

研究强非线性振动系统同宿分岔问题的规范形方法*

张琪昌[†] 王 炜[‡] 何学军

(天津大学机械学院力学系, 天津 300072)

(2007 年 11 月 15 日收到, 2007 年 12 月 31 日收到修改稿)

以改进的规范形理论为基础, 采用强非线性振动问题的分析方法, 拓展了原有弱非线性振动系统同宿分岔判据的适用范围. 首先在复规范形求解过程中引入待定固有频率, 计算了一类单自由度强非线性振动系统的周期解. 然后分别依据系统的待定固有频率趋于零和周期轨道趋近于鞍点两条途径获得了强非线性振动条件下系统同宿分岔的解析判据. 最后通过与原有解析结果和数值结果相比较验证了本文方法的有效性.

关键词: 规范形, 同宿分岔, 强非线性, 周期解

PACC: 0340, 0540, 0547

1. 引 言

研究非线性振动系统的同宿分岔对于分析系统全局行为具有十分重要的理论价值. 在现有研究同宿分岔的解析方法中, 最为常用的是 Melnikov 方法^[1]. 通过测量鞍点稳定流形与不稳定流形间的距离, 计算距离函数的零点, 从而确定发生同宿分岔的临界参数值. Belhaq 和 Fashf^[2-4] 提出依据系统的振动周期趋于无穷大和周期轨道趋近于鞍点作为发生同宿分岔的新判据. 由于 Melnikov 函数的适用范围被限定为非线性项参数充分小的系统^[1], 而文献 [2-4] 在推导解析判据过程中采用了常规的多尺度法, 因此理论上它们都只能用于研究与弱非线性振动系统有关的同宿分岔问题. 考虑到强非线性振动问题的重要性与特殊性^[5-8], 为进一步拓展上述解析方法的研究范围, Ge 和 Ku^[9,10] 通过引入变换参数将原有系统弱化, 提出了可用于研究强非线性振动系统同宿分岔的 Melnikov 函数法. Belhaq 和 Fiedler 等人^[11] 又在其先前研究工作的基础上, 利用 L-P 法结合 Jacobian 椭圆函数获取此类系统的周期解, 再由依据周期轨道趋近于鞍点计算同宿分岔值. 采用类似思路的还有 Xu^[12] 和 Zhang^[13], 分别由摄动-增量法和频率-增量法计算系统的周期解. 本文以规范形理论^[14] 为基础, 应用待定固有频率法^[15] 获取强非线性

性振动系统的平均方程, 通过拓展文献 [2-4] 中关于同宿分岔判据的应用范围, 得到了适用于研究强非线性振动系统同宿分岔临界值的解析方法. 最后以算例的形式对采用不同方法研究同宿分岔问题所获得的结果进行比较, 结果表明本文基于待定固有频率复规范形理论得到的解析方法, 不仅可用于分析强非线性振动系统的同宿分岔问题, 而且对于研究弱非线性振动系统的同宿分岔问题, 可明显提高计算精度, 为深入研究系统全局分岔行为提供了便利.

2. 强非线性振动系统的周期解

考察如下非线性振动系统的同宿分岔临界值问题:

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = f(\mu, u, \dot{u}), \quad (1)$$

这里的 f 含有由 u, \dot{u} 所组成的非线性项. 若其中的非线性项系数为小量, 则可以直接应用 Melnikov 方法^[1] 和 Belhaq 等人^[2-4] 提出的理论进行研究; 若不为小量, 则需要采用相应的强非线性分析方法对原有理论进行改进以拓展其适用范围. 为便于分析, 讨论如下含有 3 阶和 5 阶强非线性项的 Φ^6 -Van der Pol 振动系统:

$$\ddot{u} - \omega_0^2 u = -\alpha u^5 + (\mu - \beta u^2 - \gamma u^4) \dot{u}, \quad (2)$$

其中 ω_0 为系统的固有频率, $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ 均大于零, 系

* 国家自然科学基金(批准号: 10372068)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20060056005)资助的课题.

