

# 高阶色散效应常系数 Ginzburg-Landau 方程自相似脉冲演化的解析分析\*

冯 杰<sup>1)</sup> 徐文成<sup>2)†</sup> 刘伟慈<sup>2)</sup> 李书贤<sup>2)</sup> 刘颂豪<sup>2)</sup>

1) 华南师范大学物理与电信工程学院, 广州 510006)

2) 华南师范大学光电子信息科技学院, 光子信息技术实验室, 广州 510006)

(2008 年 1 月 18 日收到, 2008 年 6 月 6 日收到修改稿)

采用自相似分析方法, 基于常系数高阶色散的 Ginzburg-Landau 方程, 通过分离变量法得出了高阶色散效应自相似脉冲演化的解析解, 给出了自相似脉冲的振幅、相位、啁啾以及脉冲宽度的一般表达式. 研究表明, 在增益光纤的二阶正常色散区域, 同时考虑高阶色散和增益色散双重效应影响下演化的自相似孤子脉冲仍然保持线性啁啾, 振幅解析解的三阶色散效应显著. 这与数值计算的结果非常一致.

关键词: 三阶色散, Ginzburg-Landau 方程, 自相似脉冲, 二阶正常色散

PACC: 4265, 4265S, 4255N, 4225B

## 1. 引 言

近 10 年来, 人们从理论解析分析、数值模拟和实验研究三个方面对自相似光脉冲进行了大量的研究, 发现了自相似脉冲具有的三个显著特点<sup>[1-14]</sup>, 展示了自相似脉冲在光纤通信、非线性光学、超快光学、瞬态光学以及激光加工等领域中的广阔应用前景. 一方面, 由于脉冲的自相似演化特性, 随着脉冲能量的逐渐增加, 光纤中的非线性效应和高阶色散响应显著增强. 另一方面, 特别是在色散管理的光纤传输中, 由于总的二阶色散效应的影响比较小, 三阶色散效应对脉冲演化特性的影响显得更加重要. 目前, 人们对自相似脉冲的实验研究主要集中在对脉冲的自相似演化振幅形状、啁啾特性和脉冲宽度的诊断和测量. 理论分析方面主要集中在忽略高阶色散条件下, 基于光纤二阶正常色散区域带有增益的非线性薛定谔方程的自相似解<sup>[1-16]</sup>, 考虑掺杂元素弛豫时间响应的增益色散影响下 Ginzburg-Landau (G-L) 方程的自相似解<sup>[17, 18]</sup>以及考虑高阶色散效应下对非线性薛定谔方程和 G-L 方程的数值求解<sup>[19, 20]</sup>. 在三阶色散效应影响下的 G-L 方程的自相似解的解析分析尚未见报道.

本文在文献 [15-20] 的基础上, 进一步考虑三阶色散响应, 直接求解三阶色散效应的常系数 G-L 方程, 给出了在光纤掺杂元素弛豫时间响应和高阶色散效应的同时影响下, 掺杂光纤中脉冲自相似演化的一般解析解的基本特征. 解析分析与数值解的对比表明, 虽然高阶色散条件下常系数 G-L 方程的脉冲解偏离抛物渐近型, 但仍然具有自相似演化的特性, 在脉冲的中心附近仍然保持线性啁啾.

## 2. 高阶色散常系数 G-L 方程自相似脉冲演化的解析分析

### 2.1. 传输方程

在稀土元素掺杂具有增益的光纤中, 如果输入脉冲的能量较高, 则脉冲演化的描述应当采用下列含有三阶色散项的 G-L 方程<sup>[16-21]</sup>:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = i\gamma |\Psi|^2 \Psi - i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} + \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial T^3} + \frac{g(T)}{2} + \frac{g(T)}{2\Omega^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2}. \quad (1)$$

这里  $\Psi$  为脉冲包络的复振幅,  $T = t - \beta_1 z$  为延迟时间, 其中  $\beta_1$  为一阶群速度色散系数,  $z$  为脉冲演化

\* 广东省自然科学基金(批准号 D4010397)资助的课题.

