第 57 卷 第 8 期 2008 年 8 月
1000-3290/2008/57(08)/4641-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57,No.8,August,2008

激光脉冲放大器增益通量的广义变分迭代解法*

林万涛[1)] 莫嘉琪[2)†] 张伟江[3)] 陈贤峰[3)]

1)(中国科学院大气物理研究所，北京 100029)

2)(安徽师范大学数学系，芜湖 241000)

3)(上海交通大学数学系，上海 200240)

(2007 年 9 月 13 日收到；2007 年 12 月 3 日收到修改稿)

研究一个激光脉冲放大器增益通量的模型. 利用广义变分迭代方法，首先决定 Lagrange 乘子，然后构造迭代关系式. 最后得到了相应模型近似解.

关键词：非线性，变分迭代，激光脉冲放大器

PACC：0230

1. 引 言

激光脉冲放大器是近代物理学的一个重要研究对象. 著名的'神光-Ⅱ'激光装置的研制就是这方面的一个典型课题[1—4]. 在研究这方面的问题时，需要了解有关物理量的性态. 例如能量增益、瞬时功率增益、增益通量、脉冲波形、光子数密度、能量密度等等. 目前对无损耗的激光放大器已经有较深入的研究结果[1]. 然而，对有损耗的情形还在更进一步的探讨中[2—4]. 其中遇到的一个困难就是所建立的模型是不能用显式精确解表述的非线性方程. 人们通常用数值模拟的方法来进行研究，这就在某种程度上对相应的物理量不能继续解析运算，因此具有一定的局限性. 本文从一类激光脉冲放大器的模型着手，引入一个简单有效的广义变分迭代方法，它能较迅速地求得较高精度的近似解析解.

近来许多学者已经研究了非线性问题. 一些近似方法被发展和深化[5—8]，包括平均法、边界层法、匹配渐近展开法、多重尺度法. 文献[9—16]利用渐近方法也研究了一类非线性问题. 本文是利用简单而特殊的变分迭代理论[17]讨论一个激光脉冲放大器模型.

2. 激光脉冲放大器模型

讨论如下一个含损耗的激光脉冲放大器增益通量耦合系统[2,4]：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = \bar{\sigma} c\phi\Delta - \gamma\phi, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = -\bar{\sigma} c\phi\Delta, \tag{2}$$

其中 ϕ 为光子数密度，Δ 为反转粒子数密度，c 为传播速度，γ 为光子数在传输过程中的损耗率，$\bar{\sigma}$为受激光辐射的截面.

为了简化运算，现将系统(1)，(2)作变换

$$\begin{aligned} I &= \bar{\sigma} c\phi,\\ \sigma &= \bar{\sigma} c\Delta,\\ \eta &= \frac{x}{c},\\ \tau &= \left(t - \frac{x}{c}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

将变换(3)式代入系统(1)，(2)，便有

$$\frac{\partial I}{\partial \eta} = (\sigma - \gamma) I, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = -\sigma I. \tag{5}$$

---

* 国家自然科学基金(批准号：40676016)、国家重点基础研究发展规划(批准号：2003CB415101-03，2004CB418304)、中国科学院知识创新工程重要方向性项目(批准号：KZCX3-SW-221)和上海市教育委员会科研计划(批准号：E03004)资助的课题.

† E-mail：mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

3. 广义变分迭代近似解

首先引入一组泛函 $F_i(i=1,2)$,

$$F_1 = I - \int_{-\infty}^{\tau}\int_{-\infty}^{\eta} \lambda_1(\tau_1,\eta_1) \times \left[\left(\frac{\partial I}{\partial \eta_1} - \tilde{\sigma}\ \tilde{I}\right) + \gamma I\right] \mathrm{d}\eta_1 \mathrm{d}\tau_1, \quad (6)$$

$$F_2 = \sigma - \int_{-\infty}^{\tau}\int_{-\infty}^{\eta} \lambda_2(\tau_1,\eta_1) \times \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \tau_1} + \tilde{\sigma}\ \tilde{I}\right] \mathrm{d}\eta_1 \mathrm{d}\tau_1, \quad (7)$$

其中 $\tilde{\sigma}$,$\tilde{I}$ 分别为 σ,I 的限制变量,而 $\lambda_i(i=1,2)$ 为 Lagrange 乘子.

