

量子环中量子比特的性质^{*}

高宽云 赵翠兰[†]

(内蒙古民族大学物理与电子信息学院, 通辽 028043)

(2007 年 10 月 31 日收到, 2007 年 11 月 16 日收到修改稿)

通过精确求解能量本征方程获得量子环的电子能态, 并利用电子的基态和第一激发态构造一个量子比特. 对 InAs/GaAs 量子环的数值计算表明: 当环尺寸给定时, 量子比特内电子的概率密度分布与坐标位置及时间有关, 在环内中心位置处电子出现的概率最大, 电子的概率密度随柱坐标内的转角作周期性变化, 并且各个空间点处的概率密度均随时间做周期性振荡.

关键词: 量子环, 能量本征方程, 电子能态, 量子比特

PACC: 7125

1. 引言

随着分子束外延(MBE)、金属有机化合物气相沉淀(MOCVD)等技术的发展, 已经能够制备出各种各样的纳米结构, 量子环(QRs)作为一种三维受限的纳米结构, 最显著的拓扑特征是中间有一个圆孔, 从而产生了许多独特的光学、磁学和电学特性, 如光吸收、光增益及光反射谱更尖锐, 激子和杂质的束缚能增大, 出现永久电流效应, Aharonov-Bohm 效应, 量子干涉效应, 量子隧穿效应及库仑阻塞效应等. 由于这些特性, 使得量子环成为演示量子现象的最佳纳米系统, 并且在光电子、微电子和量子通信等领域具有极大的应用潜力. 因此, 量子环很快成为近年来研究的热点^[1-3]. 其中重要的一个方面是对量子环中电子特性的研究. Li 等^[4,5]用有效质量包络函数理论研究了三维 InAs/GaAs 量子环的电子态. Filikhin 等^[6-8]在能量依赖有效质量近似下, 用有限元方法研究三维量子环的电子态, 并分析量子环形状和尺寸对电子能态和有效质量的影响. Li 等^[9-11]用非线性迭代法研究了不同形状三维量子环的电子态. 这些研究都采用接近实际情况的有限深势阱得出了数值解, 如采用无限深势阱近似, 则可以获得解析解. 用解析解定量研究量子环的一些性质是非常方便的.

量子信息是一个非常热门的研究领域, 量子信息的载体可以是任意两态的微观粒子系统. 为了实现固态量子计算, 近年来人们提出了各种方案. Nakamura 提出超导电荷量子比特方案^[12], 从实验上验证了单量子比特的全部操作. Duan 等^[13]提出几何量子计算方案, 后来 Cen 等^[14]和 Li 等人将这一方案进行了创新^[15]. Li 等人^[16,17]在量子点量子比特研究中提出利用外加电场来增加消相干时间的方案. 王子武等^[18]研究了量子点量子比特. 量子环作为三维受限量子点的另一种选择, 可以选择量子环中电子的基态和第一激发态作为量子信息所需的二能级体系. 本文通过解析求解量子环中电子的能量本征方程, 研究 InAs/GaAs 量子环中量子比特的性质.

2. 理论计算

设电子在 InAs/GaAs 量子环中运动, 为了得到解析解, 我们采用有效质量和无限深势阱近似. 选取柱坐标系, 其坐标原点位于环中心处, z 轴垂直于环平面. 设量子环的内半径、外半径和高分别为 ρ_1 , ρ_2 和 h . 则单电子的哈密顿量为

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(\rho, \varphi, z), \quad (1)$$

其中 μ 为电子的有效质量, 限制势

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10347004), 内蒙古高校科研项目(批准号: NJ05074)资助的课题.

[†] 通讯联系人, E-mail: jmdzcl@163.com

$$\mathcal{K}(\rho, \varphi, z) = \begin{cases} 0, & (\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \rho \leq z \leq h) \\ \infty, & \text{其他区域.} \end{cases} \quad (2)$$

考虑到量子环特有的形状,利用边界条件和归一化条件,通过求解能量本征方程 $H\psi = E\psi$ 获得能量本征值

$$E_{lm} = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\omega_{lm} + \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 \right], \quad (3)$$

$$\psi_{lm}(\rho, \varphi, z) = \begin{cases} R_{lm}(\rho) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2}{h}} \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right), & (\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \rho \leq z \leq h) \\ 0, & \text{其他区域,} \end{cases} \quad (5)$$

$$R_{lm}(\rho) = C_{lm} [N_m(\sqrt{\omega_{lm}\rho_1})J_m(\sqrt{\omega_{lm}\rho}) - J_m(\sqrt{\omega_{lm}\rho_1})N_m(\sqrt{\omega_{lm}\rho})], \quad (6)$$

其中 $R_m(\rho)$ 为径向波函数,系数 C_{lm} 由归一化条件

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} |R_{lm}(\rho)|^2 \rho d\rho = 1 \text{ 确定. } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \text{ 为 } \varphi \text{ 方位的波}$$

函数 $\sqrt{\frac{2}{h}} \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right)$ 为 z 方向的波函数,前面系数分别为两个方向的归一化系数.