† 通讯联系人, E-mail: xuweh@scau.edu.cn

的传输距离;  $\beta_2 > 0$  为光纤的二阶正常色散系数,  $\beta_3$  为三阶色散系数,  $\gamma$  为非线性系数,  $g(T) = g$  为增益系数, 并假定  $\beta_2, \beta_3, \gamma$  和  $g(T)$  为定值;  $\Omega$  为掺杂光纤的增益带宽;  $\frac{g(T)}{2\Omega^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2}$  为掺杂增益光纤的增益色散因子, 其物理意义是掺杂元素对信号脉冲提供一种依赖于频率的增益效果<sup>[21]</sup>.

假设方程 (1) 具有下列形式的试探解<sup>[1-3]</sup>:

$$\begin{aligned} \Psi(z, T) &= A(z, T) \exp[i\Phi(z, T)], \\ \Phi(z, T) &= \alpha(z) + \beta(z)T^2. \end{aligned} \quad (2)$$

将方程 (2) 代入方程 (1) 并比较实部和虚部, 得到演化脉冲的振幅函数与相位函数的耦合方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} &= \beta_2 \frac{\partial A}{\partial T} \frac{\partial \Phi}{\partial T} + \frac{\beta_2 A}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2} \\ &+ \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} + \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial A}{\partial T} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)^2 \\ &- \frac{\beta_3 A}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2} \frac{\partial \Phi}{\partial T} + \frac{g(T)A}{2} \\ &+ \frac{g(T)}{2\Omega^2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \frac{g(T)A}{2\Omega^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)^2, \\ A \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= -\frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \frac{\beta_2 A}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)^2 \\ &+ \frac{\beta_3}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \frac{\partial \Phi}{\partial T} + \frac{\beta_3}{2} \frac{\partial A}{\partial T} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2} \\ &- \frac{\beta_3 A}{6} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)^3 + \gamma A^3 \\ &+ \frac{g(T)}{\Omega^2} \frac{\partial A}{\partial T} \frac{\partial \Phi}{\partial T} + \frac{g(T)A}{2\Omega^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

## 2.2. 高阶色散脉冲自相似演化的空间振幅函数 $f(z)$

为进一步分离变量, 设

$$A(z, T) = f(z)F(T), \quad (4)$$

其中实函数  $f(z)$  和  $F(T)$  分别是脉冲自相似演化的空间振幅函数和瞬时包络函数. 考虑方程 (2) 中的第二式, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} &= F \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \frac{\partial A}{\partial T} &= f \frac{\partial F}{\partial T}, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} &= f \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}, \\ \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} &= f \frac{\partial^3 F}{\partial T^3}; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \frac{\partial \alpha(z)}{\partial z} + \frac{\partial \beta(z)}{\partial z} T^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial T} &= 2cT, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2} &= 2c, \\ \frac{\partial^3 \Phi}{\partial T^3} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

将关系式 (5) 代入方程组 (3) 中的第一式, 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial z} &= 2\beta_2 cT \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial T} + \beta_2 c + \frac{\beta_3}{6} \frac{1}{F} \frac{\partial^3 F}{\partial T^3} \\ &+ \frac{2c^2 \beta_3}{3} T^2 \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial T} - 2\beta_3 c^2 T \\ &+ \frac{g}{2} + \frac{g}{2\Omega^2} \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} - \frac{2gc^2}{\Omega^2} T^2. \end{aligned} \quad (6)$$

分析方程 (6) 中各变量的时空变化特性以及光纤参数特点, 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial z} &= \beta_2 c + \frac{g}{2}, \\ \frac{\beta_3}{6} \frac{1}{F} \frac{\partial^3 F}{\partial T^3} &+ \frac{g}{2\Omega^2} \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \\ &+ \left( 2\beta_2 cT + \frac{2\beta_3 c^2}{3} T^2 \right) \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial T} \\ &- \left( 2\beta_3 c^2 T + \frac{2gc^2}{\Omega^2} T^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

由方程 (7) 的第一式可以得到

$$f(z) = f_0 \exp \left[ \left( \beta_2 c + \frac{g}{2} \right) z \right].$$

取演化脉冲的啁啾参数为<sup>[17, 48]</sup>

$$c = -\frac{31\beta_2 \gamma z g f_0^2}{6\beta_2^2 + \beta_3^2 \Omega^2}, \quad (8)$$

则演化脉冲的振幅函数为

$$\begin{aligned} f(z) &= f_0 \exp \left[ \left( \beta_2 c + \frac{g}{2} \right) z \right] \\ &= f_0 \exp \left[ \left( -\frac{31\beta_2^2 \gamma z g f_0^2}{6\beta_2^2 + \beta_3^2 \Omega^2} + \frac{g}{2} \right) z \right], \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $f_0$  为演化脉冲的初始振幅.

