第 57 卷 第 8 期 2008 年 8 月
1000-3290/2008/57(08)/4771-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57,No.8,August,2008

一类简化 Lang-Kobayashi 方程的 Hopf 分岔及其稳定性*

王作雷†

(江苏大学理学院,镇江 212013)

(2007 年 11 月 27 日收到;2008 年 4 月 17 日收到修改稿)

讨论了一类简化 Lang-Kobayashi 方程的 Hopf 分岔的性质.根据分岔理论,给出了系统产生 Hopf 分岔的临界时滞条件,然后利用中心流形定理和规范型理论得到了确定 Hopf 分岔方向和分岔周期解的稳定性计算公式.最后,用数值模拟对理论结果进行了验证.

关键词:Lang-Kobayashi 方程,时滞,Hopf 分岔,稳定性

PACC:0547,0320

1. 引 言

在实际工程中,许多动力系统的状态变量之间存在着不可避免的时间延迟,所以其数学模型和运动方程用含时滞的微分方程来描述[1—3].而在非线性光学中,由于延迟反馈下的半导体激光器在混沌通信、激光打印、高密度光盘存储系统等方面有着十分广泛的应用,因此它一直是国内外的热门研究课题[4—14]. 20 世纪 80 年代初,Lang 和 Kobayashi[4] 在半导体激光器系统中首次考虑了光学反馈,并建立了著名的 Lang-Kobayashi(LK)方程.从那时起,许多学者对该模型的动力学行为进行了卓有成效的分析,如:文献[9]揭示了其多模态构成的混沌运动现象,文献[10]讨论了外腔反馈对半导体激光器振荡特性的影响.近年来,许多学者对简化的 LK 模型进行了分析[11—14],如文献[11]用常微分方程来代替 LK 模型讨论了低频振荡(LFF)和稳态解之间的关系. Pieroux 等[13,14] 将 LK 模型简化为一个复变量时滞方程,并分析了 LFF、概周期等动力学现象.

对于时滞系统而言,由于其相空间是无限维的,所以很难在理论上作进一步的分析,已有的大部分成果都是将时滞取定为一个常数进行分析[15].文献[16,17]指出:时滞在时滞系统中有着‘开关’的作用,它不仅影响系统的稳定性,还可导致复杂现象,但其对系统动力学行为的影响机理还不完全清楚.本文基于这样的背景,以时滞为参数对一类简化的 LK 模型进行分析,讨论了系统的 Hopf 分岔的性质,最后用数值模拟对结果进行了验证.

2. 数学模型及 Hopf 分岔条件

本文考虑如下无量纲形式的简化 LK 系统[13]:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = (1 + \mathrm{i}\alpha)(p - |E|^2)E + \eta E(t - \tau), \tag{1}$$

其中 E 为复电场,α 为线宽增强因子,p 为电抽运项,τ 为时滞量(外腔反馈时间),η 为反馈强度.在(1)式中引入变换

$$E = x + \mathrm{i}y$$

后可得

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x - \alpha y)(p - x^2 - y^2) \\ &\quad + \eta x(t - \tau), \\ \dot{y} &= (\alpha x + y)(p - x^2 - y^2) \\ &\quad + \eta y(t - \tau). \end{aligned} \tag{2}$$

(2)式在平衡点 (0,0) 处的特征方程为

$$(\lambda - p)^2 - 2\eta(\lambda - p)\mathrm{e}^{-\lambda\tau} + \eta^2\mathrm{e}^{-2\lambda\tau} + (\alpha p)^2 = 0. \tag{3}$$

* 国家自然科学基金(批准号:10602020)资助的课题.

