

调频信号的单模激光线性模型随机共振*

张良英¹⁾ 金国祥²⁾ 曹 力³⁾

1) 襄樊学院物理与电子信息技术系, 襄樊 441053)

2) 武汉工程大学计算机科学与工程学院, 武汉 430073)

3) 华中科技大学激光技术国家重点实验室, 武汉 430074)

(2007 年 11 月 6 日收到, 2008 年 3 月 31 日收到修改稿)

对单模激光增益模型的光强方程加入调频信号, 用线性化近似方法计算了以 δ 函数形式关联的两白噪声驱动下光强的输出功率谱及信噪比. 结果表明, 信噪比随抽运噪声和量子噪声强度的变化可出现典型随机共振, 受调制信号振幅的影响, 信噪比随载波信号频率和调制信号频率的变化出现抑制、单调上升、共振、抑制和共振等几种情况.

关键词: 抽运噪声, 单模激光, 随机共振, 调频信号

PACC: 0540, 4260K

1. 引 言

近 20 年来, 随机共振现象已引起人们的普遍关注和浓厚兴趣. 作为非线性问题的前沿课题之一, 随机共振研究在理论和实验上都取得了较大进展^[1-11]. 已有的研究成果大多是单频周期信号, 但实际应用中大多是调制信号, 研究调制信号的随机共振有广泛的应用. 例如, 文献 [12] 通过振幅调制信号产生差频分量来形成低频信号, 实现在较宽的频率范围内从强噪声中检测微弱周期信号. 大量的通信系统需要通过调制将基带信号变换为更适合于在信道中传输的形式, 所以在通信中常采用调制信号. 由于调频信号抗干扰性好, 广泛应用在要求高质量的场合, 因此研究调频信号的随机共振有着重要的现实意义. 将信号加载到激光辐射源上, 使激光作为传递信息的工具, 激光通信有广阔的应用前景. 文献 [13, 14] 研究了用调幅信号代替单频周期信号后单模激光增益模型的随机共振现象. 本文研究用调频信号代替单频周期信号后单模激光增益模型的随机共振现象. 我们研究了两个白噪声以 δ 函数形式互关联时在定态情况下的输出功率谱及信噪比, 发现信噪比随噪声强度的变化不但出现典型随机共振现象, 信噪比随载波信号频率和调制信号频率的变化还可出现广义随机共振现象. 广义随机共振受

调制信号振幅影响很大, 信噪比与信号频率的变化曲线随调制信号振幅由小变大可出现抑制、单调上升、共振、抑制和共振等几种不同的结果.

2. 输入调频波的线性化单模激光增益模型光强相关函数

单模激光增益模型^[15]输入调频信号后的光强方程为

$$\frac{dI}{dt} = -2KI + \frac{2\Gamma}{1+\beta I} I + D + \frac{2I}{1+\beta I} \xi(t) + 2\sqrt{I}\eta(t) + A\cos(\omega t + \beta_{FM}\sin\Omega t). \quad (1)$$

噪声 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的统计性质为

$$\xi(t) = \eta(t) = 0,$$

$$\xi(t)\xi(s) = Q\delta(t-s),$$

$$\eta(t)\eta(s) = D\delta(t-s),$$

$$\xi(s)\eta(t) = \xi(t)\eta(s)$$

$$= \lambda\sqrt{DQ}\delta(t-s) \quad (-1 \leq \lambda \leq 1). \quad (2)$$

这里 I 为激光光强; λ 为衡量噪声关联程度的参数; Q 和 D 分别为抽运噪声和量子噪声强度;

$$\beta = \frac{\tilde{A}}{\Gamma},$$

其中 \tilde{A} 和 Γ 分别为自饱和系数和增益系数; K 为损失系数; A 为载波信号振幅; β_{FM} 为调制信号振幅; ω 为载波信号频率; Ω 为调制信号频率.

* 湖北省教育厅科研基金重点项目(批准号: D200725001)资助的课题.