[†] E-mail: qzhang@tju.edu.cn

[‡] E-mail: wangweifrancois@yahoo.com.cn

统的非线性弹性力和阻尼力并非小量。

(2) 式可表示为如下的一阶微分方程组：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \omega_0^2 x - \alpha x^5 + (\mu - \beta x^2 - \gamma x^4) y. \end{aligned} \quad (3)$$

该系统的平衡点为

$$(x^*, y^*) = (0, 0), \left(\pm \frac{\sqrt{\omega_0}}{\alpha^{1/4}}, 0 \right). \quad (4)$$

系统 (3) 的保守系统势能具有 Φ^6 特征

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^x -(\omega_0^2 s - \alpha s^5) ds \\ &= -\frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{6} \alpha x^6. \end{aligned} \quad (5)$$

由图 1 中的势能曲线可见, 在 $x=0$ 处 $V(x)$ 具有极大值, 在 $x = \pm \frac{\sqrt{\omega_0}}{\alpha^{1/4}}$ 处 $V(x)$ 具有极小值, 因而平衡

点 $(0, 0)$ 是一个鞍点, $(\pm \frac{\omega_0}{\alpha^{1/4}}, 0)$ 是两个中心. 因此保守系统的总能量为

$$H(x, y) = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{6} \alpha x^6 = c. \quad (6)$$

对于过鞍点 $(0, 0)$ 的解, 由 (6) 式可知 $c=0$, 从而保守系统的同宿轨道示意图如图 2 所示 (其中参数取值为 $\omega_0=1, \alpha=8$).

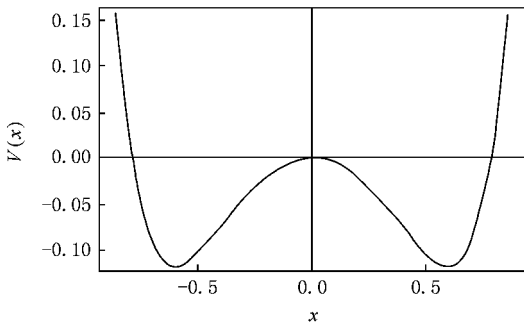


图 1 保守系统的势能曲线

由于 (2) 式的中心不在坐标原点, 所以引入如下的坐标变换：

$$U = u - \frac{\sqrt{\omega_0}}{\alpha^{1/4}}. \quad (7)$$

将 (7) 式代入 (2) 式, 得到中心位于坐标原点的系统振动方程

$$\begin{aligned} \ddot{U} &= -\alpha \left(U + \frac{\sqrt{\omega_0}}{\alpha^{1/4}} \right)^5 + \left(U + \frac{\sqrt{\omega_0}}{\alpha^{1/4}} \right) \omega_0^2 \\ &+ \left[\mu - \beta \left(U + \frac{\sqrt{\omega_0}}{\alpha^{1/4}} \right)^2 \right. \end{aligned}$$

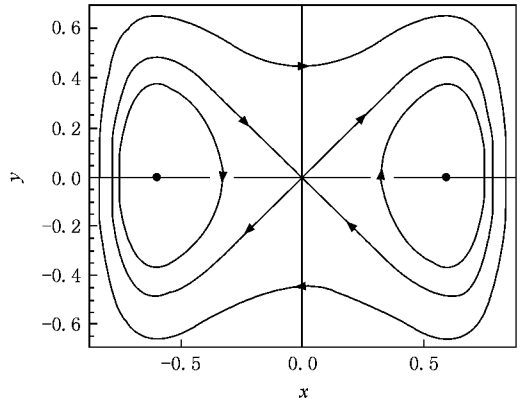


图 2 保守系统的同宿轨道

$$- \gamma \left(U + \frac{\sqrt{\omega_0}}{\alpha^{1/4}} \right)^4 \Big] \dot{U}. \quad (8)$$

采用改进的复规范形方法^[15]计算 (8) 式的周期解. 首先引入复变量 ξ ,

$$U = \xi + \bar{\xi}, \dot{U} = i\omega_{10}(\xi - \bar{\xi}), \quad (9)$$

其中 $\bar{\xi}$ 表示 ξ 的共轭; ω_{10} 为未知的固有频率, 用其取代传统算法中的固有频率, 可以在得到的渐近解中更有效地体现强非线性项参数对于系统频率的影响, 从而将过去只能研究弱非线性振动问题的传统规范形理论, 拓展到了强非线性振动领域.