## 2.3. 自相似脉冲的相位补偿函数 $\alpha(z)$ 和啁啾函数 $\omega_c(z, T)$

将方程 (4) 和 (5) 式代入方程组 (3) 中的第二式, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial z} T^2 &= -\frac{\beta_2}{2} \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} + 2\beta_2 c^2 T^2 \\ &+ \beta_3 cT \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} + \beta_3 c \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial T} \\ &- \frac{4}{3} \beta_3 c^3 T^3 + \frac{2cg}{\Omega^2} \frac{T}{F} \frac{\partial F}{\partial T} \end{aligned}$$

$$+ \frac{cg}{\Omega^2} + \gamma A^2. \quad (10)$$

同样,分析方程(10)中各变量的时空变化特性以及光纤参数特性,可以得到

$$\begin{aligned} \frac{da}{dz} &= \frac{cg}{\Omega^2}, \\ \left( \beta_3 c T - \frac{\beta_2}{2} \right) \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial T^2} + \left( \beta_3 c + \frac{2cgT}{\Omega^2} \right) \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial T} \\ &+ \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right) T^2 - \frac{4}{3} \beta_3 c^3 T^3 \\ &+ \gamma f^2 F^2 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

由方程(11)中的第一式可以得到演化脉冲的自相似相位补偿函数

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= \int_{z_0}^z \frac{cg}{\Omega^2} dz \\ &= a_0(z_0, T_0) - \frac{31\beta_2 \gamma z^2 g^2 f_0^2}{2\Omega^2(6\beta_2^2 + \beta_3^2 \Omega^2)}. \end{aligned} \quad (12)$$

将啁啾参数(8)式和方程(12)代入方程(2)中的第二式,即得真实稀土元素掺杂光纤在高阶色散情况下的相位函数

$$\begin{aligned} \Phi(z, T) &= a_0(z_0, T_0) - \frac{31\beta_2 \gamma z^2 g^2 f_0^2}{2\Omega^2(6\beta_2^2 + \beta_3^2 \Omega^2)} \\ &- \frac{31\beta_2 \gamma z g f_0^2}{6\beta_2^2 + \beta_3^2 \Omega^2} T^2, \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $a_0(z_0, T_0)$  为任意初始相位补偿函数,  $T_0$  为入射脉冲的初始脉冲宽度. 由方程(13)得到啁啾函数为

$$\begin{aligned} \omega_c(T) &= - \frac{\partial \Phi}{\partial T} \\ &= \frac{62\beta_2 \gamma z g f_0^2}{6\beta_2^2 + \beta_3^2 \Omega^2} T. \end{aligned} \quad (14)$$

方程(14)表明,虽然有高阶色散、增益色散和能量增益的共同影响,演化脉冲的啁啾函数仍然是时间的线性函数.

#### 2.4. 瞬时包络函数 $F(T)$ 和脉冲有效宽度 $T_p(z)$

设抛物渐近时间演化函数的形式为

$$F(T) = (1 + pT + qT^2 + hT^3), \quad (15)$$

则有

$$F'(T) = (p + 2qT + 3hT^2),$$

$$F''(T) = (2q + 6hT),$$

$$F'''(T) = 6h,$$

其中  $p$ ,  $q$  和  $h$  是与掺杂光纤参数有关的待定系数. 将方程(15)及其各阶导数代入方程(11)中的第二式后,比较演化时间  $T$  的系数可以得到下列关于  $p$ ,  $q$  和  $h$  的三元一次方程组:

$$\begin{aligned} \left( \frac{2cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) p + 4\beta_3 cq - 3\beta_2 h &= 0, \\ \left( \frac{4cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) q - 3\beta_3 ch &= \left( \frac{\partial c}{\partial z} - 2\beta_2 c^2 \right), \\ \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right) p + \left( \frac{6cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) h &= \frac{4}{3} \beta_3 c^3. \end{aligned} \quad (16)$$

通过行列式计算,可以求得

$$\begin{aligned} p &= \frac{-16\beta_3 c^5 + 4\beta_2 \beta_3 c^3 \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right) + 4\beta_3 c \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right) \left( \frac{6cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right)}{\left( \frac{2cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) \left( \frac{4cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) \left( \frac{6cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) - 12\beta_3 c^2 \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right) + 3\beta_2 \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right) \left( \frac{4cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right)}, \\ q &= \frac{\left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right) \left( \frac{2cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) \left( \frac{6cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) + 3\beta_2 \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right)^2 - 4\beta_3 c^4 \left( \frac{2cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right)}{\left( \frac{2cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) \left( \frac{4cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) \left( \frac{6cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) - 12\beta_3 c^2 \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right) + 3\beta_2 \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right) \left( \frac{4cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right)}, \\ h &= \frac{\frac{4}{3} \left( \frac{2cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) \left( \frac{4cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) \beta_3 c^3 - 4 \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right)^2 \beta_3 c}{\left( \frac{2cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) \left( \frac{4cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) \left( \frac{6cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) - 12\beta_3 c^2 \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right) + 3\beta_2 \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right) \left( \frac{4cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right)}. \end{aligned} \quad (17)$$

将方程(17)代入方程(15)可得脉冲渐近时间演化函数的具体形式. 由此可知,演化脉冲的时域特性完全由掺杂光纤的参数决定,这是脉冲自相似演化的重要特性. 这里有以下两个显著特点:一是增益色散  $g/\Omega^2$  对时间演化函数产生了显著的影响;二是三阶

色散效应使时间演化函数出现了三次方的时间项,说明脉冲的时域偏离了抛物渐近的特性,从而使得演化脉冲的能量增益效果更加明显. 在方程(17)中,当  $\beta_3 = 0$  时,有  $p = 0$ ,  $h = 0$  则方程(15)变成

$$F(T) = (1 + qT^2).$$

这是典型的抛物型自相似振幅函数,与不考虑高阶色散效应时的结果一致<sup>[18]</sup>.

由方程(15)并考虑方程(17)可以得出脉冲演化的有效宽度为

$$T_p(z) = \frac{1}{\sqrt{|q|}} \left[ \frac{\left( \frac{2cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) \left( \frac{4cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) \left( \frac{6cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) - 12\beta_3^2 c^2 \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right) + 3\beta_2 \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right) \left( \frac{4cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right)}{\left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right) \left( \frac{2cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) \left( \frac{6cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) + 3\beta_2 \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right)^2 - 4\beta_3^2 c^4 \left( \frac{2cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right)} \right]^{1/2}. \quad (18)$$

### 3. 数值计算结果的对比及分析

将方程(9)(13)(15)和(17)代入方程(2),可以得到高阶色散常系数 G-L 方程的渐近自相似脉冲解完整的振幅函数和相位函数

$$\begin{aligned} A(z, T) &= f(z)F(T) \\ &= f_0 \exp \left[ \left( \beta_2 c + \frac{g}{2} \right) z \right] (1 + pT + qT^2 + hT^3) = f_0 \exp \left[ \left( \beta_2 c + \frac{g}{2} \right) z \right] \\ &\quad \times \left[ 1 + \frac{-16\beta_3^2 c^5 + 4\beta_2 \beta_3 c^3 \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right) + 4\beta_3 c \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right) \left( \frac{6cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right)}{\left( \frac{2cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) \left( \frac{4cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) \left( \frac{6cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) - 12\beta_3^2 c^2 \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right) + 3\beta_2 \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right) \left( \frac{4cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right)} T \right. \\ &\quad - \frac{\left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right) \left( \frac{2cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) \left( \frac{6cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) + 3\beta_2 \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right)^2 - 4\beta_3^2 c^4 \left( \frac{2cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right)}{\left( \frac{2cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) \left( \frac{4cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) \left( \frac{6cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) - 12\beta_3^2 c^2 \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right) + 3\beta_2 \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right) \left( \frac{4cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right)} T^2 \\ &\quad \left. + \frac{\frac{4}{3} \left( \frac{2cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) \left( \frac{4cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) \beta_3 c^3 - 4 \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right)^2 \beta_3 c}{\left( \frac{2cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) \left( \frac{4cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) \left( \frac{6cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right) - 12\beta_3^2 c^2 \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right) + 3\beta_2 \left( 2\beta_2 c^2 - \frac{\partial c}{\partial z} \right) \left( \frac{4cg}{\Omega^2} + 3\gamma f^2 \right)} T^3 \right], \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(z, T) &= \alpha(z) + \alpha(z)T^2 \\ &= \alpha_0(z_0, T_0) - \frac{31\beta_2 \gamma z^2 g^2 f_0^2}{2\Omega^2(6\beta_2^2 + \beta_3^2 \Omega^2)} - \frac{31\beta_2 \gamma z g f_0^2}{6\beta_2^2 + \beta_3^2 \Omega^2} T^2. \end{aligned}$$

由此可见,振幅函数保持自相似型,但不是抛物渐近型,因为时域函数含有时间的三次方项.选取增益介质的有效增益带宽为  $\Omega = 758 \text{ ps}^{-1}$ ,  $\beta_2 = 65 \times 10^{-3} \text{ ps}^2 \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $\beta_3 = \pm 1.7 \times 10^{-3} \text{ ps}^3 \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $\gamma = 1.5 \times 10^{-3} \text{ W}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $g_0 = 0.635 \text{ m}^{-1}$ , 传输长度  $z = 8 \text{ m}$ , 输入的抽运脉冲是满足变换极限的高斯脉冲,初始脉冲宽度  $T_0 = 400 \text{ fs}$ , 初始能量  $E_0 = 75 \text{ pJ}$ , 中心波长  $\lambda_0 = 1550 \text{ nm}$ . 图 1 为 G-L 方程(1)脉冲演化数值解的强度曲线,显然满足自相似的增益演化特性,曲线的不对称是由于三阶色散影响的结果<sup>[19,20]</sup>. 图 2 和图 3 分别是三阶色散系数  $\beta_3 > 0$  和  $\beta_3 < 0$  情况下,脉冲

自相似演化强度曲线解析解与数值解的对比;图 4 是脉冲自相似演化啁啾曲线解析解与数值解的对比.图 2—图 4 中虚线是解析解的结果,实线是数值模拟结果.

通过数值计算可以发现,由方程(19)描述的演化脉冲振幅函数解析形式与 G-L 方程(1)的数值结果符合得非常好,解析解中三次方项的作用非常显著.如图 2 所示(图 3 是  $\beta_3 < 0$  的情况).当然,解析解的强度曲线与 G-L 方程(1)的数值解在所谓的居间演化区间<sup>[1,15]</sup>还有一点差异,其原因可能有两个.其一,方程(19)的脉冲振幅函数是随增益系数、啁啾

参数和演化传输距离呈指数增加的,因而振幅增加的进程较快.其二,在运用方程(11)求解方程(15)系数的过程中,忽略了 $T$ 的四次方以上高阶项以及系数 $p, q$ 和 $h$ 的交叉项,以至于四次方以上高阶项的作用没有体现出来.事实上,一方面由于三阶色散值较小,另一方面根据文献[19, 20]的研究结果,四次方以上高阶项比低次项的作用要小得多.

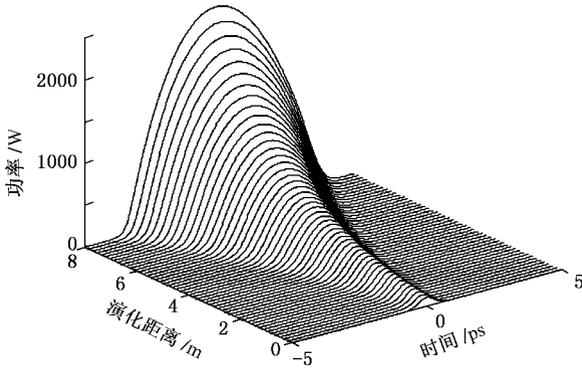


图1 高阶色散 G-L 方程自相似数值解的强度曲线

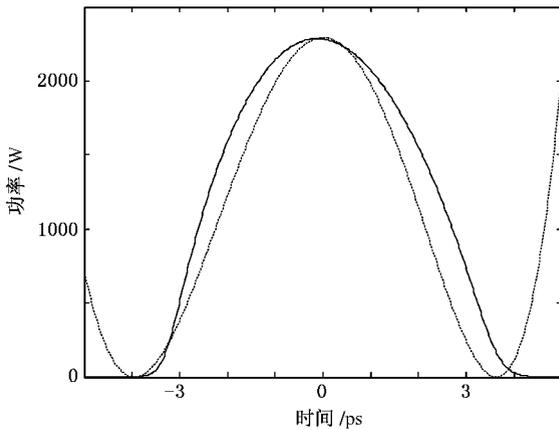


图2 三阶色散系数  $\beta_3 > 0$  时的脉冲形状对比

解析分析中的啁啾函数(方程(14))也非常符合方程(1)数值解的结果.大量的自相似解的研究发现,只有在中心附近自相似脉冲才是线性啁啾,这也是自相似脉冲解固有的特性之一.而解析解的自相似方法已经规定(通过方程(2)的试探解假定),脉冲的自相似演化一直具有线性啁啾,这个假定在脉冲中心附近与数值解一致,如图4所示.另一方面,文献[19, 20]的数值研究结果表明,三阶色散将导致脉冲形状和频谱发生畸变,脉冲峰产生了延迟,即三阶色散引入的啁啾使脉冲中心发生了漂移,所以啁啾前沿或后沿非线性化加剧.但是,由图4可以明显

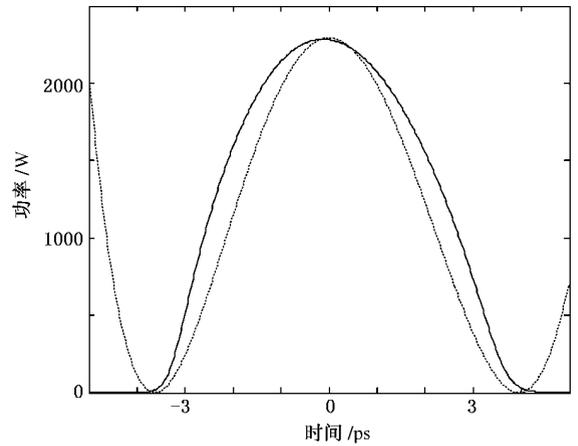


图3 三阶色散系数  $\beta_3 < 0$  时的脉冲形状对比

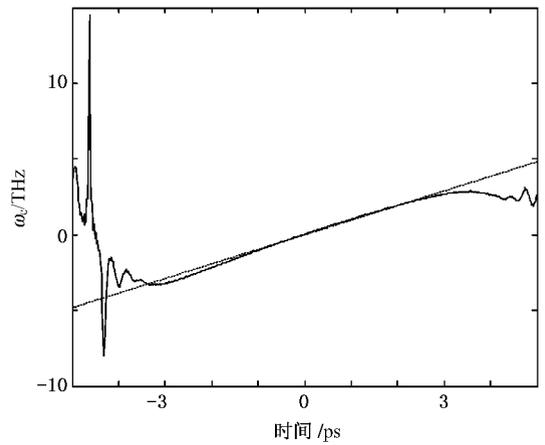


图4 脉冲啁啾的数值解与解析解对比

看出,在线性啁啾的自相似演化范围内(对应于脉冲时域最大宽度约为6 ps),数值解与解析解符合得非常好.

## 4. 结 论

基于自相似的分析方法,在掺杂光纤放大器中的二阶正常色散区域,同时考虑增益色散和三阶色散的影响,求解了三阶色散效应的常数 G-L 方程的自相似脉冲解,得到了自相似脉冲解的振幅函数、相位函数、线性啁啾函数和有效时域宽度的一般解析表达式.数值模拟表明,高阶色散自相似脉冲解析解的强度和啁啾曲线与数值解都非常一致,从而肯定了高阶色散效应 G-L 方程中脉冲演化的自相似特性.这为进一步在非线性光学、超快光学以及光纤激光器领域开展自相似脉冲的应用研究提供了必要的理论支持.