根据(3)–(6)式,可以研究量子环中量子比特的性质.

3. 量子比特的性质

为了更加清晰地理解量子环中量子比特的性质,我们对 InAs/GaAs 量子环做数值计算, $\mu = 0.024 m_0$, 其中 m_0 是自由电子质量.为了确定环中电子的基态和第一激发态,需对量子环中电子能量做分析计算.

图 1 表示当环高 $h = 10 \text{ nm}$, 环外径 $\rho_2 = 50 \text{ nm}$ 时,量子环中电子能量 E_{lm} 随环内径 ρ_1 的变化曲线.插图为有相同环高和环外径时,能量 E_{0m2} 随环内径的变化曲线.可见,能级 E_{lm} 随量子环内径 ρ_1 的增大而增大,这是因为环外径和环高给定时,环内径增大使电子的受限程度加强所致.当量子环外径一定时,能级间隔 $(E_{(m+1)n} - E_{lm})$ 随量子环内径的增大而减小,而能级间隔 $(E_{(l+1)mn} - E_{lm})$ 随量子环径向受限加强而增大,这些都是量子环量子尺寸效应的显著表现.

通过分析计算之后,得出量子环中电子能量 E_{lm} 与环内径 ρ_1 、环外径 ρ_2 和环高 h 有关,并且随环中电子受限程度的增强而增大.

$$J_m(\sqrt{\omega\rho_1})N_m(\sqrt{\omega\rho_2}) - J_m(\sqrt{\omega\rho_1})N_m(\sqrt{\omega\rho_1}) = 0, \quad (4)$$

其中 $J_m(x)$ 是整数阶 Bessel 函数, ρ_{1m} 为方程(4)的第 $(l+1)$ 个根,量子数 $l = 0, 1, 2, \dots, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 1, 2, 3, \dots$ 相应的归一化能量本征函数

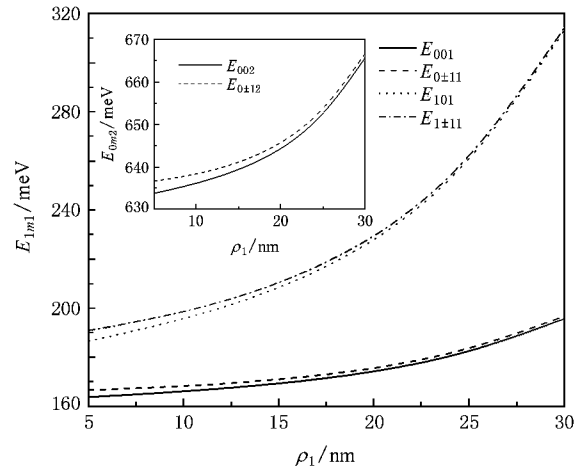


图 1 当环高和环外径给定时,量子环中电子能量 E_{lm} 随环内径 ρ_1 的变化曲线(插图为有相同环高和环外径时,能量 E_{0m2} 随环内径的变化曲线)

根据图 1 及量子环特有的选择定则,确定电子的基态和第一激发态分别为 E_{001} 和 $E_{0\pm 11}$.选取相应的归一化本征波函数为 ψ_{011} 和 ψ_{001} 两能级体系构造量子比特.当电子处于这样一个叠加态时

$$\Psi_{01}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{001}(\rho, \varphi, z) + \psi_{011}(\rho, \varphi, z)], \quad (7)$$

叠加态随时间的演化可以表示为

$$\Psi_{01}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{001}(\rho, \varphi, z) e^{-\frac{iE_{001}t}{\hbar}} + \psi_{011}(\rho, \varphi, z) e^{-\frac{iE_{011}t}{\hbar}}]. \quad (8)$$

电子在空间的概率密度

$$\mathcal{Q}(\rho, \varphi, z, t) = |\Psi_{01}(\rho, \varphi, z, t)|^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} |\psi_{001}(\rho, \varphi, z)|^2 + \frac{1}{2} |\psi_{011}(\rho, \varphi, z)|^2 \\
 &+ \frac{1}{\pi \hbar} R_{00}(\rho) R_{01}(\rho) \\
 &\times \sin^2\left(\frac{\pi}{h} z\right) \cos(\varphi - \sigma_{01} t), \tag{9}
 \end{aligned}$$

其中

$$\sigma_{01} = \frac{E_{011} - E_{001}}{\hbar}. \tag{10}$$

量子环的尺寸确定为环内径 $\rho_1 = 20 \text{ nm}$, 环外径 $\rho_2 = 40 \text{ nm}$, 环高 $h = 10 \text{ nm}$, 得出振荡周期为 $T = 2\pi \hbar / (E_{011} - E_{001}) = 2.2 \times 10^{-12} \text{ s}$. 研究量子环中量子比特的性质的具体结果见图 2 至图 5.