计算泛函(6),(7)式的变分 $\delta F_i(i=1,2)$,

$$\delta F_1 = \delta I - \left[\int_{-\infty}^{\tau} \lambda_1\Big|_{\eta_1=\eta} \mathrm{d}\tau_1\right]\delta I + \int_{-\infty}^{\tau}\int_{-\infty}^{\eta}\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \eta_1} - \gamma\lambda_1\right)\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\tau_1\delta I,$$

$$\delta F_2 = \delta\sigma - \left[\int_{-\infty}^{\eta} \lambda_2\Big|_{\tau_1=\tau} \mathrm{d}\eta_1\right]\delta\sigma + \int_{-\infty}^{\tau}\int_{-\infty}^{\eta}\frac{\partial \lambda_2}{\partial \tau_1}\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\tau_1\delta\sigma.$$

为使上述变分为零,即 $\delta F_i = 0(i=1,2)$,设

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \eta_1} - \gamma\lambda_1 = 0, \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial \tau_1} = 0, \quad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{\tau} \lambda_1\Big|_{\eta_1=\eta}\mathrm{d}\tau_1 = 1, \quad \int_{-\infty}^{\eta} \lambda_2\Big|_{\tau_1=\tau}\mathrm{d}\eta_1 = 1. \quad (9)$$

由(8),(9)式可得

$$\lambda_1 = \exp(\gamma(\eta_1-\eta) + (\tau_1-\tau)), \quad \lambda_2 = \exp(\eta_1-\eta). \quad (10)$$

再由泛函(6),(7)式以及(10)式,构造如下的变分迭代:

$$I_{n+1} = I_n - \int_{-\infty}^{\tau}\int_{-\infty}^{\eta}\left[\exp(\gamma(\eta_1-\eta)+(\tau_1-\tau))\right] \times \left[\left(\frac{\partial I_n}{\partial \eta_1} - \sigma_n I_n\right) + \gamma I_n\right]\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\tau_1, \quad (11)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \int_{-\infty}^{\tau}\int_{-\infty}^{\eta}\left[\exp(\eta_1-\eta)\right] \times \left[\frac{\partial \sigma_n}{\partial \tau_1} + \sigma_n I_n\right]\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\tau_1. \quad (12)$$

可以证明由迭代关系(11),(12)式决定的函数列 $\{I_n(\tau,\eta)\}$,$\{\sigma_n(\tau,\eta)\}$ 一致收敛.

事实上,由关系式(8),(9)并利用分部积分法,变分迭代(11),(12)式可以转化为

$$I_{n+1} = \int_{-\infty}^{\tau}\int_{-\infty}^{\eta}\left[\exp(\gamma(\eta_1-\eta)+(\tau_1-\tau))\right] \times [\sigma_n I_n]\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\tau_1,$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \int_{-\infty}^{\tau}\int_{-\infty}^{\eta}\left[\exp(\eta_1-\eta)\right] \times [\sigma_n I_n]\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\tau_1.$$

显然,选取初始迭代 I_0,σ_0 后,I_n,$\eta_n(n=0,1,2,\cdots)$ 在区域 $(\tau,\eta)\in S\{(-\infty,T_0]\times(-\infty,H_0]\}$ 一致有界,且存在足够大的正常数 M_1,有

$$|I_{n+1} - I_n| \leqslant \frac{M_1}{2}\int_{-\infty}^{\tau}\int_{-\infty}^{\eta}\left[\exp(\gamma\eta_1+\tau_1)\right] \times [|I_n - I_{n-1}| + |\sigma_n - \sigma_{n-1}|]\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\tau.$$

这里 T_0,H_0 为任意大的确定正常数.

在 $(\tau,\eta)\in((-\infty,T_0],(-\infty,H_0])$ 内,存在正常数 M_2,使得

$$|I_1 - I_0| \leqslant \frac{M_1M_2}{\gamma(1!)}\exp(1\times(\tau+\gamma\eta)),$$

$$|\sigma_1 - \sigma_0| \leqslant \frac{M_1M_2}{\gamma(1!)}\exp(1\times(\tau+\gamma\eta)).$$

若对任意的 n,有下列公式成立:

$$|I_n - I_{n-1}| \leqslant \frac{M_1^nM_2}{\gamma^n(n!)}\exp((n+1)(\tau+\eta)),$$

$$|\sigma_n - \sigma_{n-1}| \leqslant \frac{M_1^nM_2}{\gamma^n(n!)}\exp((n+1)(\tau+\eta)),$$

这时就有

$$|I_{n+1} - I_n| \leqslant M_1\int_{-\infty}^{\tau}\int_{-\infty}^{\eta}\left[\frac{M_1^nM_2}{\gamma^n(n!)}\exp((n+1) \times (\tau_1+\eta_1))\right]\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\tau.$$

$$\leqslant \frac{M_1^{n+1}M_2}{\gamma^{n+1}(n+1)!}\exp((n+1)(\tau+\eta)).$$

于是由数学归纳法知,在 $(\tau,\eta)\in((-\infty,T_0],(-\infty,H_0])$ 上,对于任意的正整数 n,恒有

$$|I_{n+1} - I_n| \leqslant \frac{M_1^{n+1}M_2}{\gamma^{n+1}(n+1)!}\exp((n+1)(\tau+\eta)).$$

再由比值判别法,级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{M_1^{n+1}M_2}{(n+1)!}\exp((n+1)(\tau+\eta))\right]$$

在 $(\tau,\eta)\in((-\infty,T_0],(-\infty,H_0])$ 上一致收敛,故级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(I_{n+1} - I_n)$ 在 $(\tau,\eta)\in((-\infty,T_0],$

$(-\infty, H_0])$ 上也绝对且一致收敛．用同样的方法可以证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma_{n+1}-\sigma_n)$ 在相同的区域也绝对且一致收敛．由此得知函数列 $\{I_n(\tau,\eta)\}$，$\{\sigma_n(\tau,\eta)\}$ 在 $(\tau,\eta)\in S\{(-\infty,T_0]\times(-\infty,H_0]\}$ 内一致收敛．

因此，分别将(11)，(12)式两边取极限，$I(\tau,\eta)=\lim\limits_{n\to\infty}I_n(\tau,\eta)$，$\sigma(\tau,\eta)=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(\tau,\eta)$)是系统(4)，(5)的一组解．

下面再来选择迭代关系(11)，(12)式的初始近似$(I_0(\tau,\eta),\sigma_0(\tau,\eta))$，使其成为系统

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_0}{\partial\eta}&=\sigma_0 I_0,\\ \frac{\partial\sigma_0}{\partial\tau}&=-\sigma_0 I_0\end{aligned}\tag{13}$$

的解．这是对应于激光脉冲传输无耗损的情形．利用初等方法能得到系统(13)的解[1]．事实上，首先令

$$R(\eta,\tau)=\int_{-\infty}^{\tau}I_0(\eta,\tau_1)\mathrm{d}\tau_1.\tag{14}$$

它的物理意义表示光脉冲在区间$(-\infty,\tau)$内的能量密度．由(13)式和实际情况的要求，当 $\tau\to-\infty$，$R\to0$ 时，$\frac{\partial R}{\partial\eta}\to0$，这时有

$$\frac{\partial R}{\partial\eta}=\bar{\sigma}(1-\exp(-R)),\tag{15}$$

其中 $\bar{\sigma}$ 为 $\tau\to-\infty$ 时的 σ 值．由(15)式不难得到

$$R(\eta,\tau)=\ln[1+(\exp\bar{R}(\tau)-1)\exp(\bar{\sigma}\eta)],\tag{16}$$

其中 $\bar{R}$ 为输入端的能量密度，即 $\bar{R}(\tau)=R(0,\tau)$．同时由(14)式知

$$\begin{aligned}\bar{I}(\tau)&=I_0(0,\tau)\\&=\frac{\partial\bar{R}(\tau)}{\partial\tau}.\end{aligned}\tag{17}$$

于是由(15)，(17)式，我们便得到无损耗情形下的解

$$\begin{aligned}I_0&=\frac{\bar{I}(\tau)\exp(\bar{R}(\tau)+\bar{\sigma}\eta)}{1+(\exp\bar{R}(\tau)-1)\exp(\bar{\sigma}\eta)},\\ \sigma_0&=\bar{\sigma}[-1+\exp(\bar{\sigma}\eta)-\exp(\bar{R}(\tau)+\bar{\sigma}\eta)].\end{aligned}\tag{18}$$

将由(18)式决定的系统(4)，(5)的初始近似(I_0,σ_0)代入变分迭代关系(11)，(12)式，依次便可决定系统的一次、二次近似，

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{\bar{I}(\tau)\exp(\bar{R}(\tau)+\bar{\sigma}\eta)}{1+(\exp\bar{R}(\tau)-1)\exp(\bar{\sigma}\eta)}+F(\eta,\tau),\\ \sigma_1&=\bar{\sigma}[-1+\exp(\bar{\sigma}\eta)-\exp(\bar{R}(\tau)+\bar{\sigma}\eta)],\end{aligned}\tag{19, 20}$$

$$\begin{aligned}I_2=&\frac{\bar{I}(\tau)\exp(\bar{R}(\tau)+\bar{\sigma}\eta)}{1+(\exp\bar{R}(\tau)-1)\exp(\bar{\sigma}\eta)}+F(\eta,\tau)\\&-\int_{-\infty}^{\tau}\int_{-\infty}^{\eta}[\gamma(\eta_1-\eta)+\exp(\tau_1-\tau)]\\&\times\Big[-\frac{\partial F(\eta_1,\tau_1)}{\partial\tau_1}+(\bar{\sigma}[-1+\exp(\bar{\sigma}\eta_1)\\&-\exp(\bar{R}(\tau_1)+\bar{\sigma}\eta_1)]-\gamma)F(\eta_1,\tau_1)\\&+\frac{\gamma\bar{I}(\tau_1)\exp(\bar{R}(\tau_1)+\bar{\sigma}\eta_1)}{1+(\exp\bar{R}(\tau_1)-1)\exp(\bar{\sigma}\eta_1)}\Big]\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\tau_1,\end{aligned}\tag{21}$$

$$\begin{aligned}\sigma_2=&\bar{\sigma}\Big[[-1+\exp(\bar{\sigma}\eta)-\exp(\bar{R}(\tau)+\bar{\sigma}\eta)]\\&-\int_{-\infty}^{\tau}\int_{0}^{\eta}[\exp(\eta_1-\eta)][-1+\exp(\bar{\sigma}\eta_1)\\&-\exp(\bar{R}(\tau_1)+\bar{\sigma}\eta_1)]F(\eta_1,\tau_1)\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\tau_1\Big].\end{aligned}\tag{22}$$

这里

$$\begin{aligned}F=&-\gamma\int_{-\infty}^{\tau}\int_{-\infty}^{\eta}[\exp(\gamma(\eta_1-\eta)+(\tau_1-\tau))]\\&\times\frac{\bar{I}(\tau_1)\exp(\bar{R}(\tau_1)+\bar{\sigma}\eta_1)}{1+(\exp\bar{R}(\tau_1)-1)\exp(\bar{\sigma}\eta_1)}\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\tau_1.\end{aligned}$$

将变换(3)式代入(19)—(22)式，可分别得到激光脉冲放大器的光子数密度 ϕ 和反转粒子数密度 Δ 的一次、二次近似解析表达式，

$$\begin{aligned}\phi_1=&\frac{1}{\bar{\sigma}c}\Big[\frac{\bar{I}(\tau)\exp(\bar{R}(t-x/c)+\bar{\sigma}x/c)}{1+(\exp\bar{R}(t-x/c)-1)\exp(\bar{\sigma}x/c)}\\&+F(x/c,t-x/c)\Big],\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}\Delta_1=&\frac{1}{c}[-1+\exp(\bar{\sigma}x/c)\\&-\exp(\bar{R}(t-x/c)+\bar{\sigma}x/c)],\end{aligned}\tag{24}$$

$$\begin{aligned}\phi_2=&\frac{1}{\bar{\sigma}c}\Big[\frac{\bar{I}(\tau)\exp(\bar{R}(t-x/c)+\bar{\sigma}x/c)}{1+(\exp\bar{R}(t-x/c)-1)\exp(\bar{\sigma}x/c)}\\&+F(x/c,t-x/c)-\int_{-\infty}^{\tau/t-x/c}\int_{-\infty}^{x/c}[\gamma(\eta_1-\eta)\\&+\exp(\tau_1-\tau)]\Big[-\frac{\partial F(\eta_1,\tau_1)}{\partial\tau_1}\\&+(\bar{\sigma}-\gamma)F(\eta_1,\tau_1)+(\bar{\sigma}[-1+\exp(\bar{\sigma}\eta_1)\\&-\exp(\bar{R}(\tau_1)+\bar{\sigma}\eta_1)]-\gamma)F(\eta_1,\tau_1)\\&+\frac{\gamma\bar{I}(\tau_1)\exp(\bar{R}(\tau_1)+\bar{\sigma}\eta_1)}{1+(\exp\bar{R}(\tau_1)-1)\exp(\bar{\sigma}\eta_1)}\Big]\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\tau_1\Big],\end{aligned}\tag{25}$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{c}\Big[\left[-1+\exp(\bar{\sigma}\eta)-\exp(\bar{R}(\tau)+\bar{\sigma}\eta)\right] + \int_{-\infty}^{\tau}\int_{0}^{\eta}\left[\exp(\eta_1-\eta)\right] \times \left[-1+\exp(\bar{\sigma}\eta_1)-\exp(\bar{R}(\tau_1)+\bar{\sigma}\eta_1)\right] \times F(\eta_1,\tau_1)\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\tau_1\Big]. \tag{26}$$

用相同的方法，可得系统(1),(2)的更高次近似解.

4. 结 论

对于激光脉冲放大器的能量增益、脉冲波形、功率平衡、光子数密度等的研究,需要我们在一定的假设下建立放大器的放大输运方程. 本文的广义变分迭代方法就是一个简单而有效的解析方法.

在本文中选取的一组泛函，用变分的方法选取形如(10)式的 Lagrange 乘子 $\lambda_i(i=1,2)$，以便构造的迭代序列 $\{I_n(\tau,\eta)\}$，$\{\sigma_n(\tau,\eta)\}$ 可以较快地去逼近精确解. 另外，利用对应的激光脉冲传输在无损耗情形的系统(13)的解(I_0,σ_0)出发作为解的初始近似，这样可以更迅速地得到近似解所要求的精度.

用广义变分迭代方法得到的是近似解析解，进行解析运算后,可以得到更多的相关物理量的性态. 例如,本文得到的(23)—(26)式为有损耗情形下的激光放大器模型(1)，(2)式的光子数密度 ϕ 和反转粒子数密度 Δ 的一次、二次近似. 不仅如此，我们还可对(23)—(26)式进行微分、积分等解析运算，从而可得到相应模型的激光脉冲在相应区间上的能量密度和光子数密度、瞬时功率增益、激光增益通量等物理量的瞬时值及其波形曲线、曲面图形的一次、二次近似.

[1] Bellman R，Birnbaum G，Wagner J 1963 *J. Appl. Phys. Sin.* **34** 780

[2] Liu R H，Tan W H 1995 *Acta Phys. Sin.* **44** 1929 (in Chineae) [刘仁红、谭维翰 1995 物理学报 **44** 1929]

[3] Tang L J，Cai X J，Lin Z Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1075 (in Chineae) [唐立家、蔡希洁、林尊琪 2001 物理学报 **50** 1075]

[4] Liu R H，Cai X J，Yang L，Zhang Z X，Bi J J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3140 (in Chineae) [刘仁红、蔡希洁、杨 琳、张志祥、毕纪军 2005 物理学报 **54** 3140]

[5] Ni W M，Wei J C 2006 *J. Diff. Eqns.* **221** 158

[6] Bartier J P 2006 *Asympt. Anal.* **46** 325

[7] Khasminskii R Z，Yin G 2005 *J. Diff. Eqns.* **212** 85

[8] Marques I 2005 *Nonlin. Anal.* **61** 21

[9] Mo J Q，Lin W T 2005 *Acta Math. Appl. Sin.* **21** 101

[10] Mo J Q，Lin W T，Zhu J 2004 *Prog. Nat. Sci.* **14** 1126

[11] Mo J Q，Zhang W J，He M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1843 (in Chineae) [莫嘉琪、张伟江、何 铭 2007 物理学报 **56** 1843]

[12] Mo J Q，Lin W T 2007 *Acta Phys. Sin* **56** 3662 (in Chineae) [莫嘉琪、林万涛 2007 物理学报 **56** 3662]

[13] Mo J Q，Zhang W J，Chen X F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6169 (in Chineae) [莫嘉琪、张伟江、陈贤峰 2007 物理学报 **56** 6169]

[14] Mo J Q，Wang H，Lin W T，Lin Y H 2006 *Chin. Phys.* **15** 671

[15] Mo J Q，Lin W T，Wang H 2007 *Chin. Phys.* **16** 951

[16] Mo J Q，Lin W T，Lin Y H 2007 *Chin. Phys.* **16** 1908

[17] He J H 2002 *Approximate Nonlinear Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou：Henan Science and Technology Press) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法 (郑州：河南科学技术出版社)]

Generalized variational iteration solving method for gain gluence of a laser pulse amplifier*

Lin Wan-Tao[1)] Mo Jia-Qi[2)†] Zhang Wei-Jiang[3)] Chen Xian-Feng[3)]

1)(*Institute of Atmospheric Physics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100029, *China*)

2)(*Department of Mathematics*, *Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China*)

3)(*Department of Mathematics*, *Shanghai Jiaotong University*, *Shanghai* 200240, *China*)

(Received 13 September 2007; revised manuscript received 3 December 2007)

Abstract

The model for gain fluence of a laser pulse amplifier is studied. Firstly, using the generalized variational iteration method, the Lagrange multipicator is determined. Then the iteration expansions are constructed. Thus approximate solutions for the corresponding model are obtained.

Keywords: nonlinear, variational iteration, laser pulse amplifier

PACC: 0230

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40676016), the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant Nos. 2003CB415101-03, 2004CB418304), the Main Direction Program of the Knowledge Innovation of Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX3-SW-221) and the Scientific Research Program of the Education Committee of Shanghai, China (Grant No. E03004).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn