律由(11)式转换为(3)式,换式后的相轨迹经过(9)式的分界线,按(10)式的规律沿 bcd 线段再次运动到 d 点.以上就是发散的相轨线经过非线性函数的换式成为闭曲线的历程.有头鸭轨线的方程可以由(6)式(13)式共同描述.轨道由 cd 线段达到 d 点后,相轨线可能将会按(6)式规律作无头鸭轨迹运动.

为了保证系统(2)维持连续稳定的有头鸭型振荡,必须使系统(2)的平衡点位于非线性函数(3a)式的负斜率段,使系统(2)有不稳定平衡点,以保证轨道由 cd 段达到 d 点后,依然按(8)式规律运动在轨迹的 da 段.为了使有负斜率不稳定平衡点的系统(2)的相轨迹图4的 da 段尽可能地符合(6)式,其不稳定平衡点应紧靠近 0 点. $I = -1 \times 10^{-8} \neq 0$ 是非常小的偏置量.

5. 鸭轨迹形状的参数与弛张振荡

鸭轨线的形状多种多样,除了初始条件能够决定鸭轨线的形状外(4)式中的参数 L, C 也能影响鸭轨线的形状.设 $D = -C/L$, 由(6)式可得

$$i^2 + u - \frac{1}{D} = Ae^{-Du}. \quad (16)$$

为了分析 D 对鸭轨线的形状的影响,忽略(16)式左边的 $1/D$ 和 u (因为 D 是常量, u 与 Ae^{-Du} 变化相比也可以忽略)后得

$$i \approx Ae^{-\frac{Du}{2}} = Ae^{\frac{Cu}{2L}}. \quad (17)$$

当(17)式的指数为1时有

$$-Du/2 = Cu/2L = 1, u = 2L/C = 1/D. \quad (18)$$

此时的 u 值称为鸭轨线的转折指示值 u_T , 它表示从该值开始,有头鸭轨线将明显的在 $|i|$ 方向值的 $|u|$ 指数增加.图5显示了 $C/2L$ 取不同值时的 Canard 相轨迹. $C/2L$ 越小, u_T 距离 d 点的距离越远,有头鸭轨线的头部越小(图5(b)).当 $C/2L$ 足够小时,有头鸭轨线的腹部太大以至于看不到头鸭轨线的头部,有头鸭轨线就成为无头鸭轨线(图5(a)). $C/2L$ 越大, u_T 距离 d 点越近,有头鸭轨线的头部越大(如图5(c)),当 $C/2L$ 足够大时,有头鸭轨线的头部也因为大而看不到头鸭轨线的腹部,就成为众所周知的弛张振荡轨线,见图5(d).

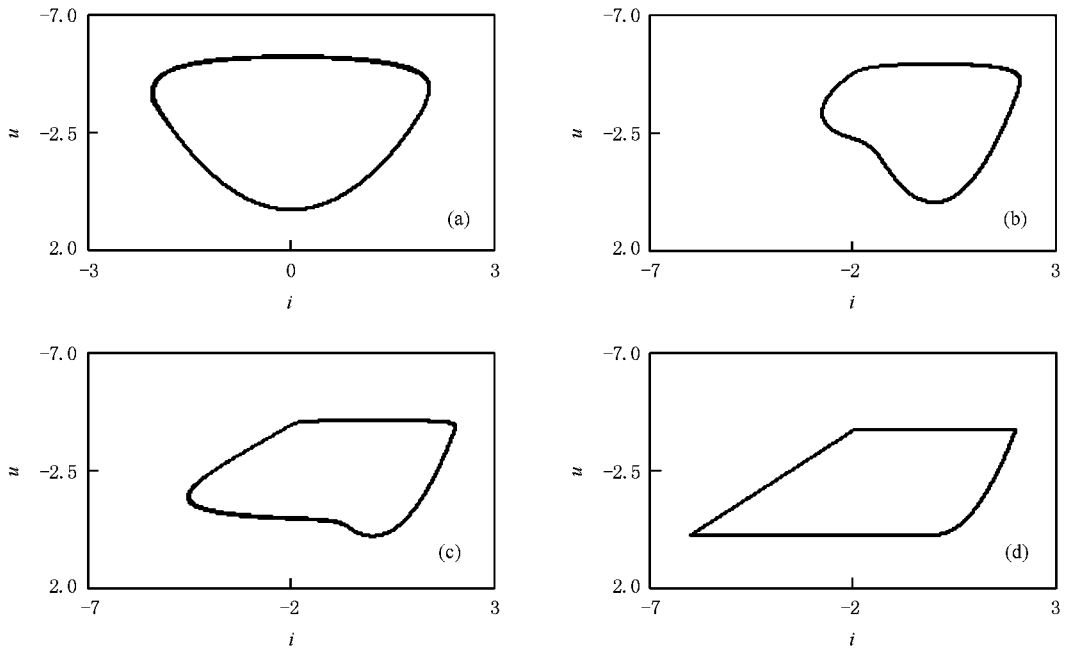


图 5 $C/2L$ 取不同值时的 Canard 相轨迹 (a) $C/2L=1$ (b) $C/2L=0.4$ (c) $C/2L=0.1$ (d) $C/2L=0.0002$

6. 结 论

1. 用一个分段的二次函数取代李纳(Lienard)方程中的 3 次非线性函数,使方程(2)的相轨迹方程可积,产生于该方程的复杂丰富的 Canard 相轨迹可以用无头鸭轨线方程和有头鸭轨线方程精确数学的描述.

2. 李纳(Lienard)方程中的弛张振荡器的解释是在参数 $\epsilon \rightarrow 0$ (或 $C/2L \rightarrow \infty$) 的极限情况下的近似

数学描述,而本文对有头鸭轨线的解释可以 ϵ (或 $C/2L$) 在任何情况下精确数学的描述,当然也包含弛张振荡器轨线的解释,弛张振荡器轨线仅是有头鸭轨线中的一种特例.有头鸭轨线的方程由(8)式,(10)式(13)式和(9)式共同描述,根据这些数学描述,弛张振荡器^[16,17]的相轨迹不再是跳跃的而是连续的,仅为其指数 $C/2L$ 很大.

本文得到了唐统一教授的关键的指导,在此深表感谢.

[1] Callot J L, Diener F, Diener M 1978 *C. R. Acad. Sci. Paris (Ser. 1)* **286** 1059
 [2] Benoit E, Callot J L, Diener F, Diener M 1981 *Collect. Math.* **31** 37
 [3] Xu Y 1996 *Chinese Science Bulletin* **41** 1478
 [4] Sanders J 1983 *Lecture Notes in Mathematics* **985** 288
 [5] Braakstna B, Crasman J 1993 *Physica D* **68** 269
 [6] Morten B, Jeppe S 2001 *Phys. Rev. E* **64** 26209
 [7] Francesco M, Gustau C, Pedro S, Salvador B, Oresle P 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 07390
 [8] Lutz R, Goze M 1981 *Lecture Notes in Mathematics* **88** 156
 [9] Eckhaus W 1983 *Springer Lecture Notes in Math.* **985** 449
 [10] Freire E, Gamero E, Rodriguez-Luis A T 1999 *Applied Mathematics Letters* **12** 73
 [11] Freddy D, Robert R 2001 *Journal of Differential Equations* **174** 1

[12] Makarov V A, Nekorkin V I, Uelarde M G 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3431
 [13] Doedel E T, Freire F, Gamero F, Rodriguez-Luis A T 2002 *Journal of Sound and Vibration* **256** 755
 [14] Андронов А А, Витт А А, Хайкин С З, Theory of vibration Scientific Press 1981. p154 (in Chinese) А. А. 安德罗诺夫, А. А. 维特, С. З. 哈依金著, 高为炳译 1981 振动理论(科学出版社)第 154 页
 [15] Xu Y, Zhang J X, Xu X, Zhou H 2007 *Chin. Phys.* **16** 2285
 [16] Yang X E, Gao H X, Li J S, Zheng J J, Yang Y Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1346 (in Chinese) [杨新娥, 高后秀, 李京生, 郑俊娟, 杨渝钦 2001 物理学报 **50** 1346]
 [17] Hou L J, Wang Y N 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 434 (in Chinese) [侯璐景, 王友年 2003 物理学报 **52** 434]

The principle of the phase track of Canard^{*}

Xu Yun¹⁾ Zhang Jian-Xia^{2)†} Xu Xia³⁾ Zhou Hong¹⁾

1) *State Key Laboratory of Power Systems ,Department of Electrical Engineering ,Tsinghua University ,Beijing 100084 ,China)*

2) *School of Electrical Engineering ,Guizhou University ,Guiyang 550003 ,China)*

3) *Guangdong Police Officer College Public-Course Department ,Guangzhou 510232 ,China)*

(Received 19 November 2007 ; revised manuscript received 13 January 2008)

Abstract

The complex phase tracks of Canard have caused concern of the scientists in the fields of physics ,biology and chemistry . In order to find the accurate function describing the phase track of Canard ,a nonlinear model involving consecutive segments is suggested ,from which the analytical solution of the phase track function of a nonlinear second order autonomous function can be readily obtained ,therefore the function describing the phase track of a Canard and its parametric conditions can be obtained analytically . It follows that all the phase tracks can be simply described by two kinds of functions .

Keywords : non-system , phase tracks of Canard , relaxation oscillation

PACC : 0547 , 4630M

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 59577025) and the Fundamental Research Foundation of Tsinghua University of China (Grant No. JC2001021).

[†] E-mail : xuyun@tsinghua.edu.cn