将(1)式在确定论定态光强

$$I_0 = \frac{\Gamma - K}{\beta K}$$

附近线性化, 令

$$I = I_0 + \epsilon(t),$$

代入(1)式可得线性化方程为

$$\frac{d\epsilon(t)}{dt} = -\gamma\epsilon(t) + D + \frac{2I_0}{1 + \beta I_0} \xi(t) + 2\sqrt{I_0} \eta(t) + A \cos(\omega t + \beta_{\text{FM}} \sin \Omega t), \quad (3)$$

式中 $\epsilon(t)$ 为微扰项,

$$\gamma = 2K(\Gamma - K)\Gamma.$$

调频信号可展开成级数形式,

$$A \cos(\omega t + \beta_{\text{FM}} \sin \Omega t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_{\text{FM}}) \cos(\omega + n\Omega)t,$$

式中 $J_n(\beta_{\text{FM}})$ 为第一类 n 阶贝塞尔函数,

$$J_n(\beta_{\text{FM}}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}\beta_{\text{FM}}\right)^{n+2m}}{m(n+m)!}.$$

根据平均光强相关函数的定义

$$\alpha(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Omega}{2\pi} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\Omega}} I(\zeta + \tau) I(\zeta) d\zeta,$$

可得到平均光强相关函数为

$$\alpha(\tau) = \frac{A^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(\beta_{\text{FM}})}{\gamma^2 + (\omega + n\Omega)^2} \cos(\omega + n\Omega)\tau + \left[\frac{2I_0^2 Q}{(1 + \beta I_0)^2 \gamma} + \frac{4I_0^{3/2} \lambda \sqrt{DQ}}{(1 + \beta I_0) \gamma} + \frac{2I_0 D}{\gamma} \right] e^{-\gamma|\tau|}. \quad (4)$$

对(4)式进行傅里叶变换, 得到光强功率谱为

$$S(\omega') = S_1(\omega') + S_2(\omega'),$$

式中 $S_1(\omega')$ 为输出信号功率谱, $S_2(\omega')$ 为输出噪声功率谱, 具体形式为

$$S_1(\omega') = \frac{\pi A^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(\beta_{\text{FM}})}{\gamma^2 + (\omega + n\Omega)^2} [\delta(\omega' - (\omega + n\Omega)) + \delta(\omega' + (\omega + n\Omega))],$$

$$S_2(\omega') = \left[\frac{4I_0^2 Q}{(1 + \beta I_0)^2 \gamma} + \frac{8I_0^{3/2} \lambda \sqrt{DQ}}{1 + \beta I_0} + 4I_0 D \right] \times \frac{1}{\gamma^2 + (\omega')^2}.$$

$S_1(\omega')$ 中包括两个 δ 函数, 我们只取正 ω' 的谱表示输出信号功率谱,

$$S_1(\omega') = \frac{\pi A^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(\beta_{\text{FM}})}{\gamma^2 + (\omega + n\Omega)^2}$$

$$\times \delta(\omega' - (\omega + n\Omega)).$$

输出信号功率谱中各个频率处的单位噪声功率可表示为

$$S_2(\omega + n\Omega) = \left[\frac{4I_0^2 Q}{(1 + \beta I_0)^2 \gamma} + \frac{8I_0^{3/2} \lambda \sqrt{DQ}}{1 + \beta I_0} + 4I_0 D \right] \times \frac{1}{\gamma^2 + (\omega + n\Omega)^2}.$$

输出信号总功率为

$$P_s = \int_0^{\infty} S_1(\omega') d\omega'. \quad (5)$$

信噪比定义为输出信号总功率与输出信号中各个频率处单位噪声功率之和的比值, 即

$$R = \frac{P_s}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_2(\omega + n\Omega)}, \quad (6)$$

式中

$$P_s = \frac{\pi A^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(\beta_{\text{FM}})}{\gamma^2 + (\omega + n\Omega)^2},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_2(\omega + n\Omega) = \left[\frac{4I_0^2 Q}{(1 + \beta I_0)^2 \gamma} + \frac{8I_0^{3/2} \lambda \sqrt{DQ}}{1 + \beta I_0} + 4I_0 D \right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma^2 + (\omega + n\Omega)^2}.$$

3. 输出光强的随机共振

输出信号中有无穷多个频率分量, 由于 $J_n^2(\beta_{\text{FM}})$ 随 n 增大下降很快, 近似计算调频信号可以取有限个频谱, m 的大小根据 β_{FM} 的值而定, β_{FM} 很小时调频信号的频谱与调幅信号的频谱相同, 下面讨论 $\beta_{\text{FM}} \geq 1$ 时调频信号的随机共振现象.

