第 57 卷 第 8 期 2008 年 8 月
1000-3290/2008/57(08)/4646-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57, No.8, August, 2008

一类 Landau-Ginzburg-Higgs 扰动方程孤子的近似解*

莫嘉琪[1)†]　陈丽华[2)]

1)(安徽师范大学数学系，芜湖 241000)

2)(福建师范大学福清分校数学与计算机科学系，福清 350300)

(2007 年 11 月 16 日收到；2007 年 12 月 6 月收到修改稿)

利用解析方法研究了一类 Landau-Ginzburg-Higgs 方程. 由广义变分迭代理论得到了相应方程的解,从而得到了对应方程孤子的近似解.

关键词：孤子，扰动，变分迭代

PACC：0230

1. 引　言

非线性问题孤子理论存在于物理学、力学和其他自然科学领域中，是当前国际上十分关注的一个研究对象. 近几年来在激波[1—4]、光波散射[5,6]、量子力学[7—9]、大气物理[10,11]、神经网络[12]、混沌[13]、爆炸与燃烧[14]等方面都涉及到这一研究. 非线性孤子理论各种定量和定性的方法也大量涌现. 文献[15—23]利用微分不等式、同伦变换、不动点原理等理论和方法在大气物理、海洋力学、激波、孤子理论、反应扩散等问题中研究了一系列非线性孤子及相应的问题. 本文利用广义变分迭代方法[24]从一种途径更简捷有效地研究了一类广义 Landau-Ginzburg-Higgs(LGH)扰动方程.

迄今为止,孤子理论大体可以分为两大类.一类是基于逆散射变换的孤子微扰论,它已形成了比较系统和完整的体系[25,26]；另一类是孤子微扰论的渐近方法,其要点是用扰动理论的渐近展开式将非线性孤子方程转化为线性方程求解. 这类理论完全摆脱了对逆散射变换所依赖的直接方法[27]. 本文所使用的广义变分迭代方法就属于后一类的进一步改进. 本文方法的优点在于思路简明、计算简单,可得到解的较高近似度. 另一个突出的优点是这样求得的扰动解保留了相应的解析特性. 因而不但能对得到的结果直接进行定量方面的分析,而且还能进行更深入的定性方面的解析分析. 不但如此,本方法还可适用于其他非线性问题,因此具有较广阔的研究前景.

典型的 LGH 方程已有一些研究[26,27]，这是一个标准的非线性方程,它代表的是各类相应自然现象的高度精简和浓缩. 因此从进一步研究的意义看,已经不能满足当前科学发展的需要,有必要研究更能代表真实自然现象的广义 LGH 扰动方程. 本文就是在这样的背景下提出来的.

讨论如下一类广义 LGH 扰动方程：

$$u_{tt} - u_{xx} - m^2 u + k^2 u^3 = g(u,\varepsilon), \tag{1}$$

其中 m, k, ε 为参数, g 为扰动项,设它是关于其变量为解析的函数.

在方程(1)中,当 $g=0$ 时,就是典型的 LGH 方程. 这时,它具有如下单孤子解[27]：

$$u(x,t) = \frac{m}{k}\tanh\frac{m}{\sqrt{2(1-\beta^2)}}(x - x_0 + \beta t)$$
$$(\beta^2 < 1), \tag{2}$$

其中参数 β 和 x_0 分别表示孤子的运动速度和初始位置.

2. 广义变分迭代

为了进一步求得广义 LGH 扰动方程(1)的解,

* 国家自然科学基金(批准号：40676016)、国家重点基础研究发展规划(批准号：2003CB415101-03, 2004CB418304)、中国科学院知识创新工程重要方向性项目(批准号：KZCX3-SW-221)和上海市教育委员会科研计划(批准号：E03004)资助的课题.

