

一类谐波激励相对转动非线性动力系统的 稳定性与近似解^{*}

时培明[†] 刘 彬 刘 爽

(燕山大学信息科学与工程学院, 秦皇岛 066004)

(2007 年 12 月 8 日收到, 2008 年 2 月 17 日收到修改稿)

建立具有一般非线性弹性力、广义摩阻力和谐波激励的一类相对转动非线性动力系统的动力学方程. 对相对转动非线性自治系统进行定性分析, 通过构造 Lyapunov 函数研究自治系统奇点的稳定性. 运用多尺度法求解谐波激励下非自治系统在几种不同共振响应下的近似解, 同时分析了主振系统稳态运动的稳定性.

关键词: 相对转动, 非线性动力系统, Lyapunov 函数, 稳定性

PACC: 0340D, 0313, 0316

1. 引 言

近代物理学领域中, 分析力学理论发展迅速. 1985 年 Carmeli^[1,2] 提出了转动相对论力学理论, 1996 年罗绍凯^[3,4] 建立了转动相对论分析力学理论. 此后转动系统相对论性分析力学的研究日趋活跃. 转动相对论系统的研究受到学术界的广泛重视. 文献[5,6]研究了转动相对论系统的代数结构、Noether 对称性和 Lie 对称性. 文献[7—9]探讨了具有质量分离或并入的变质量系统的转动相对论理论. 同时, 转动相对论系统动力学的积分理论^[10] 和转动系统的相对论性分析静力学理论^[11] 也取得了进展. 近年来, 转动相对论 Birkhoff 系统动力学的基本理论、对称性理论、积分的场理论、代数结构、几何理论、积分不变量及平衡稳定性等得到了研究^[12—25]. 基于相对性原理, 建立了弹性转轴任意两横截面间的相对转动线性和非线性动力学方程并进行了定量分析^[26—30], 研究了可归结为一类周期变系数线性系统的非线性相对转动系统的稳定性^[31] 及非线性刚度相对转动系统的动力学特性^[33—37].

相对转动系统包含许多非线性因素, 系统表现为复杂的动力学行为, 研究这类非线性动力系统的不同动力响应解的结构以及稳态运动的稳定性十分重要. 文献[32]研究了一类广义阻尼力和强迫激励

作用下相对转动非线性动力系统的动力学行为. 本文研究一类谐波激励下具有非线性弹性力和广义摩阻力的相对转动系统的动力学行为, 建立系统的一般动力学方程, 并研究自治系统奇点的稳定性. 运用多尺度法求解非自治系统的近似解, 并对主振响应进行了稳态运动稳定性分析. 这对动力传动系统的动力学行为分析与控制具有理论意义和应用价值.

2. 相对转动非线性动力系统的动力学方程

相对转动系统是广泛存在的动力传递基本动力学系统. 在文献[32]的基础上同时考虑具有一般非线性弹性力、广义摩阻力和谐波激励作用下建立系统的一般动力学方程. 系统的动能为

$$E = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} I_i \dot{\theta}_i^2 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2. \quad (1)$$

具有一般非线性弹性力的系统势能为

$$U = \sum_{l=2}^N \frac{1}{l} C_{l-1} (\theta_1 - \theta_2)^l = g(\theta_1 - \theta_2). \quad (2)$$

考虑广义摩阻力情形下的广义力为

^{*} 国家“十五”重大科技攻关计划 批准号 ZZ02-13B-02-03-1 资助的课题.

[†] E-mail: peiming.shi@163.com

$$Q_1 = F_1 - D(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \quad (3)$$

$$Q_2 = F_2 - D(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2). \quad (4)$$

这里 I_i ($i = 1, 2$) 为系统集中质量的转动惯量, C_{l-1} 为系统扭转刚度, $g(\theta_1 - \theta_2)$ 为势能函数, θ_i ($i = 1, 2$) 和 $\dot{\theta}_i$ ($i = 1, 2$) 分别为系统集中质量的转角和转速, F_i 为广义外力, D 为线性阻尼系数, $f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$ 为非线性摩擦阻力函数.

将(1)–(4)式代入具有耗散项的 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2), \quad (5)$$

可得

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + D(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + f_2(\theta_1 - \theta_2) = F_1, \quad (6)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 + D(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - f_2(\theta_1 - \theta_2) = F_2. \quad (7)$$

这里 q_j ($j = 1, 2$) 为广义坐标, $\ddot{\theta}_i$ ($i = 1, 2$) 为系统集中质量的角加速度, $f_2(\theta_1 - \theta_2)$ 为变化后的非线性弹性力函数.

考虑相对转角的变化, (6)和(7)式变形整理后得

$$\begin{aligned} & (\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} D(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \\ & + \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} f_2(\theta_1 - \theta_2) + \frac{I_1}{I_1 I_2} f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \\ & = \frac{1}{I_1 I_2} (I_2 F_1 - I_1 F_2). \end{aligned} \quad (8)$$

令

$$\theta_\Delta = \theta_1 - \theta_2,$$

$$\dot{\theta}_\Delta = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2,$$

$$\ddot{\theta}_\Delta = \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2,$$

(8)式化为

$$\ddot{\theta}_\Delta + a_1 f_1(\dot{\theta}_\Delta) + a_2 f_2(\theta_\Delta) = F(t), \quad (9)$$

式中 $f_1(\dot{\theta}_\Delta)$ 为相对转速 $\dot{\theta}_\Delta$ 的任意函数, 一般为非线性项, $f_2(\theta_\Delta)$ 为非线性弹性力项; a_1, a_2 为简约系数; $F(t)$ 为强迫激励项,

$$F(t) = \frac{1}{I_1 I_2} (I_2 F_1 - I_1 F_2).$$

方程(9)为同时考虑具有一般非线性弹性力、广义摩擦阻力和谐波激励下相对转动非线性动力系统的一般动力学方程. 这是工程中描述可简化为两质量

转动动力系统的基本方程, 是进一步分析该系统动力学行为的基础.

3. 自治系统的定性分析

实际工程物理结构中非线性弹性力和摩擦阻力不可避免. 针对一类普遍非线性弹性力形式和广泛存在的一类滑动摩擦阻情形研究相对转动非线性自治系统的稳定性.

令

$$\begin{aligned} f_1(\dot{\theta}_\Delta) &= -b_1 \dot{\theta}_\Delta + b_2 \dot{\theta}_\Delta^3, \\ f_2(\theta_\Delta) &= c_1 \theta_\Delta + c_2 \theta_\Delta^3, \end{aligned} \quad (10)$$

式中 b_1, b_2, c_1, c_2 为系数. 将(10)式代入(9)式, 取 $F(t) = 0$, 得到相对转动非线性动力系统的自治方程为

$$\ddot{\theta}_\Delta - a_1 b_1 \dot{\theta}_\Delta + a_1 b_1 \dot{\theta}_\Delta^3 + a_2 c_1 \theta_\Delta + a_2 c_2 \theta_\Delta^3 = 0. \quad (11)$$

令

$$c = a_1 b_1,$$

$$d = a_1 b_2,$$

$$\omega_0^2 = a_2 c_1,$$

$$e = a_2 c_2,$$

则(11)式化为

$$\ddot{\theta}_\Delta - c \dot{\theta}_\Delta + d \dot{\theta}_\Delta^3 + e \theta_\Delta^3 + \omega_0^2 \theta_\Delta = 0. \quad (12)$$

令

$$\theta_1 = \theta_\Delta,$$

$$\theta_2 = \dot{\theta}_\Delta,$$

系统(12)化为等价的一阶方程组

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \theta_2, \\ \dot{\theta}_2 &= -\omega_0^2 \theta_1 - e \theta_1^3 + c \theta_2 - d \theta_2^3. \end{aligned} \quad (13)$$

定理 1 当 $c < 0, d > 0, e = n^2 \omega_0^2, n$ 为常数时, 系统(13)在 $O(0, 0)$ 处是渐近稳定的.

证明 显然 $e > 0$ 时, 奇点 $O(0, 0)$ 是系统(13)的唯一平衡点. 令

$$\theta_1 = \theta,$$

$$\theta_2 = -\omega_0 \varphi,$$

则系统(13)化为

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\omega_0 \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \omega_0 \theta + \frac{e}{\omega_0} \theta^3 + c \varphi - d \omega_0^2 \varphi^3. \end{aligned} \quad (14)$$

建立 Lyapunov 函数

$$V(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \left(\theta^2 + \frac{1}{2} n^2 \theta^4 + \varphi^2 \right),$$

则 $V(\theta, \varphi)$ 为正定函数, 又有

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} \\ &= \theta \dot{\theta} + n^2 \theta^3 \dot{\theta} + \varphi \dot{\varphi} \\ &= \theta(-\omega_0 \varphi) + n^2 \theta^3 (-\omega_0 \varphi) \\ &\quad + \varphi \left(\omega_0 \theta + \frac{e}{\omega_0} \theta^3 + c\varphi - d\omega_0^2 \varphi^3 \right) \\ &= \left(\frac{e}{\omega_0} - n^2 \right) \omega_0 \theta^3 \varphi + \varphi^2 (c - d\omega_0^2). \end{aligned}$$

当 $e = n^2 \omega_0^2$, n 为常数时,

$$\frac{dV}{dt} = \varphi^2 (c - d\omega_0^2).$$

由于 $c < 0, d > 0$, 可见 $\dot{V}(\theta, \varphi)$ 为负定的, 于是系统 (13) 的零解是渐近稳定的. 证毕.

4. 谐波激励系统的近似解及稳定性

令

$$F(t) = K \cos(\Omega t) \quad (K \neq 0),$$

则自治系统 (12) 化为谐波激励下的非自治系统为

$$\ddot{\theta}_\Delta + \omega_0^2 \theta_\Delta - c \dot{\theta}_\Delta + d \theta_\Delta^3 + e \theta^3 = K \cos(\Omega t). \quad (15)$$

4.1. 主共振响应求解

令

$$\begin{aligned} -c &= 2\epsilon\mu, \\ d &= \epsilon\beta_1, \\ e &= \epsilon\alpha, \end{aligned}$$

对非线性项冠以小参数 ϵ , 为使外扰力和非线性阻尼项出现在同一摄动方程中, 设干扰力的幅值 K 为 $K = \epsilon k$, 则 (15) 式化为

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_\Delta + \omega_0^2 \theta_\Delta &= -\epsilon (2\mu \dot{\theta}_\Delta + \beta_1 \theta_\Delta^3 + \alpha \theta_\Delta^3) \\ &\quad + \epsilon k \cos(\Omega t). \end{aligned} \quad (16)$$

引入频率调制参数 σ , 令

$$\Omega = \omega_0 + \epsilon\sigma,$$

其中 $\sigma = O(1)$. 应用多尺度法^[37-40]求解系统 (16) 的近似解.

设系统 (16) 的解为

$$\theta_\Delta(t, \epsilon) = \theta_0(T_0, T_1) + \epsilon \theta_1(T_0, T_1) + \dots, \quad (17)$$

式中 $T_0 = t, T_1 = \epsilon t$. 同时激励写成 T_0, T_1 的形式,

将 $\epsilon k \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)$ 代入系统, 并考虑 ϵ^0 和 ϵ 的系数得

$$D_0^2 \theta_0 + \omega_0^2 \theta_0 = 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 \theta_0 + \omega_0^2 \theta_1 &= -2D_0 D_1 \theta_0 - 2\mu D_0 \theta_0 - \alpha \theta_0^3 \\ &\quad - \beta_1 (D_0 \theta_0)^3 + k \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1), \end{aligned} \quad (19)$$

式中 D_i 为偏微分算子,

$$D_i = \frac{\partial}{\partial T_i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

设系统 (18) 的解为

$$\begin{aligned} \theta_0 &= A(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) \\ &\quad + \bar{A}(T_1) \exp(-i\omega_0 T_0), \end{aligned} \quad (20)$$

将解代入方程 (19), 并将外激励写为复数形式, 有

$$\begin{aligned} D_0^2 \theta_0 + \omega_0^2 \theta_1 &= - \left[2i\omega_0 \left(A' + \mu A - \frac{3}{2} \beta_1 \omega_0^2 A^2 \bar{A} \right) \right. \\ &\quad \left. + 3\alpha A^2 \bar{A} \right] \exp(i\omega_0 T_0) \\ &\quad - (\alpha A^3 - i\beta_1 \omega_0^3 A^3) \exp(3i\omega_0 T_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} k \exp[i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)] \\ &\quad + \left[2i\omega_0 \left(\bar{A}' + \mu \bar{A} - \frac{3}{2} \beta_1 \omega_0^2 A \bar{A}^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - 3\alpha A \bar{A}^2 \right] \exp(-i\omega_0 T_0) \\ &\quad - (\alpha \bar{A}^3 + i\beta_1 \omega_0^3 \bar{A}^3) \exp(-3i\omega_0 T_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} k \exp[-i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)]. \end{aligned} \quad (21)$$

消除 θ_1 中的久期项得

$$\begin{aligned} 2i\omega_0 \left(A' + \mu A - \frac{3}{2} \beta_1 \omega_0^2 A^2 \bar{A} \right) \\ + 3\alpha A^2 \bar{A} - \frac{1}{2} k \exp(i\sigma T_1) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

下面引入 A 的极坐标形式

$$A = \frac{1}{2} a \exp(i\beta),$$

其中 a, β 为实函数. 将 $A = \frac{1}{2} a \exp(i\beta)$ 代入复方程并分解实部、虚部后得到

$$\begin{aligned} \omega_0 (a' + \mu a) \cos\beta - \omega_0 a \beta' \sin\beta \\ + \frac{3}{8} \alpha a^3 \sin\beta - \frac{3}{8} \beta_1 a^3 \omega_0^3 \cos\beta \\ - \frac{1}{2} k \sin(\sigma T_1) = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} -\omega_0 (a' + \mu a) \sin\beta - \omega_0 a \beta' \cos\beta \\ + \frac{3}{8} \alpha a^3 \cos\beta + \frac{3}{8} \beta_1 a^3 \omega_0^3 \sin\beta \\ - \frac{1}{2} k \cos(\sigma T_1) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

整理后得

$$a' = -\mu a + \frac{3}{8}\beta_1 a^3 \omega_0^2 + \frac{1}{2} \frac{k}{\omega_0} \sin(\sigma T_1 - \beta), \quad (25)$$

$$a\beta' = \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^3 - \frac{1}{2} \frac{k}{\omega_0} \cos(\sigma T_1 - \beta). \quad (26)$$

因此谐波激励下主共振首次近似解为

$$\theta_\Delta = a \cos(\omega_0 t + \beta) + O(\epsilon), \quad (27)$$

其中 a, β 由方程(25)和(26)确定.

将 a, β 的方程变为自治系统,引入 $\gamma = \sigma T_1 - \beta$, 方程(25)和(26)变为

$$a' = -\mu a + \frac{3}{8}\beta_1 a^3 \omega_0^2 + \frac{1}{2} \frac{k}{\omega_0} \sin\gamma, \quad (28)$$

$$a\gamma' = a\sigma - \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^3 + \frac{1}{2} \frac{k}{\omega_0} \cos\gamma. \quad (29)$$

激励方程的一次近似解变为

$$\theta_\Delta = a \cos(\Omega t - \gamma) + O(\epsilon),$$

当 $a' = \beta' = 0$ 时, 为稳态运动响应.

消去方程(28)和(29)中的 γ 可以得到频响方程. 改变系统参数时, 可以得到不同的幅频 ($a-\sigma$) 曲线. 位移非线性系数 α 、速度非线性系数 β_1 、阻尼系数 μ 和激励幅值 k 对主共振幅频曲线的影响如图 1 所示. 从图 1 中可以看出: 位移非线性系数 α 对曲线的弯曲程度有很大影响, 随着 α 的增大, 骨干曲线向右偏移. 速度非线性系数 β_1 主要影响振幅的大小, 对曲线的弯曲程度没有影响, 随着 β_1 的增大, 振幅减小且共振域变小. 阻尼系数 μ 仅对振幅 a 的大小有微弱影响, 对曲线的弯曲程度没有影响, 且不影响骨干曲线. 激励力幅值 k 对振幅影响很大, 随着 k 的增大, 振幅显著增大且共振域增大.

下面通过考察 a, γ 方程奇点的稳定性来确定稳态运动的稳定性. 令

$$a = a_0 + a_1, \quad (30)$$

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1,$$

式中 a_0, γ_0 为奇点, a_1, γ_1 为小扰动量. 将 a, γ 的

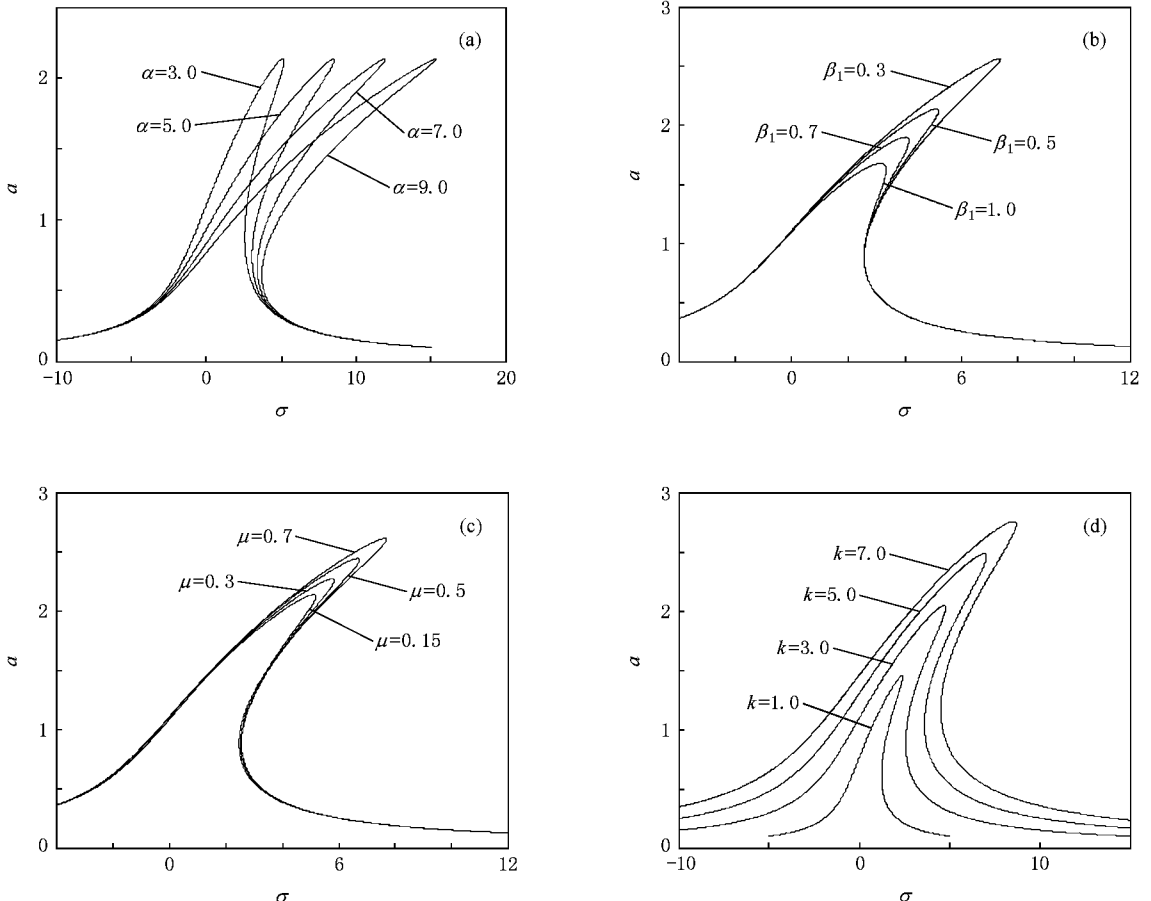


图 1 参数对系统主共振幅频特性的影响 (a)系数 α 的影响, $k = 3.0, \mu = 0.15, \beta_1 = 0.5, \omega_0 = 1.0$; (b)系数 β_1 的影响, $\alpha = 3.0, k = 3.0, \mu = 0.15, \omega_0 = 1.0$; (c)系数 μ 的影响, $\alpha = 3.0, k = 3.0, \beta_1 = 0.5, \omega_0 = 1.0$; (d)激励幅值 k 的影响, $\alpha = 3.0, \mu = 0.15, \beta_1 = 0.5, \omega_0 = 1.0$

表达式代入方程(28)和(29),同时保留 a_1, γ_1 的线性部分得到

$$a_1' = -\mu a_1 + \frac{9}{8}\beta_1 a_0^2 \omega_0^2 a_1 - a_0 \sigma \gamma_1 + \frac{3\alpha a_0^3}{8\omega_0} \gamma_1, \quad (31)$$

$$\gamma_1' = \frac{\sigma}{a_0} a_1 - \frac{9\alpha a_0}{8\omega_0} a_1 - \mu \gamma_1 + \frac{3}{8}\beta_1 a_0^2 \omega_0^2 \gamma_1 \quad (32)$$

或

$$a_1' = -\mu a_1 + \frac{9}{8}\beta_1 a_0^2 \omega_0^2 a_1 + \left(\frac{k}{2\omega_0} \cos \gamma_0\right) \gamma_1, \quad (33)$$

$$\gamma_1' = -\left(\frac{3\alpha a_0}{4\omega_0} + \frac{k}{2\omega_0 a_0^2} \cos \gamma_0\right) a_1 - \left(\frac{k}{2\omega_0 a_0} \sin \gamma_0\right) \gamma_1. \quad (34)$$

特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\mu + \frac{9}{8}\beta_1 a_0^2 \omega_0^2 - \lambda & -a_0 \sigma + \frac{3\alpha a_0^3}{8\omega_0} \\ \frac{\sigma}{a_0} - \frac{9\alpha a_0}{8\omega_0} & -\mu + \frac{3}{8}\beta_1 a_0^2 \omega_0^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (35)$$

整理后得

$$\lambda^2 + \left(2\mu - \frac{3}{2}\beta_1 a_0^2 \omega_0^2\right) \lambda + D = 0 \quad (36)$$

或

$$\lambda = \left(-\mu + \frac{3}{4}\beta_1 a_0^2 \omega_0^2\right) \pm \sqrt{\Delta}, \quad (37)$$

式中

$$D = \mu^2 - \frac{3}{2}\beta_1 a_0^2 \omega_0^2 \mu + \frac{27}{64}\beta_1^2 a_0^4 \omega_0^4 + \left(\sigma - \frac{3\alpha a_0^2}{8\omega_0}\right) \left(\sigma - \frac{9\alpha a_0^2}{8\omega_0}\right),$$

$$\Delta = -\frac{9}{64}\beta_1^2 a_0^4 \omega_0^4 + \left(\sigma - \frac{3\alpha a_0^2}{8\omega_0}\right) \left(\sigma - \frac{9\alpha a_0^2}{8\omega_0}\right).$$

(i) 当 $\Delta > 0, D < 0$ 时,特征值为一对异号的实根,不动点为鞍点.

(ii) 当 $\Delta > 0, D > 0, 2\mu - \frac{3}{2}\beta_1 a_0^2 \omega_0^2 > 0$ 时,不动点为不稳定的结点.

(iii) 当 $\Delta > 0, D > 0, 2\mu - \frac{3}{2}\beta_1 a_0^2 \omega_0^2 < 0$ 时,特征值为一对负实根,不动点为稳定的结点.

(iv) 当 $\Delta = 0, 2\mu - \frac{3}{2}\beta_1 a_0^2 \omega_0^2 > 0$ 时,特征值为一对相等的正实根,不动点退化为不稳定的临界

结点.

(v) 当 $\Delta = 0, 2\mu - \frac{3}{2}\beta_1 a_0^2 \omega_0^2 < 0$ 时,特征值为一对相等的负实根,不动点退化为稳定的临界结点.

(vi) 当 $\Delta < 0, 2\mu - \frac{3}{2}\beta_1 a_0^2 \omega_0^2 > 0$ 时,特征值为一对实部为正的复数,不动点为不稳定的焦点.

(vii) 当 $\Delta < 0, 2\mu - \frac{3}{2}\beta_1 a_0^2 \omega_0^2 < 0$ 时,特征值为一对实部为负的复数,不动点为稳定的焦点.

(viii) 当 $\Delta < 0, 2\mu - \frac{3}{2}\beta_1 a_0^2 \omega_0^2 = 0$ 时,特征值为一对纯虚根,不动点为中心.

由上述稳定性分析可知,当 $2\mu - \frac{3}{2}\beta_1 a_0^2 \omega_0^2 < 0$ 时,系统产生亚临界 Hopf 分叉;当 $2\mu - \frac{3}{2}\beta_1 a_0^2 \omega_0^2 > 0$ 时,系统产生超临界 Hopf 分叉,系统稳态解的稳定性发生变化,由稳定变为不稳定.

4.2. 非共振硬激励求解

当扰动激励频率 Ω 远离频率 ω_0 ,激励幅值为硬性时,即 $K = O(1)$. 于是渐近方程组为

$$D_0^2 \theta_0 + \omega_0^2 \theta_0 = K \cos(\Omega T_0), \quad (38)$$

$$D_0^2 \theta_1 + \omega_0^2 \theta_1 = -2D_0 D_1 \theta_0 - 2\mu D_0 \theta_0 - \alpha \theta_0^3 - \beta_1 (D_0 \theta_0)^3. \quad (39)$$

令方程(32)的解为

$$\theta_0 = A(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A} \exp(i\Omega T_0) + \bar{A}(T_1) \exp(-i\omega_0 T_0) + \Lambda \exp(-i\Omega T_0), \quad (40)$$

式中

$$\Lambda = \frac{1}{2} K (\omega_0^2 - \Omega^2)^{-1}.$$

将 θ_0 的解代入方程(39),得到

$$\begin{aligned} & D_0^2 \theta_1 + \omega_0^2 \theta_1 \\ &= -[2i\omega_0(A' + \mu A) + 6\alpha A \Lambda^2 + 3\alpha A^2 \bar{A} \\ &+ 3i\beta_1 \omega_0^3 A^2 \bar{A} + 6i\beta_2 \omega_0 \Omega^2 A \Lambda^2] \exp(i\omega_0 T_0) \\ &- A^3 (\alpha - \beta_1 \omega_0^3) \exp(3i\omega_0 T_0) \\ &- \Lambda^3 (\alpha - \beta_1 \Omega^3) \exp(3i\Omega T_0) \\ &- 3A^2 \Lambda (\alpha - \beta_1 \omega_0^2 \Omega) \exp[(\Omega + 2\omega_0)T_0] \\ &- 3\bar{A}^2 \Lambda (\alpha - \beta_1 \omega_0^2 \Omega) \exp[(\Omega - 2\omega_0)T_0] \\ &- 3A \Lambda^2 (\alpha - \beta_1 \omega_0 \Omega^2) \exp[(\Omega_0 + 2\Omega)T_0] \\ &- 3\Lambda^2 (\alpha \bar{A} - \beta_1 \omega_0 \Omega^2 A) \exp[(\omega_0 - 2\Omega)T_0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\Lambda \left(2i\mu\Omega + 3\alpha\Lambda^2 + 6\alpha A\bar{A} + 3\beta_1\Omega^3\Lambda^2 \right. \\
& \left. + 6\beta_1\omega_0^2\Omega^2 A\bar{A} \frac{1}{\Lambda} \right) \exp(i\Omega T_0) \\
& + [2i\omega_0(\bar{A}' + \mu\bar{A}) - 6\alpha\bar{A}\Lambda^2 - 3\alpha A\bar{A}^2 \\
& + 3i\beta_1\omega_0^3 A\bar{A}^2 + 6i\beta_1\omega_0\Omega^2 \bar{A}\Lambda^2] \exp(-i\omega_0 T_0) \\
& - \bar{A}^3(\alpha - \beta_1\omega_0^3) \exp(-3i\omega_0 T_0) \\
& - \Lambda^3(\alpha - \beta_1\Omega^3) \exp(-3i\Omega T_0) \\
& - 3\bar{A}^2\Lambda(\alpha - \beta_1\omega_0^2\Omega) \exp[-i(\Omega + 2\omega_0)T_0] \\
& - 3A^2\Lambda(\alpha - \beta_1\omega_0^2\Omega) \exp[-i(\Omega - 2\omega_0)T_0] \\
& - 3\bar{A}\Lambda^2(\alpha - \beta_1\omega_0\Omega^2) \exp[-i(\omega_0 + 2\Omega)T_0] \\
& - 3\Lambda^2(\alpha A - \beta_1\omega_0\Omega^2\bar{A}) \exp[-i(\omega_0 - 2\Omega)T_0] \\
& - \Lambda \left(-2i\mu\Omega + 3\alpha\Lambda^2 + 6\alpha A\bar{A} + 3\beta_1\Omega^3\Lambda^2 \right. \\
& \left. + 6\beta_1\omega_0^2\Omega^2 A\bar{A} \frac{1}{\Lambda} \right) \exp(-i\Omega T_0). \quad (41)
\end{aligned}$$

4.2.1. 当 Ω 远离 $0, \frac{1}{3}\omega_0, \omega_0, 3\omega_0$ 时

消除方程 (41) 中的久期项得到

$$\begin{aligned}
& 2i\omega_0(A' + \mu A) + 6\alpha A\Lambda^2 + 3\alpha A^2\bar{A} \\
& + 3i\beta_1\omega_0^3 A^2\bar{A} + 6i\beta_1\omega_0\Omega^2 A\Lambda^2 = 0. \quad (42)
\end{aligned}$$

令

$$A = \frac{1}{2} a \exp(i\beta),$$

代入方程 (42), 并分离实部、虚部得到

$$a' = -\mu a - \frac{3}{8}\beta_1\omega_0^2 a^3 - 3\beta_1 a\Omega^2 \Lambda^2, \quad (43)$$

$$\omega_0 a\beta' = 3\alpha a\Lambda^2 + \frac{3}{8}a^3. \quad (44)$$

因此硬激励下的系统首次近似解为

$$\theta_\Delta = a \cos(\omega_0 t + \beta) + K(\omega_0^2 - \Omega^2)^{-1} + O(\epsilon), \quad (45)$$

式中 a 的通解为

$$a = a_0 \exp(-\epsilon\mu t).$$

4.2.2. 超谐波共振

当 $\Omega \approx \frac{1}{3}\omega_0$ 时, 系统发生超谐波响应, 引入调制参数, 使得 $3\Omega = \omega_0 + \epsilon\sigma$. 把调制参数代入 θ_1 方程中将导致 $\exp(3i\Omega T_0)$ 项为久期项, 记

$$3\Omega T_0 = \omega_0 T_0 + \sigma T_1,$$

得到消除久期项的约束方程为

$$\begin{aligned}
& 2i\omega_0(A' + \mu A) + 6\alpha A\Lambda^2 + 3\alpha A^2\bar{A} \\
& + 3i\beta_1\omega_0^3 A^2\bar{A} + 6i\beta_1\omega_0\Omega^2 A\Lambda^2 \\
& + \Lambda^3(\alpha - \beta_1\Omega^3) \exp(i\sigma T_1) = 0. \quad (46)
\end{aligned}$$

令 $A = \frac{1}{2} a \exp(i\beta)$, 代入 (46) 式同时分离实部、虚部, 得到

$$\begin{aligned}
a' & = -\mu a - \frac{3}{8}\beta_1\omega_0^2 a^3 - 3\beta_1 a\Omega^2 \Lambda^2 \\
& - \frac{\Lambda^3}{\omega_0}(\alpha - \beta_1\Omega^3) \sin(\sigma T_1 - \beta), \quad (47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a\beta' & = \frac{3\alpha}{\omega_0} a\Lambda^2 + \frac{3\alpha}{8\omega_0} a^3 \\
& + \frac{\Lambda^3}{\omega_0}(\alpha - \beta_1\Omega^3) \cos(\sigma T_1 - \beta). \quad (48)
\end{aligned}$$

令 $\gamma = \sigma T_1 - \beta$, 将方程 (47) 和 (48) 变为自治系统, 得到

$$\begin{aligned}
a' & = -\mu a - \frac{3}{8}\beta_1\omega_0^2 a^3 - 3\beta_1 a\Omega^2 \Lambda^2 \\
& - \frac{\Lambda^3}{\omega_0}(\alpha - \beta_1\Omega^3) \sin\gamma, \quad (49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a\gamma' & = \sigma a - \frac{3\alpha}{\omega_0} a\Lambda^2 - \frac{3\alpha}{8\omega_0} a^3 \\
& - \frac{\Lambda^3}{\omega_0}(\alpha - \beta_1\Omega^3) \cos\gamma. \quad (50)
\end{aligned}$$

首次近似解为

$$\begin{aligned}
\theta_\Delta & = a \cos(3\Omega t - \gamma) + K(\omega_0^2 - \Omega^2)^{-1} \cos\Omega t \\
& + O(\epsilon). \quad (51)
\end{aligned}$$

消去方程 (49) 和 (50) 中的 γ 可以得到频响方程. 改变系统参数时, 可以得到不同的幅频 ($a-\sigma$) 曲线, 分析各参数对系统的影响. 位移非线性系数 α 、速度非线性系数 β_1 、阻尼系数 μ 和激励幅值 k 对超谐波共振幅频曲线的影响如图 2 所示. 从图 2 可以看出: 位移非线性系数 α 对振幅的大小、曲线的弯曲程度和共振域的大小都有很大影响, 随着 α 的增大, 振幅增大, 骨干曲线向右偏移且共振域增大. 速度非线性系数 β_1 主要影响振幅的大小, 对曲线的弯曲程度也有一定的影响, 随着 β_1 的增大, 振幅减小且共振域变小. 阻尼系数 μ 仅对振幅 a 的大小有微弱影响, 对曲线的弯曲程度没有影响, 且不影响骨干曲线. 激励力幅值 k 的影响与位移非线性系数 α 的影响相似, 随着 k 的增大, 振幅增大, 骨干曲线向右偏移且共振域增大.

4.2.3. 亚谐波共振

当 $\Omega \approx 3\omega_0$ 时, 系统发生亚谐波响应, 引入调制参数, 使得 $\Omega = 3\omega_0 + \epsilon\sigma$. 把调制参数代入 θ_1 方程中将导致 $\exp[i(\Omega - 2\omega_0)T_0]$ 项为久期项, 记

$$(\Omega - 2\omega_0)T_0 = \omega_0 T_0 + \sigma T_1,$$

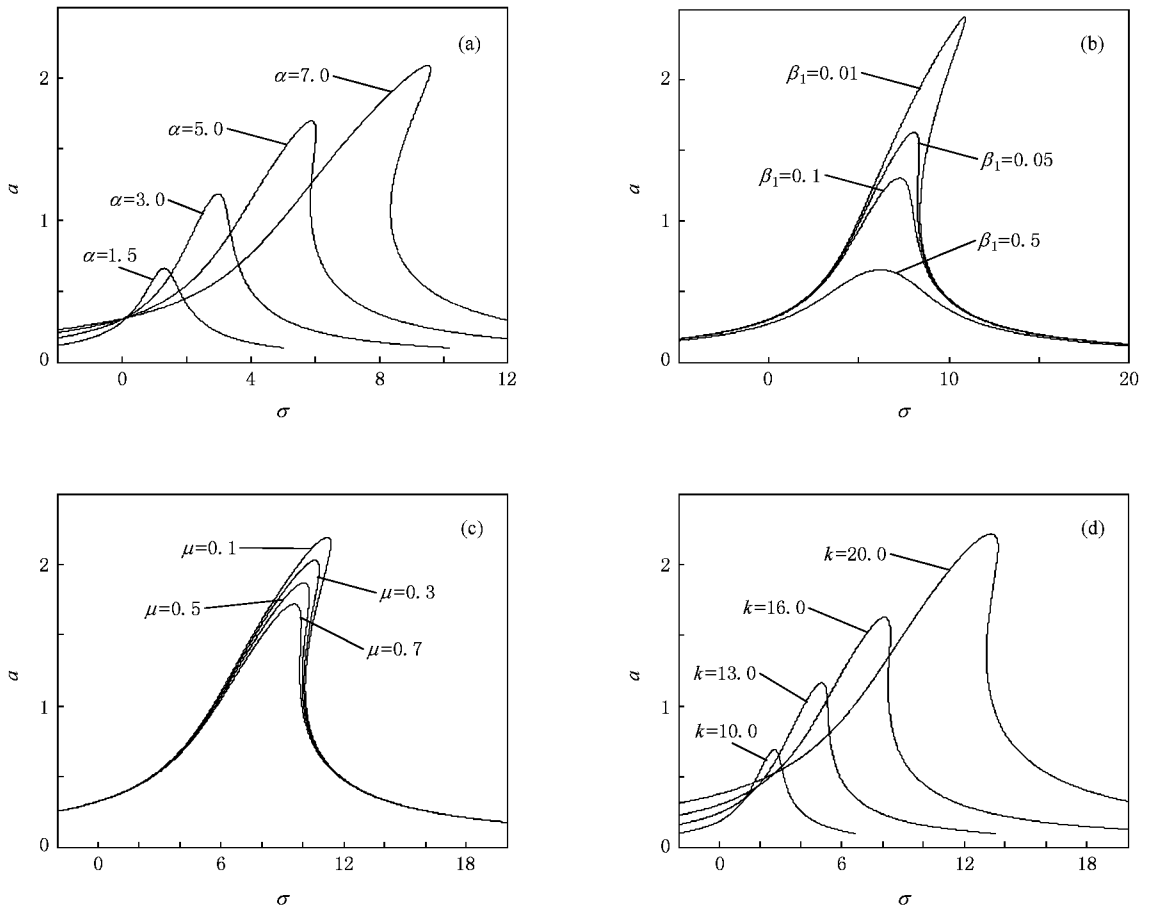


图2 参数对系统超谐波共振幅频特性的影响 (a)系数 α 的影响, $k=16.0, \mu=0.5, \beta_1=0.02, \omega_0=3.1, \Omega=1.0$; (b)系数 β_1 的影响, $\alpha=7.0, k=16.0, \mu=0.5, \omega_0=3.1, \Omega=1.0$; (c)系数 μ 的影响, $\alpha=7.0, k=16.0, \beta_1=0.05, \omega_0=3.1, \Omega=1.0$; (d)激励幅值 k 的影响, $\alpha=7.0, \mu=0.5, \beta_1=0.05, \omega_0=3.1, \Omega=1.0$

得到消除久期项的约束方程为

$$2i\omega_0(A' + \mu A) + 6\alpha A\Lambda^2 + 3\alpha A^2\bar{A} + 3i\beta_1\omega_0^3 A^2\bar{A} + 6i\beta_1\omega_0\Omega^2 A\Lambda^2 + 3\bar{A}^2\Lambda(\alpha - \beta_1\omega_0^2\Omega)\exp(i\sigma T_1) = 0. \quad (52)$$

令 $A = \frac{1}{2} a \exp(i\beta)$, 代入(52)式同时分离实部、虚部 得到

$$a' = -\mu a - \frac{3}{8}\beta_1\omega_0^2 a^3 - 3\beta_1 a\Omega^2 \Lambda^2 - \frac{3a^2\Lambda}{4\omega_0}(\alpha - \beta_1\omega_0^2\Omega)\sin(\sigma T_1 - 3\beta) \quad (53)$$

$$a\beta' = \frac{3\alpha}{\omega_0} a\Lambda^2 + \frac{3\alpha}{8\omega_0} a^3 + \frac{3a^2\Lambda}{4\omega_0}(\alpha - \beta_1\omega_0^2\Omega)\cos(\sigma T_1 - 3\beta) \quad (54)$$

令 $\gamma = \sigma T_1 - 3\beta$, 将方程(53)和(54)变为自治系统, 得到

$$a' = -\mu a - \frac{3}{8}\beta_1\omega_0^2 a^3 - 3\beta_1 a\Omega^2 \Lambda^2 - \frac{3a^2\Lambda}{4\omega_0}(\alpha - \beta_1\omega_0^2\Omega)\sin\gamma, \quad (55)$$

$$a\gamma' = \sigma a - \frac{9\alpha}{\omega_0} a\Lambda^2 - \frac{9\alpha}{8\omega_0} a^3 - \frac{9a^2\Lambda}{4\omega_0}(\alpha - \beta_1\omega_0^2\Omega)\cos\gamma. \quad (56)$$

首次近似解为

$$\theta_\Delta = a \cos\left(\frac{1}{3}\Omega t - \gamma\right) + K(\omega_0^2 - \Omega^2)^{-1} \cos\Omega t + O(\epsilon). \quad (57)$$

消去方程(55)和(56)中的 γ 可以得到频响方程. 改变系统参数时, 可以得到不同的幅频 ($a-\sigma$) 曲线. 分析各参数对系统的影响. 位移非线性系数 α 、速度非线性系数 β_1 、阻尼系数 μ 和激励幅值 k 对亚谐波共振幅频曲线的影响如图3所示. 从图3可以看出: 位移非线性系数 α 增大, 将使共振域明显

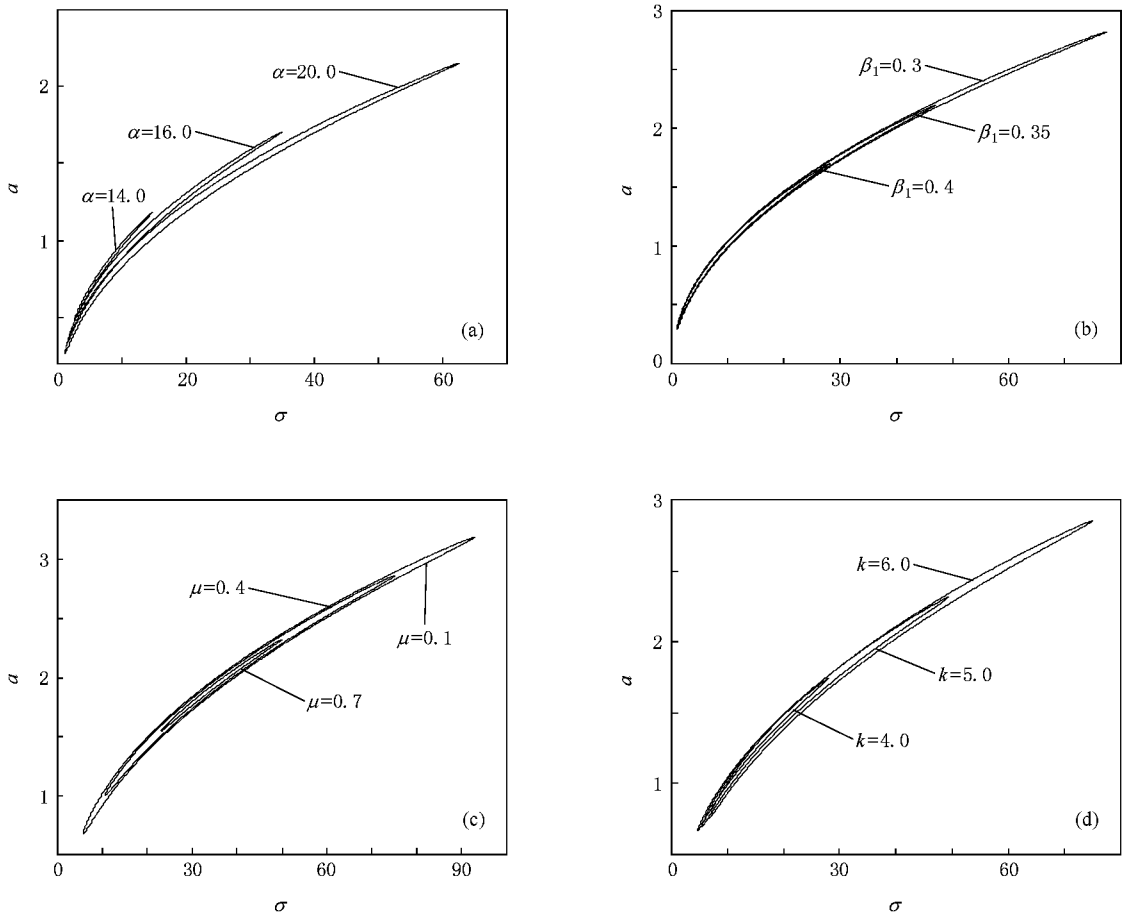


图 3 参数对系统亚谐波共振幅频特性的影响 (a)系数 α 的影响, $k = 2.0, \mu = 0.15, \beta_1 = 0.5, \omega_0 = 1.5, \Omega = 4.6$; (b)系数 β_1 的影响, $\alpha = 13.0, k = 2.0, \mu = 0.15, \omega_0 = 1.5, \Omega = 4.6$; (c)系数 μ 的影响, $\alpha = 12.0, k = 6.0, \beta_1 = 0.5, \omega_0 = 1.5, \Omega = 4.6$; (d)激励幅值 k 的影响, $\alpha = 12.0, \mu = 0.15, \beta_1 = 0.5, \omega_0 = 1.5, \Omega = 4.7$

增大. 速度非线性系数 β_1 对亚谐波共振的振幅影响不大, 但是随着 β_1 的增大, 共振域将明显减小. 随着阻尼系数 μ 的增大, 振幅将有所减小但不明显, 但是共振域将显著减小. 随着激励振幅 k 的增大, 亚谐波共振的振幅将增大, 并且使共振域也明显增大, 发生亚谐波共振的可能性也将增大.

5. 结 论

对考虑非线性弹性力、广义摩阻力和谐波激励

作用下相对转动非线性动力系统进行了研究. 应用分析力学中具有耗散项的广义 Lagrange 方程建立了系统的一般动力学方程. 通过构造 Lyapunov 函数研究自治系统奇点的稳定性, 运用多尺度法求解谐波激励下非自治系统在几种不同共振响应下的近似解, 并对主振响应进行了稳态运动稳定性分析, 表明系统在一定条件下发生亚临界、超临界 Hopf 分叉. 这对工程中广泛存在的动力传动系统的动力学行为分析与控制具有理论意义和应用价值.

[1] Carmeli M 1985 *Found. Phys.* **15** 175
 [2] Carmeli M 1986 *Int. J. Theor. Phys.* **25** 89
 [3] Luo S K 1996 *J. Beijing Inst. Technol.* **16**(S1) 154 (in Chinese)
 [罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16**(S1) 154]
 [4] Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 45
 [5] Fu J L, Chen X W, Luo S K 1999 *Appl. Math. Mech.* **20** 1266
 [6] Fu J L, Chen X W, Luo S K 2000 *Appl. Math. Mech.* **21** 549
 [7] Fang J H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1028 (in Chinese) [方建会

- 2000 物理学报 **49** 1028]
- [8] Fang J H , Zhao S Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 390 (in Chinese) [方建会、赵高卿 2001 物理学报 **50** 390]
- [9] Fang J H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1001 (in Chinese) [方建会 2001 物理学报 **50** 1001]
- [10] Luo S K , Guo Y X , Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2053 (in Chinese) [罗绍凯、郭永新、陈向炜 2001 物理学报 **50** 2053]
- [11] Jia L Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1039 (in Chinese) [贾利群 2003 物理学报 **52** 1039]
- [12] Luo S K 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 449
- [13] Luo S K , Chen X W , Guo Y X 2002 *Chin. Phys.* **11** 429
- [14] Luo S K , Chen X W , Guo Y X 2002 *Chin. Phys.* **11** 523
- [15] Luo S K , Fu J L , Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 383 (in Chinese) [罗绍凯、傅景礼、陈向炜 2001 物理学报 **50** 383]
- [16] Fu J L , Chen L Q , Luo S K , Chen X W , Wang X M 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2289 (in Chinese) [傅景礼、陈立群、罗绍凯、陈向炜、王新民 2001 物理学报 **50** 2289]
- [17] Luo S K , Guo Y X , Chen X W , Fu J L 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2049 (in Chinese) [罗绍凯、郭永新、陈向炜、傅景礼 2001 物理学报 **50** 2049]
- [18] Fu J L , Chen L Q , Xue Y , Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2683 (in Chinese) [傅景礼、陈立群、薛 纭、罗绍凯 2002 物理学报 **51** 2683]
- [19] Fu J L , Chen L Q , Xue Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 256 (in Chinese) [傅景礼、陈立群、薛 纭 2003 物理学报 **52** 256]
- [20] Zhang K , Feng J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2985 (in Chinese) [张凯、冯 俊 2005 物理学报 **54** 2985]
- [21] Luo S K , Lu Y B , Zhou Q , Wang Y D , Ouyang S 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1913 (in Chinese) [罗绍凯、卢一兵、周 强、王应德、欧阳实 2002 物理学报 **51** 1913]
- [22] Luo S K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 5 (in Chinese) [罗绍凯 2004 物理学报 **53** 5]
- [23] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]
- [24] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1416 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 1416]
- [25] Luo S K , Chen X W , Fu J L 2001 *Chin. Phys.* **10** 271
- [26] Dong Q L , Liu B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2191 (in Chinese) [董全林、刘 彬 2002 物理学报 **51** 2191]
- [27] Dong Q L , Wang K , Zhang C X , Liu B 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 337 (in Chinese) [董全林、王 坤、张春熹、刘 彬 2004 物理学报 **53** 337]
- [28] Zhao W , Liu B 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4543 (in Chinese) [赵武、刘 彬 2005 物理学报 **54** 4543]
- [29] Wang K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5530 (in Chinese) [王 坤 2005 物理学报 **54** 5530]
- [30] Meng Z , Liu B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6194 (in Chinese) [孟宗、刘 彬 2007 物理学报 **56** 6194]
- [31] Zhao W , Liu B , Shi P M , Jiang J S 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3852 (in Chinese) [赵 武、刘 彬、时培明、蒋金水 2005 物理学报 **54** 3852]
- [32] Shi P M , Liu B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3678 (in Chinese) [时培明、刘 彬 2007 物理学报 **56** 3678]
- [33] Rook T E , Singh R 1995 *J. Sound Vib.* **182** 303
- [34] Asokanthan S F , Meehan P A 2000 *J. Sound Vib.* **233** 297
- [35] Kim T C , Rook T E , Singh R 2005 *J. Sound Vib.* **281** 965
- [36] Duan C W , Singh R 2005 *J. Sound Vib.* **285** 803
- [37] El-Bassiouny A F 2006 *Physica A* **366** 167
- [38] Nayfeh A H 1981 *Introduction to Perturbation Techniques* (New York : Academic) p46
- [39] Nayfeh A H 1998 *Nonlinear Interactions* (New York : Academic) p55
- [40] El-Bassiouny A F 2005 *Appl. Math. Comput.* **162** 835

Stability and approximate solution of a relative-rotation nonlinear dynamical system under harmonic excitation^{*}

Shi Pei-Ming[†] Liu Bin Liu Shuang

(*College of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China*)

(Received 8 December 2007 ; revised manuscript received 17 February 2008)

Abstract

The dynamical equation of a relative-rotation nonlinear dynamical system with nonlinear elastic force and common friction and harmonic excitation is deduced. The singularity stability of the autonomous system is studied by constructing the Lyapunov function. The approximate solution of unautonomous equation with different resonance response under harmonic excitation is obtained by the method of multiple scales, and the stability of main resonance stable state of motion is studied.

Keywords : relatively rotation , nonlinear dynamical system , Lyapunov function , stability

PACC : 0340D , 0313 , 0316

^{*} Project supported by the National Significant Tackle Key Program for " 10th Five-Year " Plan of China (Grant No. ZZ02-13B-02-03-1).

[†] E-mail : peiming.shi@163.com