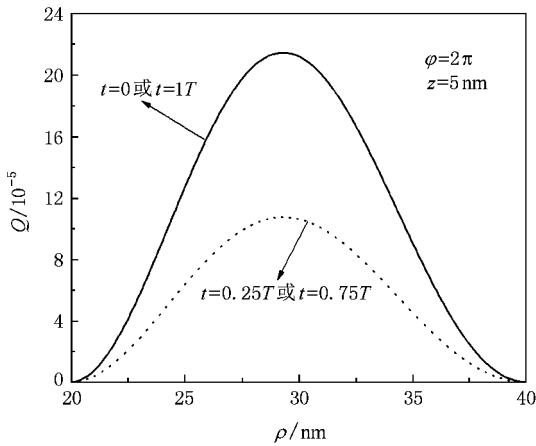


图 2 当 $\varphi = 2\pi, z = 5 \text{ nm}$ 时, 对于不同的时间 t , 概率密度随 ρ 的变化曲线

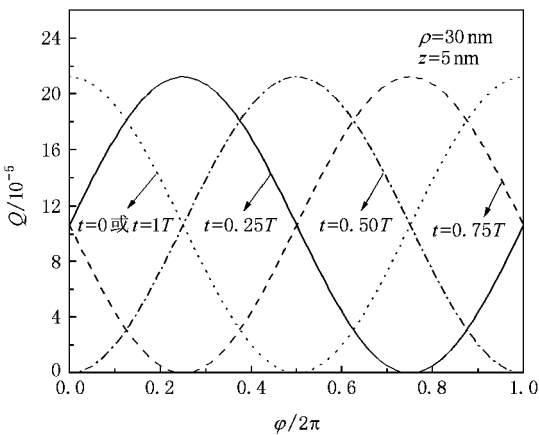


图 3 当 $\rho = 30 \text{ nm}, z = 5 \text{ nm}$ 时, 对于不同的时间 t , 概率密度随 φ 的变化曲线

由图 2 可知, 当 $\varphi = 2\pi, z = 5 \text{ nm}$ 时, 对于给定的时刻 t , 概率密度随径向变量 ρ 的变化而变化, 在 ρ