† E-mail：mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

引入泛函 $F[u]$.

$$F[u]=u-\int_0^t\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial\tau}-m^2u-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}+k^2\bar{u}^3-R(\bar{u},\varepsilon)\right)\mathrm{d}\tau,\tag{3}$$

其中 $\bar{u}$ 为 u 的限制变量[24]，λ 为 Lagrange 乘子. 泛函(3)式的变分 δF 为

$$\delta F=\delta u-(\lambda\delta u)\big|_{\tau=t}+\int_0^t\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\tau}-m^2\right)\delta u\mathrm{d}\tau.$$

令 $\delta F=0$，于是有

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\tau}=m^2\qquad(\tau>t),\tag{4}$$

$$\lambda(t)=1.\tag{5}$$

由(4)，(5)式可得

$$\lambda=m^2(\tau-t)+1.\tag{6}$$

由(3)，(6)式,我们构造如下广义变分迭代：

$$u_{n+1}=u_n-\int_0^t(m^2(\tau-t)+1)\times\left(\frac{\partial u_n}{\partial\tau}-m^2u_n+k^2u_n^3-R(u_n,\varepsilon)\right)\mathrm{d}\tau.\tag{7}$$

由于广义 LGH 扰动方程的结构及扰动项的解析性，这时

$$u(x,t)=\lim_{n\to\infty}u_n(x,t)$$

就是原方程(1)的解.

现选取无扰动情形下的 LGH 方程的孤子解

$$u_0(x,t)=\frac{m}{k}\tanh\frac{m}{\sqrt{2(1-\beta^2)}}(x-x_0+\beta t)\qquad(\beta^2<1)\tag{8}$$

作为广义变分迭代(7)式的初始近似. 将(8) 式代入(7) 式,有

$$u_1(x,t)=u_0(x,t)+\int_0^t(m^2(\tau-t)+1)\times R(u_0(x,\tau),\varepsilon)\mathrm{d}\tau.\tag{9}$$

由(7)式可依次得到 $u_n(x,t)$ $(n=2,3,\cdots)$，从而得到方程(1)的孤子扰动解，即

$$u(x,t)=\lim_{n\to\infty}u_n(x,t).\tag{10}$$

3. 应用举例

若在广义 LGH 扰动方程(1)中的扰动项是微扰的,为计算简单起见,不妨设

$$g(u,\varepsilon)=\varepsilon u^2,$$

其中 ε 为正的小参数. 这时相应的微扰方程为

$$u_{tt}-u_{xx}-m^2u+k^2u^3=\varepsilon u^2\qquad(0<\varepsilon\ll1).\tag{11}$$

由以上关系式(8)，(9)，不难得到 LGH 微扰方程(11)的孤子扰动解的一阶近似

$$\begin{aligned}&u_1(x,t)\\&=u_0(x,t)+\varepsilon\int_0^t(m^2(\tau-t)+1)(u_0(x,\tau))^2\mathrm{d}\tau\\&=\frac{m}{k}\tanh\frac{m}{\sqrt{2(1-\beta^2)}}(x-x_0+\beta t)\\&\quad+\frac{m^2\varepsilon}{k^2}\Big[\left(1-\frac{m^2t}{2}\right)t+\frac{1-m^2t}{\beta}\tanh(x-x_0)\\&\quad-\tanh(x-x_0+\beta t)\\&\quad+\frac{m^2}{\beta^2}\ln\frac{\cosh(x-x_0+\beta t)}{\cosh(x-x_0)}\Big]\qquad(\beta^2<1),\end{aligned}$$

其中 β 和 x_0 分别表示无扰动情形下 LGH 方程的孤子运动速度和初始位置.

继续通过(7)式可以依次得到 $u_n(x,t)$ $(i=2,3,\cdots)$. 将所得 $u_n(x,t)$代入(10) 式,便得到 LGH 微扰方程的孤子解 $u(x,t)$.

4. 结　　论

1) 由广义 LGH 扰动方程(1)左端的结构及其扰动项关于变元的性态以及由本文引入的广义变分迭代关系(3)式的解析性可知，在相应的条件下,由本文方法确定的函数列 $\{u_n(x,t)\}$ 是收敛的. 所以本文用广义变分迭代方法决定的孤子解(10)式收敛有效.

2) 本文的广义变分迭代方法的优点还在于这种方法简捷有效. 用此广义变分迭代方法得到孤子解的收敛快慢,关键取决于初始近似的选取. 本文选取的初始近似 $u_0(x,t)$是采用非扰动情形下的典型 LGH 方程的孤子解(2)式. 它保证了对应于扰动情形下的广义 LGH 扰动方程得到在要求的精度范围内的近似解，特别是对于微扰方程(11). 因而在所得结果中能较快速而有效地得到孤子近似解.

3) 本文主要是针对在自然界中常遇到的一个非线性模型——广义 LGH 扰动方程,提供数学的基本求解方法的理论依据. 同时，这种方法不同于一般的数值方法,本方法得到的是解析解,通过得到的解可以继续进行解析运算,从而可进一步得到相关物理量的定性结果和定量结果.