求解方程 (9), 得

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} \left(U - \frac{i}{\omega_{10}} \dot{U} \right), \\ \bar{\xi} &= \frac{1}{2} \left(U + \frac{i}{\omega_{10}} \dot{U} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

将 (10) 式中的第一式对时间 t 求导, 同时考虑 (8), (9) 两式, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{i\omega_{10}}{2} (\xi - \bar{\xi}) - \frac{1}{2\omega_{10}} \left\{ \left[-10\omega_0^{3/2} \alpha^{1/4} (\xi + \bar{\xi})^5 \right. \right. \\ &- 5\omega_0^{1/2} \alpha^{3/4} (\xi + \bar{\xi})^4 - \alpha (\xi + \bar{\xi})^3 \\ &- 10\alpha^{1/2} (\xi + \bar{\xi})^3 \omega_0 \\ &- 4(\xi + \bar{\xi}) \omega_0^2 + i\mu (\xi - \bar{\xi}) \omega_{10} \\ &- \frac{4i\omega_0^{3/2} \gamma (\xi - \bar{\xi}) (\xi + \bar{\xi}) \omega_{10}}{\alpha^{3/4}} \\ &- \frac{2i\omega_0^{1/2} \beta (\xi - \bar{\xi}) (\xi + \bar{\xi}) \omega_{10}}{\alpha^{1/4}} \\ &- i\beta (\xi - \bar{\xi}) (\xi + \bar{\xi})^2 \omega_{10} \\ &- \frac{4i\omega_0^{1/2} \gamma (\xi - \bar{\xi}) (\xi + \bar{\xi})^3 \omega_{10}}{\alpha^{1/4}} \\ &\left. \left. - i\gamma (\xi - \bar{\xi}) (\xi + \bar{\xi})^4 \omega_{10} - \frac{i\beta (\xi - \bar{\xi}) \omega_0 \omega_{10}}{\alpha^{1/2}} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{6i\chi(\xi - \bar{\xi})(\xi + \bar{\xi})\omega_0\omega_{10}}{\alpha^{1/2}} \\
& - \left. \frac{i\chi(\xi - \bar{\xi})\omega_0^2\omega_{10}}{\alpha} \right\}. \tag{11}
\end{aligned}$$

为得到系统的规范形,需要引入直至 5 阶的近恒同非线性变换来简化(11)式,令

$$\begin{aligned}
\xi &= \eta + h_1(\eta, \bar{\eta}) + h_2(\eta, \bar{\eta}) \\
&+ h_3(\eta, \bar{\eta}) + h_4(\eta, \bar{\eta}) \\
&+ h_5(\eta, \bar{\eta}), \tag{12}
\end{aligned}$$

其中

$$h_1(\eta, \bar{\eta}) = \sum_{j=0}^1 \Gamma_{j, 1-j} \eta^j \bar{\eta}^{1-j},$$

$$h_2(\eta, \bar{\eta}) = \sum_{j=0}^2 \Gamma_{j, 2-j} \eta^j \bar{\eta}^{2-j},$$

$$h_3(\eta, \bar{\eta}) = \sum_{j=0}^3 \Gamma_{j, 3-j} \eta^j \bar{\eta}^{3-j},$$

$$h_4(\eta, \bar{\eta}) = \sum_{j=0}^4 \Gamma_{j, 4-j} \eta^j \bar{\eta}^{4-j},$$

$$h_5(\eta, \bar{\eta}) = \sum_{j=0}^5 \Gamma_{j, 5-j} \eta^j \bar{\eta}^{5-j}.$$

将(12)式代入(11)式,并利用规范形方法进行化简,可得系统直至五阶的传统规范形

$$\dot{\eta} = \frac{\alpha(4\omega_0^2 + \omega_{10}^2)}{-\alpha^{1/2}\beta\omega_0 - \gamma\omega_0^2 + \alpha(\mu - 2i\omega_{10})}\eta$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i\alpha\beta\omega_{10} + 6\omega_0(5\alpha^{3/2} + i\alpha^{1/2}\gamma\omega_{10})}{-\alpha^{1/2}\beta\omega_0 - \gamma\omega_0^2 + \alpha(\mu - 2i\omega_{10})}\eta^2 \bar{\eta} \\
& + \frac{10\alpha^2 + 2i\alpha\gamma\omega_{10}}{-\alpha^{1/2}\beta\omega_0 - \gamma\omega_0^2 + \alpha(\mu - 2i\omega_{10})}\eta^3 \bar{\eta}^2. \tag{13}
\end{aligned}$$