† E-mail:wangzuolei1971@163.com

令

$$\lambda = \mathrm{i}v \qquad (v > 0),$$
$$q = \alpha p,$$

代入(3)式得

$$\cos(v\tau) = \frac{a_1 v^2 + a_2}{v^4 + a_3 v^2 + a_4},$$
$$\sin(v\tau) = \frac{a_5 v^3 + a_6 v}{v^4 + a_3 v^2 + a_4}, \tag{4}$$

其中

$$a_1 = 2\eta p,$$
$$a_2 = 2\eta p(p^2 + q^2 - \eta^2),$$
$$a_3 = 2(p^2 - q^2),$$
$$a_4 = (p^2 + q^2)^2 - \eta^4,$$
$$a_5 = 2\eta,$$
$$a_6 = 2\eta(p^2 - q^2 - \eta^2).$$

消去(4)式中的 τ 可得

$$\omega^4 + b_3\omega^3 + b_2\omega^2 + b_1\omega + b_0 = 0, \tag{5}$$

其中

$$\omega = v^2,$$
$$b_3 = 2a_3 - a_5^2,$$
$$b_2 = 2a_4 + a_3^2 - 2a_5 a_6 - a_1^2,$$
$$b_1 = 2a_4 a_3 - 2a_1 a_2 - a_6^2,$$
$$b_0 = a_4^2 - a_2^2.$$

显然,当 $b_0 < 0$ 时,(5)式至少有一个正实根.不妨设(5)式有 4 个正实根,记作

$$v_i = \sqrt{\omega_i} \qquad (i = 1,2,3,4),$$

则由 (4) 式可得

$$\tau_i^j = \begin{cases} \dfrac{1}{v_i}\left\{2j\pi + \arccos\left(\dfrac{a_1 v_i^2 + a_2}{v_i^4 + a_3 v_i^2 + a_4}\right)\right\} \\ \qquad (a_1 v_i^2 + a_2 > 0), \\ \dfrac{1}{v_i}\left\{(2j+2)\pi - \arccos\left(\dfrac{a_1 v_i^2 + a_2}{v_i^4 + a_3 v_i^2 + a_4}\right)\right\} \\ \qquad (a_1 v_i^2 + a_2 < 0), \end{cases} \tag{6}$$

其中 $i = 1,2,3,4$;$j = 0,1,2,\cdots$.记

$$\tau_0 = \tau_{i_0}^0 = \min_{i\in\{1,2,3,4\}}\{\tau_i^0\},$$
$$v_0 = v_{i_0}. \tag{7}$$

在(3)式两边同时乘以 $\mathrm{e}^{\lambda\tau}$,λ 对 τ 求导得

$$\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1} = \frac{-\eta + (\lambda - p)\mathrm{e}^{\lambda\tau}}{\eta\lambda(\lambda - p) - [(\lambda - p)^2 + q^2]\lambda\mathrm{e}^{\lambda\tau}} - \frac{\tau}{\lambda}. \tag{8}$$

将 $\lambda = \mathrm{i}v_0$,$\tau = \tau_0$ 代入 (8) 式得

$$\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1}\Bigg|_{\lambda=\mathrm{i}v_0,\tau=\tau_0} = \frac{c_1 + \mathrm{i}c_2}{c_3 + \mathrm{i}c_4} - \frac{\tau_0}{\mathrm{i}v_0}, \tag{9}$$

其中

$$c_1 = -\eta - p\cos(v_0\tau_0) - v_0\sin(v_0\tau_0),$$
$$c_2 = v_0\cos(v_0\tau_0) - p\sin(v_0\tau_0),$$
$$c_3 = -\eta v_0^2 - (p^2 + q^2 - v_0^2)v_0\sin(v_0\tau_0) + 2v_0^2 p\cos(v_0\tau_0),$$
$$c_4 = \eta p v_0 + (p^2 + q^2 - v_0^2)v_0\cos(v_0\tau_0) + 2v_0^2 p\sin(v_0\tau_0). \tag{10}$$

显然,当 $c_1c_3 + c_2c_4 > 0$ 时,系统可能发生 Hopf 分岔.根据 τ_0 的定义以及 Hopf 分岔理论很容易得到定理 1.

定理 1 对于(1)式,若 $b_0 < 0$,$\eta + p < 0$ 和 $c_1c_3 + c_2c_4 > 0$ 都满足,则 $\tau\in(0,\tau_0)$ 时平衡点 (0, 0) 是渐进稳定的,而在 $\tau = \tau_0$ 处将发生 Hopf 分岔.

3. Hopf 分岔方向和 Hopf 分岔周期解的稳定性

在定理 1 的条件下,系统在 τ_0 处发生 Hopf 分岔.下面将用中心流形定理和规范型理论[18] 来讨论系统的非线性项对 Hopf 分岔的方向及其稳定性的影响.

引入时间变换 $t\to(t/\tau)$,变换后的时间仍用 t 来表示,则(2)式可写成

$$\dot{x} = \tau(x - \alpha y)(p - x^2 - y^2) + \tau\eta x(t-1),$$
$$\dot{y} = \tau(\alpha x + y)(p - x^2 - y^2) + \tau\eta y(t-1). \tag{11}$$

平衡点 (0, 0) 处的线性化方程为

$$\dot{x} = \tau p(x - \alpha y) + \tau\eta x(t-1),$$
$$\dot{y} = \tau p(\alpha x + y) + \tau\eta y(t-1). \tag{12}$$

非线性项记作

$$f = \begin{pmatrix} \tau(x - \alpha y)(x^2 + y^2) \\ \tau(\alpha x + y)(x^2 + y^2) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

相应的特征方程为

$$(\lambda - \tau p - \tau\eta\mathrm{e}^{-\lambda})^2 + (\tau q)^2 = 0, \tag{14}$$

其中 $q = \alpha p$. 令 $\tau = \tau_0 + \mu$,$\mu\in R$,则 $\mu = 0$ 是 (11) 式的 Hopf 分岔参数.

记 $C([-1,0],R^2)$ 为 $[-1,0]$ 上二维连续函数构成的 Banach 空间,其范数定义为

$$\|\phi\| = \sup_{\theta\in[-\tau,0]}|\phi(\theta)|,$$

其中 $|\cdot|$ 为 R^n 中的任意范数. 令

$$L_\mu\varphi = \begin{pmatrix}(\tau_0+\mu)p & -(\tau_0+\mu)q\\ (\tau_0+\mu)q & (\tau_0+\mu)p\end{pmatrix}\varphi(0) + \begin{pmatrix}(\tau_0+\mu)p & 0\\ 0 & (\tau_0+\mu)\eta\end{pmatrix}\varphi(-1), \quad (15)$$

$$f(\mu,\varphi) = \begin{pmatrix}(\tau_0+\mu)(\varphi_1-\alpha\varphi_2)(\varphi_1^2+\varphi_2^2)\\ (\tau_0+\mu)(\varphi_2+\alpha\varphi_1)(\varphi_1^2+\varphi_2^2)\end{pmatrix}. \quad (16)$$

根据 Riesz 表示定理,存在分量为有界变差函数的二阶矩阵 $\xi(\theta,\mu)$,使对任意 $\theta\in[-1,0]$ 有

$$\boldsymbol{L}_\mu\varphi = \int_{-1}^0 \mathrm{d}\xi(\theta,\mu)\varphi(\theta), \quad (17)$$

其中 $\varphi(\theta)=(\varphi_1(\theta),\varphi_2(\theta))^{\mathrm{T}}\in C([-1,0],R^2)$,实际上,只要取

$$\xi(\theta,\mu) = (\tau_0+\mu)\begin{pmatrix}p & -q\\ q & p\end{pmatrix}\delta(\theta) + (\tau_0+\mu)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\delta(\theta+1), \quad (18)$$

即满足(17)式. 这里

$$\delta(\theta) = \begin{cases}1 & (\theta=0),\\ 0 & (\theta\neq 0).\end{cases}$$

对 $\varphi\in C^1([-1,0],R^2)$,定义

$$A(\mu)\varphi = \begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\varphi(\theta)}{\mathrm{d}\theta} & (\theta\in[-1,0)),\\ \displaystyle\int_{-1}^0 \mathrm{d}\xi(\theta,\mu)\varphi(\theta) & (\theta=0),\end{cases} \quad (19)$$

$$R(\mu)\varphi = \begin{cases}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & (\theta\in[-1,0)),\\ f(\mu,\varphi) & (\theta=0).\end{cases} \quad (20)$$

将(11)式写成如下形式:

$$\dot{u}_t = A(\mu)u_t + R(\mu)u_t. \quad (21)$$

这里 $u=(x,y)^{\mathrm{T}}$, $u_t=u(t+\theta)(-1\leqslant\theta\leqslant 0)$. 在 $(A^*\psi,\varphi)=(\psi,A\varphi)$ 的意义下, A 的形式伴随算子 A^* 定义为

$$A^*(\mu)\psi(s) = \begin{cases}\dfrac{-\mathrm{d}\psi(s)}{\mathrm{d}s} & (s\in(0,1]),\\ \displaystyle\int_{-1}^0 \mathrm{d}\xi^{\mathrm{T}}(s,\mu)\psi(-s) & (s=0),\end{cases} \quad (22)$$

其中 $\psi\in \boldsymbol{C}^*\equiv C([0,1],R^{2*})$, R^{2*} 为二维行向量构成的向量空间.

算子 A 和 A^* 的域分别为 $C^1[-1,0]$ 和 $C^1[0,1]$,对于 $\varphi\in C([-1,0],R^2)$ 和 $\psi\in C([0,1],R^{2*})$,定义双线性积为

$$\langle\psi,\varphi\rangle = \bar{\psi}(0)\varphi(0) - \int_{-1}^0\int_0^\theta \bar{\psi}(\zeta-\theta)\mathrm{d}\xi(\theta)\varphi(\zeta)\mathrm{d}\zeta, \quad (23)$$

其中

$$\xi(\theta) = \xi(\theta,0).$$

当(14)式有一对纯虚特征根时,将存在一个二维中心流形 M 的状态空间 $\boldsymbol{C}$,在其上的流能很好刻画出非线性方程解的长时间行为,并存在空间 $\boldsymbol{C}$ 的直和分解 $\boldsymbol{C}=P\oplus Q$,其中 P 是由算子 A 的一对纯虚特征根所对应的特征向量张成的一个二维子空间, Q 为 P 的补空间. Q 和 P 都是(11)式的线性部分的流的不变子空间.

用 $\gamma(\theta)$ 和 $\gamma^*(s)$ 分别代表 A 和 A^* 相应于特征值 $\mathrm{i}\tau_0 v_0$ 和 $-\mathrm{i}\tau_0 v_0$ 的特征向量. 经过计算可知

$$\gamma(\theta) = (1,\mathrm{i})^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau_0 v_0\theta},$$

$$\gamma^*(s) = D(-\mathrm{i},1)^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau_0 v_0 s},$$

其中 $\langle\gamma^*,\gamma\rangle=1$, $\langle\gamma^*,\bar{\gamma}\rangle=0$, $D=(2+2\tau_0\eta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau_0 v_0})^{-1}$. 据此可以计算上述的中心流形 M. 令 u_t 是(11)式在 $\mu=0$ 的解,定义

$$z(t) = \langle\gamma^*,u_t\rangle,$$

$$w(t,\theta) = u_t(\theta) - 2\mathrm{Re}\{z(t)\gamma(\theta)\},$$

在中心流形 M 上可得

$$w(t,\theta) = w(z(t),\bar{z}(t),\theta), \quad (24)$$

其中

$$w(z(t),\bar{z}(t),\theta) = w_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + w_{11}(\theta)z\bar{z} + w_{02}(\theta)\frac{\bar{z}^2}{2} + \cdots \quad (25)$$

$z(t)$ 对 t 求导可得

$$\dot{z}(t) = \mathrm{i}\tau_0 v_0 z(t) + g(z,\bar{z}), \quad (26)$$

其中

$$g(z,\bar{z}) = g_{20}\frac{z^2}{2} + g_{11}z\bar{z} + g_{02}\frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21}\frac{z^2\bar{z}}{2} + \cdots \quad (27)$$

将 (21)和(26)式代入 $\dot{w}=\dot{u}_t-\dot{z}\gamma-\dot{\bar{z}}\bar{\gamma}$ 可得

$$\dot{w} = Aw + H(z,\bar{z},\theta)$$

$$= \begin{cases}Aw - 2\mathrm{Re}\{\bar{\gamma}^*(0)f(z,\bar{z})\gamma(\theta)\}\\ \quad (\theta\in[-1,0)),\\ Aw - 2\mathrm{Re}\{\bar{\gamma}^*(0)f(z,\bar{z})\gamma(\theta)\} + f\\ \quad (\theta=0),\end{cases} \quad (28)$$

其中

$$H(z,\bar{z},\theta)=H_{20}(\theta)\frac{z^2}{2}+H_{11}(\theta)z\bar{z}+H_{02}(\theta)\frac{\bar{z}^2}{2}+\cdots \tag{29}$$

在(25)式中，w 对 t 求导得

$$\dot{w}=w_z\dot{z}+w_{\bar{z}}\dot{\bar{z}}. \tag{30}$$

将(25)和(26)式代入(30)式得

$$\dot{w}=(w_{20}z+w_{11}\bar{z}+\cdots)(\mathrm{i}\tau_0v_0z+g)+(w_{11}z+w_{02}\bar{z}+\cdots)(-\mathrm{i}\tau_0v_0\bar{z}+\bar{g}). \tag{31}$$

将(25)和(29)式代入(28)式得

$$\dot{w}=(Aw_{20}+H_{20})\frac{z^2}{2}+(Aw_{11}+H_{11})z\bar{z}+(Aw_{02}+H_{02})\frac{\bar{z}^2}{2}+\cdots \tag{32}$$

比较(31)和(32)式的系数可得

$$(A-2\mathrm{i}\tau_0v_0)w_{20}(\theta)=-H_{20}(\theta), \tag{33}$$

$$Aw_{11}(\theta)=-H_{11}(\theta). \tag{34}$$

由 $\dot{w}=\dot{u}_t-\dot{z}\gamma-\dot{\bar{z}}\bar{\gamma}$ 和 $\dot{w}=Aw+H(z,\bar{z},\theta)$ 可得

$$\begin{aligned}H(z,\bar{z},\theta)&=-g\gamma(\theta)-\bar{g}\bar{\gamma}(\theta)+Ru_t\\&=-\left(g_{20}\frac{z^2}{2}+g_{11}z\bar{z}+g_{02}\frac{\bar{z}^2}{2}+\cdots\right)\gamma(\theta)\\&\quad-\left(\bar{g}_{20}\frac{\bar{z}^2}{2}+\bar{g}_{11}z\bar{z}+\bar{g}_{02}\frac{z^2}{2}+\cdots\right)\bar{\gamma}(\theta)\\&\quad+Ru_t.\end{aligned} \tag{35}$$

比较(29)和(35)式的系数得

$$H_{20}(\theta)=-g_{20}\gamma(\theta)-\bar{g}_{02}\bar{\gamma}(\theta)\quad(1\leqslant\theta<0), \tag{36}$$

$$H_{11}(\theta)=-g_{11}\gamma(\theta)-\bar{g}_{11}\bar{\gamma}(\theta)\quad(1\leqslant\theta<0). \tag{37}$$

将(36)和(37)式代入(33)和(34)式得

$$\dot{w}_{20}(\theta)=2\mathrm{i}\tau_0v_0w_{20}(\theta)+g_{20}\gamma(\theta)+\bar{g}_{02}\bar{\gamma}(\theta), \tag{38}$$

$$\dot{w}_{11}(\theta)=g_{11}\gamma(\theta)+\bar{g}_{11}\bar{\gamma}(\theta). \tag{39}$$

已知

$$\begin{aligned}\gamma^*(0)&=D(-\mathrm{i},1)^{\mathrm{T}},\\x(t)&=\mathrm{i}z-\mathrm{i}\bar{z}+w^{(1)}(z,\bar{z},0),\\y(t)&=z+\bar{z}+w^{(2)}(z,\bar{z},0),\\x(t-1)&=\mathrm{i}z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau_0v_0}-\mathrm{i}\bar{z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau_0v_0}+w^{(1)}(z,\bar{z}-1),\\y(t-1)&=z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau_0v_0}+\bar{z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau_0v_0}+w^{(2)}(z,\bar{z},-1),\end{aligned} \tag{40}$$

其中

$$w^{(j)}(z,\bar{z},0)=w_{20}^{(j)}(0)\frac{z^2}{2}+w_{11}^{(j)}(0)z\bar{z}+w_{02}^{(j)}(0)\frac{\bar{z}^2}{2}+\cdots,$$

$$w^{(j)}(z,\bar{z},-1)=w_{20}^{(j)}(-1)\frac{z^2}{2}+w_{11}^{(j)}(-1)z\bar{z}+w_{02}^{(j)}(-1)\frac{\bar{z}^2}{2}+\cdots\quad(j=1,2).$$

根据(38)—(40)式可得

$$\begin{aligned}g_{20}&=g_{21}=0,\\g_{02}&=-\tau_02(\alpha+\mathrm{i})\bar{D},\\g_{21}&=-\tau_032(\alpha-\mathrm{i})\bar{D}.\end{aligned} \tag{41}$$

由(41)式可以计算下列公式：

$$C_1(0)=\frac{\mathrm{i}}{2\tau_0v_0}\left(g_{20}g_{11}-2|g_{11}|^2-\frac{1}{3}|g_{02}|^2\right)+\frac{1}{2}g_{21}. \tag{42}$$

记

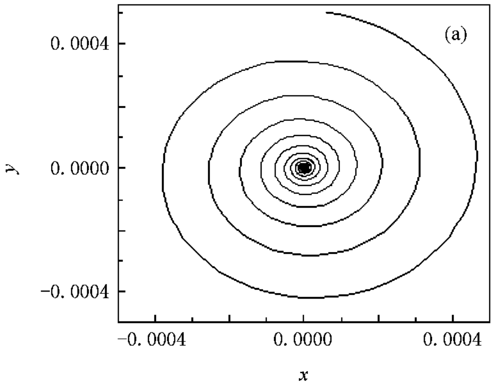
$$\begin{aligned}\beta_2&=2\mathrm{Re}(C_1(0)),\\\mu_2&=-\frac{\mathrm{Re}(C_1(0))}{\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\right)_{\tau=\tau_0}}.\end{aligned} \tag{43}$$

由文献[18]中的一般性定理可知，μ_2 确定分岔方向，β_2 确定分岔周期解的稳定性，故可得定理 2.

定理 2 在定理 1 的条件下，$\mu=0$ 是系统(1)的 Hopf 分岔值；Hopf 分岔的分岔方向由 μ_2 的符号确定，当 $\mu_2>0$ 时，Hopf 分岔是超临界的，当 $\mu_2<0$ 时，Hopf 分岔是亚临界的；Hopf 分岔周期解的稳定性由 β_2 的符号确定，当 $\beta_2>0$ 时，Hopf 分岔是不稳定的，当 $\beta_2<0$ 时，Hopf 分岔是稳定的.

4. 数值模拟

当系统参数分别为 $\eta=3.0$，$p=-3.001$，$\alpha=2.0$ 时，可得 $\tau_0=1.043214$，分别取 $\tau=0.8$ 和 $\tau=1.052$，在图 1 中给出了系统(1)的相图.借助符号软件 Maple 编程，利用(43)式可以计算出 $\beta_2=-10.13012$，$\mu_2=0.92150$.从而可知相应的 Hopf 分岔是超临界的，分岔周期解稳定.这与定理 2 相符.