3.1. 信噪比 R 随抽运噪声强度 Q 和量子噪声强度 D 的变化

图 1(a) 是根据(6)式以量子噪声强度 D 为参数得到的 $R-Q$ 曲线. 从图 1(a) 可看到, 信噪比随着抽运噪声强度 Q 的变化可出现随机共振现象, 峰值随着 D 的增大而减小, 峰值位置向右移动.

图 1(b) 是根据(6)式以衡量噪声关联程度的参数 λ 为参数得到的 $R-Q$ 曲线. 从图 1(b) 可以看到, 当 λ 为负时信噪比随抽运噪声强度的变化可出现随机共振现象, 峰值随着 λ 绝对值的增大而增高, 极值位置向右移动. 当 λ 为零和 λ 为正时不出现随机共振现象, $R-Q$ 曲线呈单调衰减.

图 1(c) 是根据(6)式以载波信号振幅 A 为参数

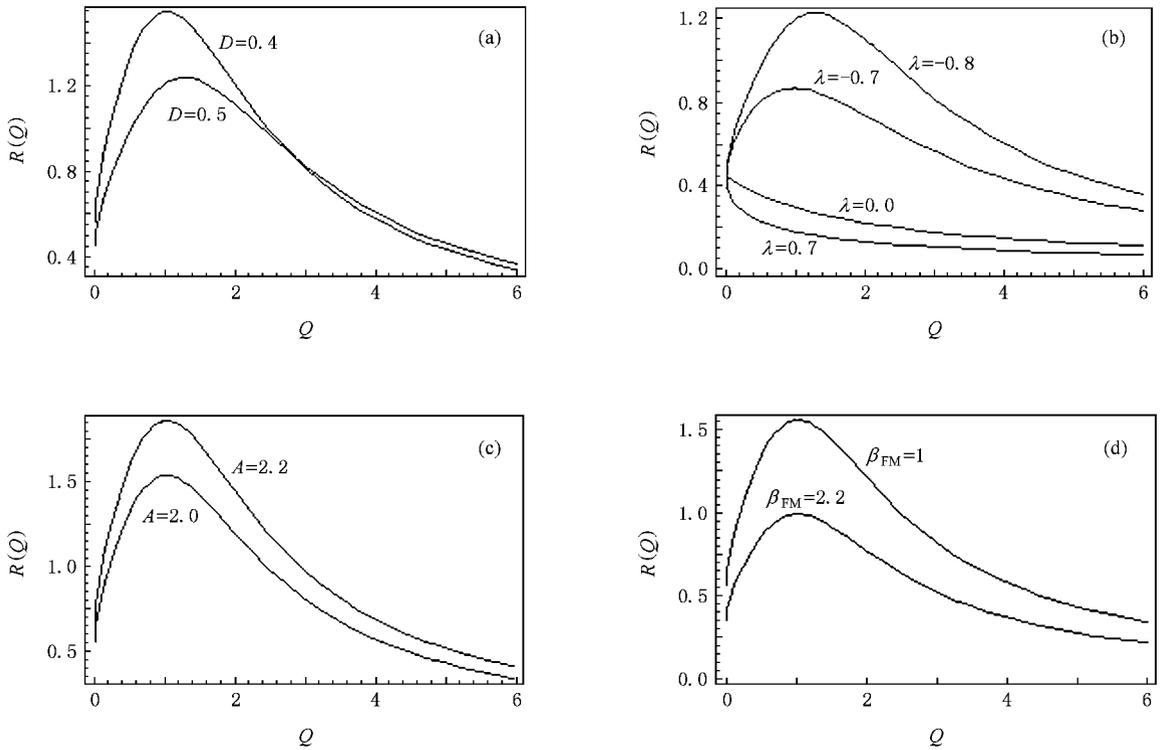


图 1 信噪比 R 随抽运噪声强度 Q 的变化 $\beta = 1, I_0 = 1, \gamma = 400, \Omega = 30, \omega = 800$. (a) $A = 2, \lambda = -0.8, \beta_{FM} = 1, n = 3$; (b) $A = 2, D = 0.5, \beta_{FM} = 1, n = 3$; (c) $D = 0.4, \lambda = -0.8, \beta_{FM} = 1, n = 3$; (d) $A = 2, D = 0.04, \lambda = -0.8$

得到的 $R-Q$ 曲线. 从图 1(c) 可看到, 随机共振峰值随 A 的增大而增高, 峰值位置不变.