将上式中的变量 η 和 $\bar{\eta}$ 表示为极坐标 $\eta = \frac{1}{2} a e^{i\omega_{10}t}$,

$\bar{\eta} = \frac{1}{2} a e^{-i\omega_{10}t}$ 的形式,分离所得复数方程的实部与虚部,并且应用系统存在定常解条件 $\dot{a} = 0$,可得

$$\begin{aligned}
& a\alpha\{5a^4\alpha + 60a^2\alpha^{1/2}\omega_0 + 32\omega_0^2\} \\
& \times [\alpha\mu - \omega_0(\alpha^{1/2}\beta + \gamma\omega_0)] \\
& - 2\alpha(2a^2\beta + a^4\gamma - 4\mu) \\
& + 4\omega_0(\alpha^{1/2}\beta + 3a^2\alpha^{1/2}\gamma + \gamma\omega_0)\omega_{10}^2 \} \\
& = 0, \tag{14a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a\omega_{10} &= \{a\alpha^{1/2}\omega_{10}\{-12a^2\gamma^2\omega_0^3 \\
& + \alpha^{1/2}[64\alpha - a^2\chi(a^2\gamma \\
& + 14\beta)]\omega_0^2 + a^2\alpha(120\alpha \\
& - 2\beta^2 - a^2\beta\gamma + 12\gamma\mu)\omega_0 \\
& + \alpha^{3/2}[a^4(10\alpha + \gamma\mu) + 2a^2\beta\mu \\
& + 16\omega_{10}^2]\}\}\{\alpha - \alpha\mu \\
& + \omega_0(\alpha^{1/2}\beta + \gamma\omega_0)\} + 32a^2\omega_{10}^2 \}. \tag{14b}
\end{aligned}$$

求解(14)式中的系统振幅 a 和待定固有频率 ω_{10} ,

$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{(5a^4\alpha + 60a^2\alpha^{1/2}\omega_0 + 32\omega_0^2)\alpha\mu - \omega_0(\alpha^{1/2}\beta + \gamma\omega_0)}{2\alpha(2a^2\beta + a^4\gamma - 4\mu) + 8\omega_0[\beta + 3a^2\gamma\alpha^{1/2} + \gamma\omega_0]}}$$

$$a = \sqrt{\frac{-\alpha\beta - 6\alpha^{1/2}\gamma\omega_0 + \sqrt{\alpha^2\beta^2 + 8\alpha^2\gamma\mu + 4\alpha^{3/2}\beta\gamma\omega_0 + 28\alpha\gamma^2\omega_0^2}}{\alpha}}$$

将(12)式代入(9)式的第一式,可以获得系统的周期解

$$\begin{aligned}
U &= a\cos\psi - \frac{5a^2\omega_0^{3/2}\alpha^{1/4}}{4\omega_0^2} - \frac{15a^4\omega_0^{1/2}\alpha^{3/4}}{32\omega_0^2} \\
&+ \sum_{m=2}^5 (A_m \cos m\psi + B_m \sin m\psi), \tag{17}
\end{aligned}$$

其中 $\psi = \omega_{10}t$, A_m 和 B_m 为各高阶谐波的系数(略).

3. 强非线性振动系统的同宿分岔判据

同宿分岔轨线是系统周期与非周期运动的分界线.因此,有效地获取各类非线性振动系统的同宿分岔信息,对于分析系统的全局行为具有十分重要的

价值.在现有研究低维非线性系统同宿分岔文献中,文献 2—4 提供了两条不同于 Melnikov 方法的解析途径:系统的振动频率 $\Omega(\mu) \rightarrow 0$ 和周期轨道趋近于鞍点 $X_A(x_A, y_A) \rightarrow S(a_s, b_s)$.但是,由于它们是依据传统的多尺度法为基础而获得的(系统频率及周期解)因此适用范围受到方法本身的限制,只能用于分析弱非线性振动问题.这里,通过引用待定固有频率方法构建强非线性振动系统的周期解,使文献 [2—4] 中提出的同宿分岔的判据的适用范围得到了拓展,用于研究强非线性振动系统的同宿分岔问题.