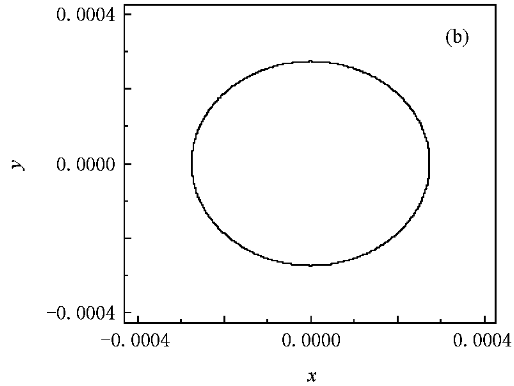


图 1　系统 (1) 的相图　(a) $\tau = 0.8$，(b) $\tau = 1.052$

5. 结　　论

本文讨论了一类简化 LK 方程 Hopf 分岔的性质.用时滞作为分岔参数,得到了系统可能产生 Hopf 分岔的时滞临界表达式,当参数值超过临界值时,零平衡点失稳而分岔出一个周期轨,并用中心流形定理和规范型理论给出了确定 Hopf 分岔方向和分岔周期解的稳定性计算公式.最后,用数值模拟对理论结果进行了验证.这些结果表明:外腔反馈时间可导致系统产生周期振荡,且周期解的性质由系统的非线性项确定,因此可以通过调节时滞和非线性因素来对激光系统进行控制.另外,外腔反馈时间作为控制参数,可以使系统表现为复杂的动力学行为,如概周期振荡、混沌等现象,相应的现象和机理有待于进一步的研究.

[1] Liao X F，Li S W，Wong K W 2003 *Nonlin. Dyn.* **31** 299

[2] Qian C Z，Tang J S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 617 (in Chinese) [钱长照、唐驾时 2006 物理学报 **55** 617]

[3] Wang Z S，Zhang H G 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5674 (in Chinese) [王占山、张化光 2006 物理学报 **55** 5674]

[4] Lang R，Kobayashi K 1980 *IEEE J. Quantum Electron.* **16** 347

[5] Liao J F，Xia G Q，Wu J G，Xu L，Wu Z M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6301 (in Chinese) [廖健飞、夏光琼、吴加贵、许　黎、吴正茂 2007 物理学报 **56** 6301]

[6] Wang Y C，Li Y L，Wang A B，Wang B J，Zhang G W，Guo P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4686 (in Chinese) [王云才、李艳丽、王安帮、王冰洁、张耕玮、郭　萍 2007 物理学报 **56** 4686]

[7] Jia X H，Wu Z M，Lin X D，Bai X，Xia G Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3680 (in Chinese) [贾新鸿、吴正茂、林晓东、柏　熙、夏光琼 2005 物理学报 **54** 3680]

[8] Haegeman B，Engelborghs K，Roose D，Pieroux D，Erneux T 2002 *Phys. Rev.* E **66** 046216

[9] Bauer S，Brox O，Kreissl J，Bauer S，Sartorius B，Radziunas M，Sieber J，Wünsche H，Henneberger F 2004 *Phys. Rev.* E **69** 016206

[10] Liu C，Ge J H，Chen J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5211 (in Chinese) [刘　崇、葛剑虹、陈　军 2006 物理学报 **55** 5211]

[11] Huyet G，Porta P，Hegarty S，McInerney J，Holland F 2000 *Opt. Commun.* **180** 339

[12] Prasad A，Lai Y，Gavrielides A，Kovanis V 2001 *J. Opt.* B **3** 242

[13] Pieroux D，Mandel P 2003 *Phys. Rev.* E **67** 056213

[14] Pieroux D，Mandel P 2003 *Phys. Rev.* E **67** 036204

[15] Ma J，Jin W Y，Li Y L，Chen Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2456 (in Chinese) [马　军、靳伍银、李延龙、陈　勇 2007 物理学报 **56** 2456]

[16] Xu J，Chung K W 2003 *Physica* D **180** 17

[17] Xu J，Lu Q S 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 939

[18] Hassard B D，Kazarinoff N D，Wan Y H 1981 *Theory and Applications of Hopf Bifurcation* (London：Cambridge University Press) p87

Stability and Hopf bifurcation of the simplified Lang-Kobayashi equation*

Wang Zuo-Lei†
(*Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China*)
(Received 27 November 2007; revised manuscript received 17 April 2008)

Abstract

Stability and Hopf bifurcation of the simplified Lang-Kobayashi equation is considered. The critical time delay associated with Hopf bifurcation of the zero equilibrium is determined by applying the bifurcation theorem. A formula for determining the direction of the Hopf bifurcation and the stability of bifurcating periodic solutions is given by using the normal form method and center manifold theorem. Finally, numerical simulations are performed to verify the analytical prediction.

Keywords: Lang-Kobayashi equation, time delay, Hopf bifurcation, stability
PACC: 0547, 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10602020).
† E-mail: wangzuolei1971@163.com