图 1(d) 是根据 (6) 式以调制信号振幅 β_{FM} 为参数得到的 $R-Q$ 曲线. 从图 1(d) 可看到, 随机共振峰值随 β_{FM} 的增大而减小, 峰值位置不变.

信噪比 R 随量子噪声强度 D 的变化曲线和信噪比 R 随抽运噪声强度 Q 的变化曲线相似 (图略).

3.2. 信噪比 R 随载波信号频率 ω 和调制信号频率 Ω 的变化

图 2 是 β_{FM} 分别取 1, 1.6, 2.2, 5, 对应于 β_{FM} 的取值 n 分别取 3, 4, 5, 8, $\Omega = 700, 3500$ 时, 根据 (6) 式计算得到的 $R-\omega$ 曲线. 图 2(a) 是 β_{FM} 取 1, n 取 3 时以 Ω 为参数得到的 $R-\omega$ 曲线. 从图 2(a) 可以看到, Ω 值较小时曲线只有一个极小值, Ω 值较大时曲线的极小值右移并变宽成较深低谷, 即出现巨抑制. 在巨抑制处有一个小峰, 曲线最后趋于稳态. 图 2(b) 是 β_{FM} 取 1.6, n 取 4 时以 Ω 为参数得到的 $R-\omega$ 曲线. 从图 2(b) 可以看到, Ω 值较小时曲线只有一个极小值, Ω 值较大时曲线出现了一个峰和一个深谷 (巨抑制). 在深谷处有一个小峰, 曲线最后趋于

稳态. 图 2(c) 是 β_{FM} 取 2.2, n 取 5 时以 Ω 为参数得到的 $R-\omega$ 曲线. 从图 2(c) 可以看到, Ω 值较小的曲线出现了一个极大值和一个极小值, Ω 值较大的曲线出现了一个极大值和一个深谷. 在深谷处有两个小峰, 曲线最后趋于稳态. 图 2(d) 是 β_{FM} 取 5, n 取 8 时以 Ω 为参数得到的 $R-\omega$ 曲线. 从图 2(d) 可以看到, 曲线出现了两个大的峰和两个深谷, 在第二个大峰和第二个深谷处分别有两个小峰, 即出现多重随机共振现象.

图 2 说明 $R-\omega$ 曲线受 β_{FM} 的影响很大, β_{FM} 值较小时曲线只有极小值, 随着 β_{FM} 值的增大曲线出现一个极大值和一个极小值, β_{FM} 值再增大就会出现多重随机共振现象.

图 3 是 β_{FM} 分别取 1, 1.6, 2.2, 5, 对应于 β_{FM} 的取值 n 分别取 3, 4, 5, 8, $\omega = 400, 4000$ 时, 根据 (6) 式计算得到的 $R-\Omega$ 曲线. 图 3(a) 是 β_{FM} 取 1, n 取 3 时以 ω 为参数得到的 $R-\Omega$ 曲线. 从图 3(a) 可以看到, ω 值较小时 $R-\Omega$ 线单调上升后趋于一定值, ω 值较大时 $R-\Omega$ 曲线出现一深谷 (巨抑制), 并在深谷处出现一个小峰. 图 3(b) 是 β_{FM} 取 1.6, n 取 4 时以 ω 为参数得到的 $R-\Omega$ 曲线. 与图 3(a) 相比可看出, 图 3