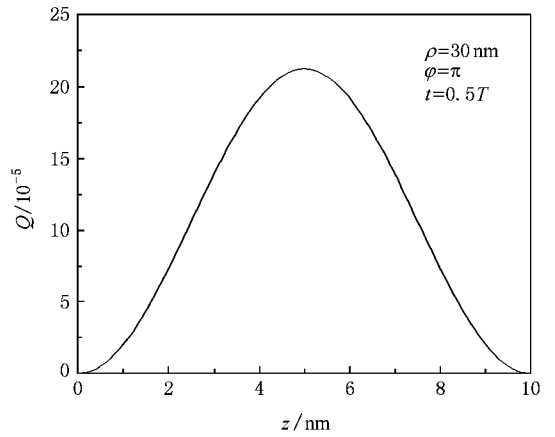


图 4 当 $\rho = 30 \text{ nm}, \varphi = \pi, t = 0.5 T$, 概率密度随 z 的变化曲线

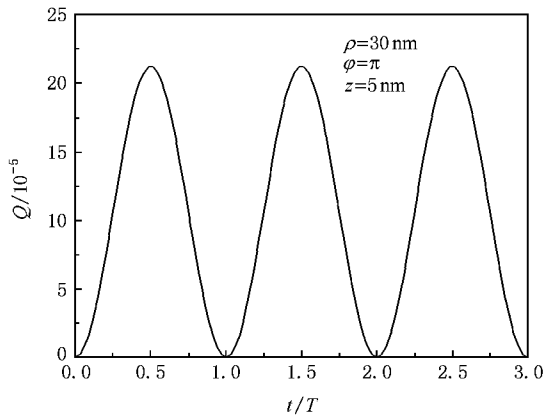


图 5 当 $\rho = 30 \text{ nm}, z = 5 \text{ nm}, \varphi = \pi$ 时, 概率密度随时间 t 的变化曲线

$= 30 \text{ nm}$ 处概率密度最大, 在内半径和外半径处概率密度为零; 且概率密度随时间而变, 结合图 5 可知, 各不同 ρ 处的概率密度随时间以 T 为周期进行振荡. 由图 3 可知, 当 $\rho = 30 \text{ nm}, z = 5 \text{ nm}$ 时, 对于给定的时刻 t , 概率密度随角度 φ 作周期性变化, 也可以看出, 对于给定的角度 φ , 概率密度随时间以 T 为周期进行振荡. 由图 4 看出, 当 $\rho = 30 \text{ nm}, \varphi = \pi, t = 0.5 T$, 概率密度随坐标 z 的变化而变化, 在 $z = 5 \text{ nm}$ 处概率密度最大, 在下底和上底概率密度为零; 结合图 5 可知, 各不同 z 处的概率密度均随时间以 T 为周期振荡. 综合上述图 2 至图 5 可知, 量子比特内的电子在环内中心处出现的概率最大, 在环与其他物质交界面处出现的概率为零, 环内各点处的概率密度均随时间以 T 为周期进行振荡. 由于实际中的量子环所受的限制势都是有限深势阱, 这样, 量子隧穿概率并不为零, 量子隧穿的可能性存在, 因此,

电子在环内各处出现的概率密度会比以上计算的值稍小. 但我们总可以对量子环采用深能级势垒, 防止量子隧穿的发生. 这样, 我们的结果就能够较准确地反映实际量子环中量子比特的性质.

4. 结 论

量子环中电子的能量与量子环高度、内半径和外半径有关, 并且随受限程度的增强而增大, 这是量

子环量子尺寸效应的显著表现. 由电子的基态和第一激发态二能级体系构造一个量子比特, 对 InAs/GaAs 量子环的数值计算表明: 当环尺寸给定时, 量子比特内电子的概率密度分布与坐标位置 ρ, z, φ 及时间 t 有关, 在环内中心位置处(即 $z = h/2, \rho = (\rho_2 + \rho_1)/2$) 电子出现的概率最大, 随角度 φ 做周期性变化, 并且各个空间点处的概率密度均随时间 t 做周期性振荡.

- [1] Alves F M, Marques G E, Richard V L, Trallero C 2007 *Semiconductor Science & Technology* **22** 301
- [2] Lee B C, Voskoboynikov O, Lee C P 2004 *Physica E* **24** 87
- [3] Lee C M, Ruan W Y, Li J Q, Lee Richard C H 2004 *Solid State Communications* **132** 737
- [4] Li S S, Xia J B 2001 *J. Appl. Phys.* **89** 3434
- [5] Li S S, Xia J B 2002 *J. Appl. Phys.* **91** 3227
- [6] Filikhin I, Deyneka E, Vlahovic B 2004 *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng* **12** 1121
- [7] Filikhin I, Deyneka E, Melikyan H, Vlahovic B 2005 *Molecular Simulation* **31** 779
- [8] Filikhin I, Suslov V M, Vlahovic B 2006 *Physica E* **33** 349
- [9] Li Y M 2003 *Journal of Computational Electronics* **2** 49
- [10] Li Y M, Voskoboynikov O, Lee C P, Sze S M 2002 *Journal of Computational Electronics* **1** 227
- [11] Li Y M 2003 *International Journal of Modern Physics C* **14** 995
- [12] Nakamura C Y, Pashkin Y A, Jsaï J S 1999 *Nature (London)* **398** 786
- [13] Duan L M, Cirac J I, Zoller P 2001 *Science* **292** 1695
- [14] Cen L X, Li X Q, Yan Y J 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 147902
- [15] Li X Q, Yan Y J 2002 *Phys. Rev. A* **65** 205301
- [16] Li S S, Long G L, Bai F S, Feng S L, Zheng H Z 2001 *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **98** 11847
- [17] Li S S, Xia J B, Yang F H, Niu Z C, Feng S L, Zheng H Z 2001 *J. Appl. Phys.* **90** 6151
- [18] Wang Z W, Xiao J L 2007 *Acta Physica Sinica* **56** 0678 (in Chinese) [王子武、肖景林 2007 物理学报 **56** 0678]

Properties of quantum bit in quantum ring^{*}

Gao Kuan-Yun Zhao Cui-Lan[†]

(College of Physics and Electronic Information, Inner Mongolia University for Nationalities, Tongliao 028043, China)

(Received 31 October 2007; revised manuscript received 16 November 2007)

Abstract

Electronic states of quantum ring are obtained by solving precisely the energy eigen-equation and a quantum bit is formed by both the ground state and the first excited state of the electron in the quantum ring. The numerical results for InAs/GaAs quantum ring indicate that when the size of quantum ring has been determined, the probability density distribution of an electron is related to its position in the quantum ring and time, there is a maximum of probability density for the given angle and time, and the probability density distribution of electron makes periodical oscillations in time and space.

Keywords: quantum ring, energy eigen-equation, electronic states, quantum bit

PACC: 7125

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10347004) and the Higher University Science Study Foundation of Inner Mongolia (Grant No. NJ05074).

[†] Corresponding author. E-mail: nmdzcl@163.com