判据 1 系统待定固有频率 $\omega_{10} \rightarrow 0$.由(15)式可得

$$\sqrt{\frac{(5a^4\alpha + 60a^2\alpha^{1/2}\omega_0 + 32\omega_0^2)[\alpha\mu - \omega_0(\alpha^{1/2}\beta + \gamma\omega_0)]}{2\alpha(2a^2\beta + a^4\gamma - 4\mu) + 8\omega_0[(\beta + 3a^2\gamma)\alpha^{1/2} + \gamma\omega_0]}} \rightarrow 0. \tag{18}$$

就有临界状态 $\alpha\mu_c = \omega_0(\alpha^{1/2}\beta + \gamma\omega_0)$, 所以

$$\mu_c = \frac{\omega_0(\alpha^{1/2}\beta + \gamma\omega_0)}{\alpha}. \tag{19}$$

$$\frac{\alpha(3a^4\alpha - 40a^3\alpha^{3/4}\sqrt{\omega_0} + 20a^2\sqrt{\alpha}\omega_0 - 80a\alpha^{3/4}\omega_0^{2/3} - 32\omega_0^2)}{32\omega_0^2} = -\frac{\sqrt{\omega_0}}{\alpha^{1/4}}. \tag{20}$$

将(16)式代入上式, 可求得其中所包含的参数 μ_c (略).

4. 算例分析

算例 1

适当选取系统(2)式中的非线性项参数 α, β, γ , 建立如下含有三阶和五阶非线性项的 Φ^6 -Van der Pol 强非线性振动方程, 同时采用上述两种判据计算其同宿分岔的临界值,

$$\ddot{u} - 4u = -600u^5 + (\mu - 50u^2 - 300u^4)\dot{u}. \tag{21}$$

采用本文方法和数值仿真方法计算出系统同宿分岔的临界值 μ_c 如表 1 所示, 可见本文方法对于确定强非线性振动系统同宿分岔的临界值具有指导意义. 图 3 给出了分岔值附近系统的同宿轨道相图.

图 1 采用不同方法获得的同宿分岔值

方法	数值模拟	判据 1	判据 2
μ_c	5.01	6.07	6.10

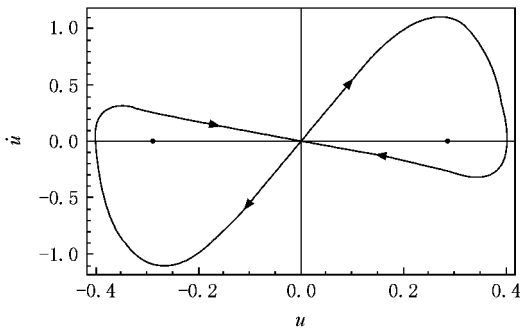


图 3 分岔值附近系统的同宿轨道相图

判据 2 周期轨道趋近于鞍点

$$X_A \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{\omega_0}}{\alpha^{1/4}}, 0 \right).$$

将 $\omega_{10} = 0, U = -\frac{\sqrt{\omega_0}}{\alpha^{1/4}}$ 代入系统的周期解表达式(17), 有

线性项的 Arnold-Takens-Bogdanov 振动系统

$$\ddot{u} - \omega_0^2 u = -u^3 + (\mu - \mu^2)\dot{u}, \tag{22}$$

确定其发生同宿分岔的临界值, 并对采用不同方法获得的临界值结果进行比较.

应用本文方法计算此系统的待定固有频率和周期解, 并得到相应的同宿分岔判据:

$$\omega_{10} \rightarrow 0; \mu_c = \omega_0^2,$$

$$X_A \rightarrow (-\omega_0, 0); a^3 + 8\omega_0^3 = 4a\omega_0(3a - \omega_0).$$

表 2 列出了采用数值方法^[4]、Melnikov 函数法、本文方法, 以及文献[4]方法, 在参数值 $\omega_0 = 0.5$ 和 1 处, 所获得的系统同宿分岔的临界值结果. 图 4 则显示了在区间(0, 2)上, 不同方法获得的临界分岔值 μ_c 随 ω_0 变化的情况.

表 2 采用不同方法获得的同宿分岔值

ω_0	0.50	1.00
数值解	0.23	0.90
判据 1	0.25	1.00
判据 2	0.26	1.07
Melnikov 方法	0.20	0.80
文献[4]的解	0.16	0.65

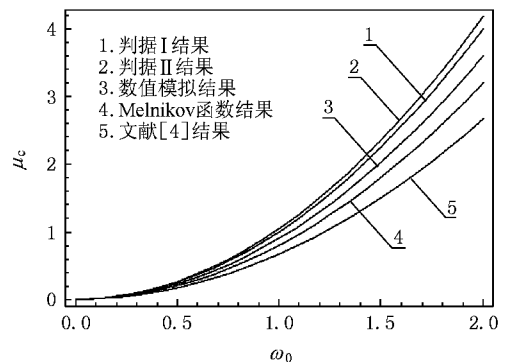


图 4 对应于不同方法的同宿分岔临界值对比

算例 2

利用本文方法研究文献[4]算例中含有立方非

由以上算例可知,应用文中的两类解析判据可以求解强非线性振动系统同宿分岔的临界值,而对于弱非线性振动系统可以在获取分岔值的同时有效地提高结果的计算精度.

5. 结 论

本文以规范形理论为基础,应用待定固有频率法拓展弱非线性振动问题同宿分岔解析判据的适用

范围,将其用于研究强非线性振动系统同宿分岔问题.

给出了系统待定固有频率趋于零和周期轨道趋近于鞍点,两条确定强非线性振动系统同宿分岔临界值的判据.对采用不同的解析方法及数值方法所获得的结果进行了比较,发现应用本文方法不仅可以计算强非线性振动系统同宿分岔的临界值,而且也可用于计算弱非线性振动系统同宿分岔值,并可有效地提高计算精度.

-
- [1] Melnikov V K 1963 *Trans. Moscow math. Soc.* **12** 1
- [2] Belhaq M, Fashi A 1996 *Mech. Res. Comm.* **23** 381
- [3] Belhaq M, Fashi A 1997 *Mech. Res. Comm.* **25** 49
- [4] Belhaq M, Fashi A, Lakrad F 1999 *Nonlinear Dynamics* **18** 303
- [5] Xu W, Sun Z K, Yang X L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5069 (in Chinese) [徐 伟、孙中奎、杨晓丽 2005 物理学报 **54** 5069]
- [6] Naranmandula, Wunenboyn, Wang K X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 11 (in Chinese) [那仁满都拉、乌恩宝音、王克协 2004 物理学报 **53** 11]
- [7] Taogetusang, Sirendaorji 2005 *Acta Phys. Sin.* **55** 13 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2006 物理学报 **55** 13]
- [8] Mo J Q, Zhang W J, He M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1843 (in Chinese) [莫嘉琦、张伟江、何 铭 2007 物理学报 **56** 1843]
- [9] Ge Z M, Ku F N 1998 *Jpn. J. Appl. Phys.* **37** 1021
- [10] Ge Z M, Ku F N 2000 *J. Sound Vib.* **236** 554
- [11] Belhaq M, Fiedler B, Lakrad F 2000 *Nonlinear Dynamics* **23** 67
- [12] Xu Z, Chan H S Y, Chung K W 1996 *Nonlinear Dynamics* **11** 213
- [13] Zhang Y M, Lu Q S 2003 *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **8** 1
- [14] Nayfeh A H 1993 *Method of Normal forms* (New York : John Wiley & Sons)
- [15] Leung A Y T, Zhang Q C 1998 *J. Sound Vib.* **213** 907

Homoclinic bifurcation of the strongly nonlinear oscillation system by the normal form method^{*}

Zhang Qi-Chang[†] Wang Wei[‡] He Xue-Jun

(*School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China*)

(Received 15 November 2007 ; revised manuscript received 31 December 2007)

Abstract

The available range of the homoclinic bifurcation criterions are extended from the weakly nonlinear oscillation system to the strongly nonlinear oscillation system. It combines the analysis method of the strongly nonlinear oscillation system with the former criterions based on the improved complex normal form method. The periodic solution of this kind of system with a single degree of freedom is obtained by introducing the fundamental frequency under determination into the complex normal form computation. Then two different analytical criteria to predict the critical values of homoclinic bifurcation are adapted to the new system. It includes the underdetermined fundamental frequency approaching zero and the collision of the periodic orbit with the saddle point. The results derived from different methods are compared in the specific systems with numerical simulation to testify the correctness and efficiency of the theoretical results.

Keywords : normal form , homoclinic bifurcation , strongly nonlinear , periodic solution

PACC : 0340 , 0540 , 0547

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10372068) and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20060056005).

[†] E-mail : qzhang@tju.edu.cn

[‡] E-mail : wangweifrancois@yahoo.com.cn