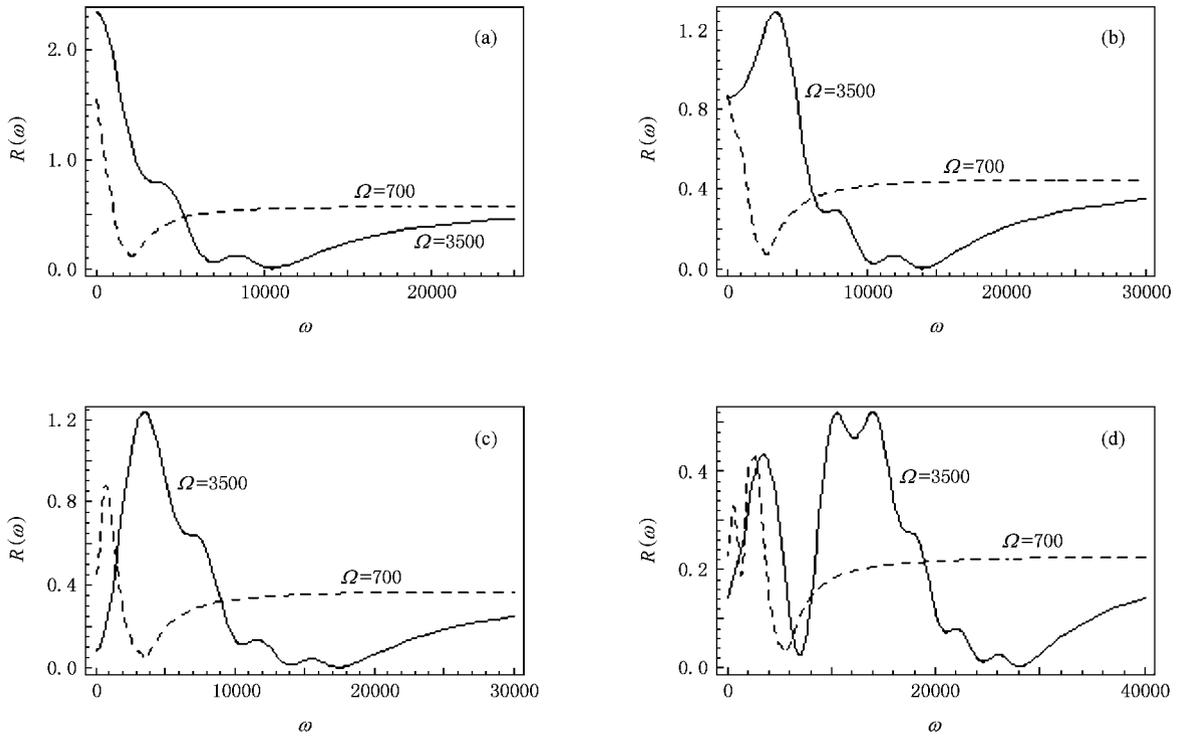


图2 信噪比 R 随载波信号频率 ω 的变化 $\beta = 1, I_0 = 1, A = 2, \lambda = -0.8, Q = 3, D = 0.5, \gamma = 400$. (a) $\beta_{FM} = 1, n = 3$; (b) $\beta_{FM} = 1.6, n = 4$; (c) $\beta_{FM} = 2.2, n = 5$; (d) $\beta_{FM} = 5, n = 8$

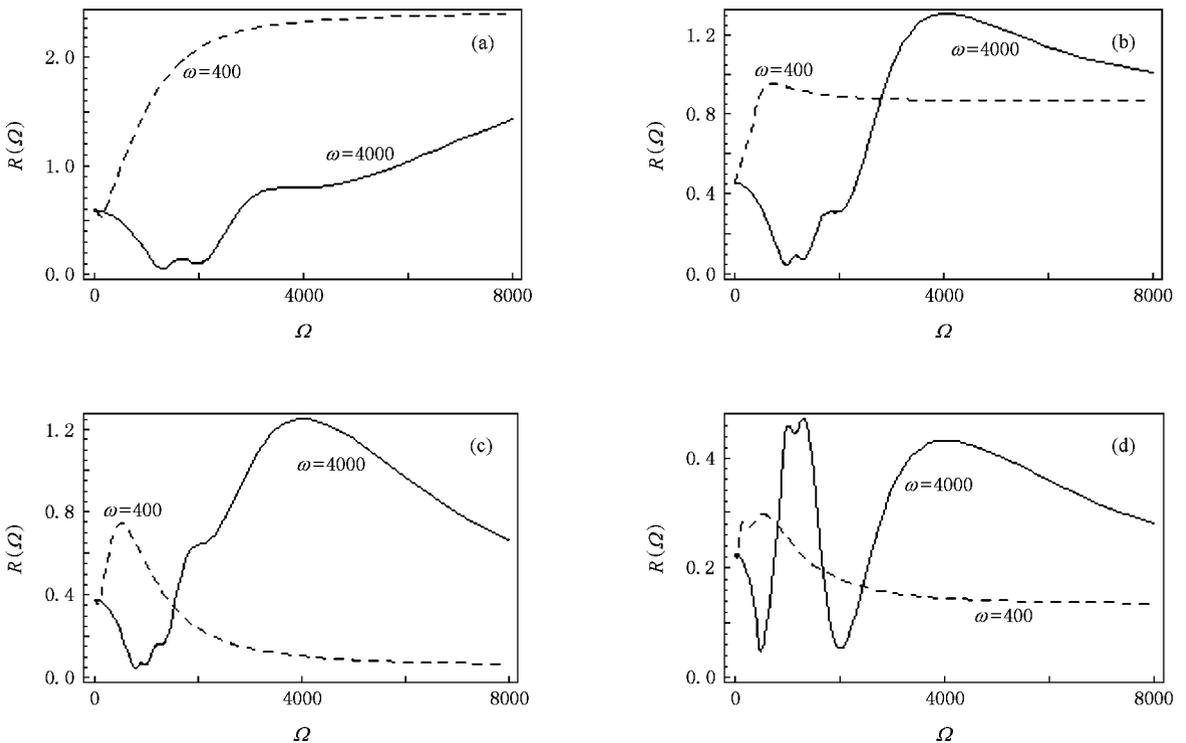


图3 信噪比 R 随调制信号频率 Ω 的变化 $\beta = 1, I_0 = 1, A = 2, \lambda = -0.8, Q = 3, D = 0.5, \gamma = 400$. (a) $\beta_{FM} = 1, n = 3$; (b) $\beta_{FM} = 1.6, n = 4$; (c) $\beta_{FM} = 2.2, n = 5$; (d) $\beta_{FM} = 5, n = 8$

(b)的曲线发生了很大变化, ω 值较小时曲线出现一个小峰, ω 值较大时曲线出现一个深谷和一个峰,在深谷处有一个小峰.图3(c)是 β_{FM} 取2.2, n 取5时以 ω 为参数得到的 $R-\Omega$ 曲线.从图3(c)可以看到, ω 值较小时曲线出现一个峰, ω 值较大时出现一个深谷和一个峰,在深谷处有一个很小的峰.图3(d)是 β_{FM} 取5, n 取8时以 ω 为参数得到的 $R-\Omega$ 曲线.从图3(d)可以看到, ω 值较小时曲线出现一个峰, ω 值较大时出现了两个大峰和两个深谷.在第一个大峰处有两个小峰,即出现多重随机共振现象.

图3说明 $R-\Omega$ 曲线受 β_{FM} 和 ω 影响很大, ω 值和 β_{FM} 值都较小时曲线单调上升后趋于一定值,增大 β_{FM} 值后曲线出现极大值.同时,增大 ω 值后曲线出现一个深谷和一个峰, β_{FM} 值和 ω 值都较大时曲线出现多重随机共振现象.

由于调制信号振幅 β_{FM} 对调频信号的单模激光随机共振影响很大,特别对信噪比随信号频率变化出现的广义随机共振是非常重要的量,因此专门加以讨论. $R-Q$ 曲线和 $R-D$ 曲线峰值随 β_{FM} 的增大而减小,说明调制信号振幅 β_{FM} 对典型随机共振只是影响共振峰值的大小,对其产生没有影响.调制信号振幅 β_{FM} 不但影响典型随机共振,还强烈影响广

义随机共振.从图2和图3可以看到, β_{FM} 值较小时 $R-\omega$ 曲线和 $R-\Omega$ 曲线均不出现随机共振,随着 β_{FM} 值的增大两条曲线均出现了随机共振,继续增大 β_{FM} 值后两条曲线都出现多重随机共振现象.这说明调制信号振幅 β_{FM} 越大非线性现象越明显,广义随机共振的峰值随 β_{FM} 值的增大而减小.

4. 结 论

1)当单模激光增益模型的输入信号为调频信号时,输出信噪比随抽运噪声强度 Q 和量子噪声强度 D 的变化曲线在 λ 值为负时可出现典型随机共振现象.

2)信噪比随载波信号频率和调制信号频率的变化曲线受调制信号振幅 β_{FM} 的影响很大, β_{FM} 值较小时没有广义随机共振, β_{FM} 值较大时存在广义随机共振.

3)当 β_{FM} 值和 ω 值都较大时, $R-\Omega$ 曲线出现多重随机共振;当 β_{FM} 值和 Ω 值都较大时, $R-\omega$ 曲线出现多重随机共振.这说明载波信号频率和调制信号频率之间有匹配关系.

- [1] Zhang L Y, Cao L, Wu D J, Wang J 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 25
- [2] Zhu H J, Li R, Wen X D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2404 (in Chinese)[祝恒江、李 蓉、温孝东 2003 物理学报 **52** 2404]
- [3] Zhang L Y, Cao L, Wu D J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1174 (in Chinese)[张良英、曹 力、吴大进 2003 物理学报 **52** 1174]
- [4] Kang Y M, Xu J X, Xie Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2712 (in Chinese)[康艳梅、徐健学、谢 勇 2003 物理学报 **52** 2712]
- [5] Li J H, Huang Z Q, Wang C Y 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 382 (in Chinese)[李静辉、黄祖洽、王存玉 1998 物理学报 **47** 382]
- [6] Luo X Q, Zhu S Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 1201
- [7] Menamara B, Wiesenfeld K 1989 *Phys. Rev. A* **39** 4854
- [8] Barykin A V, Seki K 1998 *Phys. Rev. E* **57** 6555

- [9] Berdichevsky V, Gitterman M 1999 *Phys. Rev. E* **60** 1494
- [10] Li J L, Xu B H 2006 *Chin. Phys.* **15** 2867
- [11] Zhou B C, Xu W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5623 (in Chinese)[周丙常、徐 伟 2007 物理学报 **56** 5623]
- [12] Lin M, Huang Y M 2006 *Proc. CSEE* **26** 128 (in Chinese)[林敏、黄咏梅 2006 中国电机工程学报 **26** 128]
- [13] Zhang L Y, Cao L, Jin G X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6238 (in Chinese)[张良英、曹 力、金国祥 2006 物理学报 **55** 6238]
- [14] Jin G X, Cao L, Zhang L Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3739 (in Chinese)[金国祥、曹 力、张良英 2007 物理学报 **56** 3739]
- [15] Hernandez-Garcia E, Toral R, San Miguel M 1990 *Phys. Rev. A* **42** 6823

Stochastic resonance of frequency modulated signals in a linear model of single-mode laser *

Zhang Liang-Ying¹⁾ Jin Guo-Xiang²⁾ Cao Li³⁾

1 $\text{\textcircled{X}}$ *Department of Physics and Electronics Information Technology, Xiangfan University, Xiangfan 441053, China*

2 $\text{\textcircled{X}}$ *School of Computer Science and Engineering, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430073, China*

3 $\text{\textcircled{X}}$ *State Key Laboratory of Laser Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China*

(Received 6 November 2007 ; revised manuscript received 31 March 2008)

Abstract

By adding frequency modulated signal to the equation of the laser intensity of the gain-noise model of the single-mode lasers, we use the linear approximation method to calculate the power spectrum and signal-to-noise ratio (SNR) of the laser intensity, which is driven by two white noises correlated in the form of δ function. The result shows that the SNR shows typical stochastic resonance with the change of intensities of the pump noise and quantum noise. As the amplitude of a modulated signal has an effect on the SNR, it shows suppression, monotonic increase, resonance, suppression and resonance and so on, with the varying of the frequencies of the carrier signal and modulated signal.

Keywords : pump noise, single-mode laser, stochastic resonance, frequency modulated signal

PACC : 0540, 4260K

* Project supported by the Key Program of the Scientific Research Foundation from the Education Bureau of Hubei Province, China (Grant No. D200725001).