- [ 1 ] Kruglov V I , Peacock A C , Harvey J D , Dudley J M 2002 *Opt. Soc. Am. B* **19** 461
- [ 2 ] Feng J , Xu W C , Zhang Q F , Song F , Mo J X , Liu S H 2006 *Laser Opton. Prog.* **43** 26 [ 冯 杰、徐文成、张巧芬、宋 方、莫杰雄、刘颂豪 2006 激光与光电子学进展 **43** 26 ]
- [ 3 ] Chen S H , Yang Y H , Yi L , Lu P X , Guo D S 2007 *Phys. Rev. E* **75** 036617
- [ 4 ] Finot C , Parmigiani F , Petropoulos P , Richardson D 2006 *Opt. Express* **14** 3161
- [ 5 ] Kruglov V I , Peacock A C , Harvey J D 2006 *Opt. Soc. Am.* **23** 2541
- [ 6 ] Hirooka T , Nakazawa M 2004 *Opt. Lett.* **29** 498
- [ 7 ] Méchin D , Im S H , Kruglov V I , Harvey J D 2006 *Opt. Lett.* **31** 2106
- [ 8 ] Parmigiani F , Finot C , Mukasa K , Ibsen M , Roelens M A 2006 *Opt. Express* **14** 7617
- [ 9 ] Kruglov V I , Peacock A C , Harvey J D 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 113902
- [ 10 ] Ilday F Ö , Buckley J R , Clark W G , Wise F W 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 213902
- [ 11 ] Nielsen C K , Ortac B , Schreiber T , Limpert J 2005 *Opt. Lett.* **30** 9346
- [ 12 ] Billet C , Dudley J M , Joly N , Knight J C 2005 *Opt. Express* **13** 3236
- [ 13 ] Li H M 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1674
- [ 14 ] Ortac B , Hideur A , Chedot C , Martel G , Limpert J 2006 *Appl. Phys. B* **85** 63
- [ 15 ] Chen S H , Yi L , Guo D S , Lu P X 2005 *Phys. Rev. E* **72** 016622
- [ 16 ] Sergey C P , Agrawal G P 2007 *Opt. Express* **15** 2963
- [ 17 ] Feng J , Xu W C , Li S X , Chen W C , Song F , Shen M C , Liu S H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5835 ( in Chinese ) [ 冯 杰、徐文成、李书贤、陈伟成、宋 方、申民常、刘颂豪 2007 物理学报 **56** 5835 ]
- [ 18 ] Feng J , Xu W C , Li S X , Liu S H 2008 *Sci. China G* **51** 299
- [ 19 ] Zhang Q F , Xu W C , Feng J , Liu S H 2008 *Acta Photon. Sin.* **37** 30 ( in Chinese ) [ 张巧芬、徐文成、冯 杰、刘颂豪 2008 光子学报 **37** 30 ]
- [ 20 ] Liu W C , Xu W C , Feng J , Chen W C , Li S X , Liu S H 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1025
- [ 21 ] Agrawal G P 1995 *Nonlinear Fiber Optics* ( Boston : Academic )

## High order dispersion effect of Ginzburg-Landau equation and its self-similar analytical solutions \*

Feng Jie<sup>1)</sup> Xu Wen-Cheng<sup>2)†</sup> Liu Wei-Ci<sup>2)</sup> Li Shu-Xian<sup>2)</sup> Liu Song-Hao<sup>2)</sup>

1) *School of Physics and Telecommunication Engineering, South China Normal University, Guangzhou 510006, China*

2) *Laboratory of Photonic Information Technology, School of Information and Optoelectronic Science and Engineering, South China Normal University, Guangzhou 510006, China*

( Received 18 January 2008 ; revised manuscript received 6 June 2008 )

### Abstract

Using the methods based on the technique of self-similar analyzing, we find the parabolic asymptotic self-similar analytical solutions with third-order dispersion effect of constant coefficient Ginzburg-Landau equation which considers both the influence of high order dispersion and gain dispersion on the evolution of self-similar pulse. The self-similar amplitude function, phase function, strict linear chirp function and effective temporal pulse width are given in the paper. The results show that self-similar pulses still have linear chirp and remarkable third-order dispersion effect. And these theoretical results are consistent with numerical simulations.

**Keywords :** third-order dispersion, Ginzburg-Landau equation, self-similarity pulse, normal second-order dispersion

**PACC :** 4265, 4265S, 4255N, 4225B

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China ( Grant No. 04010397 ).

† Corresponding author. E-mail : xuwch@sncu.edu.cn