[1] McPhaden M J, Zhang D 2002 *Nature* **415** 603

[2] Gu D F, Philander S G H 1997 *Science* **275** 805

[3] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达、赵 强 2002 物理学报 **51** 10]

[4] Wu Q K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2510 (in Chinese) [吴钦宽 2005 物理学报 **54** 2510]

[5] Pan L X, Zhuo W M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1 (in Chinese) [潘留仙、左伟明 2005 物理学报 **54** 1]

[6] Tang R R 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 445 (in Chinese) [唐荣荣 2006 物理学报 **55** 445]

[7] Pan L X, Liu J L, Li S S, Niu Z C, Feng S L, Zheng H Z 2002 *Sci. China* A **32** 556 (in Chinese) [潘留仙、刘金龙、李树深、牛智川、封松林、郑厚值 2002 中国科学 A **32** 556]

[8] Lin Y H, Ji Z Z, Zeng Q C 1999 *Prog. Nat. Sci.* **9** 532

[9] Lin W T, Ji Z Z, Wang B, Zhang X 2002 *Prog. Nat. Sci.* **12** 1326 (in Chinese) [林万涛、季仲贞、王 斌、张 昕 2002 自然科学进展 **12** 1326]

[10] Lin Y H, Ceng Q C 1999 *Prog. Nat. Sci.* **9** 211

[11] Han X L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2590 (in Chinese) [韩祥临 2005 物理学报 **54** 2590]

[12] Wang L S, Xu D Y 2003 *Sci. China* E **32** 488 (in China) [王林山、徐道义 2003 中国科学 E **32** 488]

[13] Feng G L, Dai X G, Wang A H, Chou J F 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 606 (in Chinese) [封国林、戴新刚、王爱慧、丑纪范 2001 物理学报 **50** 606]

[14] Wu J F, Ye W H, Zhang W Y, He X S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1668 (in Chinese) [吴俊峰、叶文华、张维岩、贺贤士 2003 物理学报 **52** 1668]

[15] Lin W T, Mo J Q 2004 *Chin. Sci. Bull.* **48**(Ⅱ) 5

[16] Mo J Q, Zhu J, Wang H 2003 *Prog. Nat. Sci.* **13** 768

[17] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Prog. Nat. Sci.* **14** 550

[18] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Prog. Nat. Sci.* **17** 230

[19] Mo J Q, Zhang W J, He M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3233 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、何 铭 2006 物理学报 **55** 3233]

[20] Mo J Q, Zhang W J, He M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1843 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、何 铭 2007 物理学报 **56** 1843]

[21] Mo J Q, Zhang W J, He M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1847 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、何 铭 2007 物理学报 **56** 1847]

[22] Mo J Q, Wang H, Lin W T, Lin Y H 2006 *Chin. Phys.* **15** 671

[23] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Chin. Phys.* **16** 578

[24] He J H 2002 *Aproximate Nonlinear Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Press) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法 (郑州:河南科学技术出版社)]

[25] Huang N N 1996 *Soliton Theory and Perturbation Methods* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [黄念宁 1996 孤子理论和扰动方法 (上海:上海科技教育出版社)]

[26] Pan L X, Yan J R, Zhou C H 2003 *Chin. Phys.* **12** 594

[27] Fan E G, Zhang H Q 1997 *Acta Phys Sin.* **46** 1254 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1997 物理学报 **46** 1254]

Approximate solution for a class of solitons of the Landau-Ginzburg-Higgs perturbed equation*

Mo Jia-Qi[1)†] Chen Li-Hua[2)]

1) (*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu* 241000, *China*)

2) (*Department of Mathematics and Computer Science, Fuqing Branch of Fujian Normal University, Fuqing* 350300, *China*)

(Received 16 November 2007; revised manuscript received 6 December 2007)

Abstract

The corresponding solution for a class of Landau-Ginzburg-Higgs equation is considered using the analytic method. From the generalized variational iteration theory, the solution of corresponding equation is obtained. And then the approximate soliton solution of the solution for the equation is obtained.

Keywords: soliton, perturbation, variational iteration

PACC: 0230

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40676016), the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant Nos. 2003CB415101-03, 2004CB418304), the Main Direction Program of the Knowledge Innovation of Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX3-SW-221) and the Scientific Research Program of the Education Committee of Shanghai, China (Grant No. E03004).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn