第 57 卷 第 9 期 2008 年 9 月
1000-3290/2008/57(09)/5390-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.57,No.9,September,2008

(2+1)维 Boussinesq 方程的新的周期解*

吴勇旗†

(湛江师范学院数学系,湛江 524048)

(2007 年 11 月 6 日收到;2008 年 2 月 23 日收到修改稿)

利用 Hirota 方法及 Riemann theta 函数得到了(2+1)维 Boussinesq 方程的新的周期解.在极限情况下,该周期解退化为孤子解.

关键词:Hirota 方法,Riemann theta 函数,(2+1)维 Boussinesq 方程,周期解

PACC:0340K,0290

1.引 言

孤子方程的显式解对于理解方程是非常重要的,目前已经有了几种求解的方法,如反散射变换法、Bäcklund 变换法、穿衣服方法、Painlevé 展开法等等.最近,Lax 对的非线性化方法[1—3]、齐次平衡法[4—7]、双曲函数法[8—13]、Jacobi 椭圆函数展开法[14]等也都被用来求非线性发展方程的各种显式解.然而,寻找新形式的显式解仍然是一件很有意义的工作.本文利用 Hirota 方法及 Riemann theta 函数得到了(2+1)维 Boussinesq 方程的新的周期解.在极限情况下,该周期解退化为孤子解.

2.(2+1)维 Boussinesq 方程的周期解

Boussinesq 方程作为一种非线性方程,在物理学的研究中占有重要位置.许多学者对此方程都做了大量的研究[15—19].(2+1)维 Boussinesq 方程可以写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-3\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}=0, \quad (1)$$

文献[15]通过 Bäcklund 变换得到了它的类孤子解和有理解,文献[16]利用 Hirota 方法及形式摄动得到了该方程的单孤子解、双孤子解及 N 孤子解.本文得到的是它的周期解.

2.1. Hirota 双线性算子的定义

由于这里只涉及三个变量,我们定义 Hirota 双线性算子为

$$\begin{aligned}&D_t^l D_x^m D_y^n a(x,y,t)\cdot b(x,y,t)\\&\equiv(\partial_x-\partial_{x'})^l(\partial_y-\partial_{y'})^m(\partial_t-\partial_{t'})^n\\&\quad\times a(x,y,t)b(x',y',t')\,|_{x=x',y=y',t=t'},\end{aligned} \quad (2)$$

其中 l,m 和 n 都是非负整数,Hirota 双线性算子有许多重要的性质[20],这里用到的有

$$\begin{aligned}&D_x^n\exp(kx)\cdot\exp(k'x)\\&=(k-k')^n\exp[(k+k')x],\end{aligned} \quad (3)$$

或者,更一般地,当 F 为一多项式函数时,有

$$\begin{aligned}&F(D_x,D_y,D_t)\exp(kx+ly+\omega t)\\&\quad\cdot\exp(k'x+l'y+\omega' t)\\&=F(k-k',l-l',\omega-\omega')\\&\quad\cdot\exp[(k+k')x+(l+l')y+(\omega+\omega')t],\end{aligned} \quad (4)$$

它们可以直接从定义出发得到.利用 Hirota 方法的关键是找相关变量变换,对于(2+1)维 Boussinesq 方程(1)来说,我们取

$$u(x,y,t)=u_0+2\partial^2\ln f(x,y,t)/\partial x^2, \quad (5)$$

这里 u_0 为常数,将(5)式代入(1)式并对 x 积分两次,得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\ln f}{\partial t^2}-(1+6u_0)\frac{\partial^2\ln f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\ln f}{\partial y^2}\\&-\frac{\partial^4\ln f}{\partial x^4}-6\left(\frac{\partial^2\ln f}{\partial x^2}\right)^2+c=0,\end{aligned} \quad (6)$$

其中 c 为积分常数($c=c_1(y,t)x+c_2(y,t)$),一般

* 湛江师范学院博士专项基金(批准号:ZL0601)资助的课题.

† E-mail:yqwuedu@sina.com

可以取为零,但是下面可以看到这里不可以取零.经过直接计算,有

$$\frac{\partial^2 \ln f}{\partial t^2}=\frac{1}{f^2}\left[-\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2+f\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right], \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f}{\partial x^2}=\frac{1}{f^2}\left[-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right], \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f}{\partial y^2}=\frac{1}{f^2}\left[-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right], \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 \ln f}{\partial x^4}=\frac{1}{f^4}\Big[&-3f^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2\\&-4f^2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+12f\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\\&-6\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^4+f^3\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\Big],\end{aligned} \tag{10}$$

以及

$$D_t^2(f\cdot f)=2\left[f\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2\right], \tag{11}$$

$$D_x^2(f\cdot f)=2\left[f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right], \tag{12}$$

$$D_y^2(f\cdot f)=2\left[f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right], \tag{13}$$

$$D_x^4(f\cdot f)=2\left[f\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}-4\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2\right]. \tag{14}$$

将(7)—(10)式代入(6)式并利用(11)—(14)式,便得到(2+1)维 Boussinesq 方程(1)的双线性形式为

$$\begin{aligned}Ff\cdot f=&\big(D_t^2-(1+6u_0)D_x^2\\&-D_y^2-D_x^4+c\big)f\cdot f=0.\end{aligned} \tag{15}$$

2.2. 方程(1)的单周期解

为求得单周期波解,我们取一维 Riemann theta 函数[21]

$$\begin{aligned}&f=\theta(\eta;\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(2\pi i n\eta+\pi i n^2\tau),\\&i=\sqrt{-1},\\&\eta=px+ly+\omega t+\eta_0,\end{aligned} \tag{16}$$

其中 p,l 表示波数,ω 表示频率,η_0 是相常数,τ 是一虚部大于零的复常数.把(16)式代入(15)式并利用(4)式,有

$$\begin{aligned}Ff\cdot f=&\sum_{n,n'=-\infty}^{\infty}F(D_t,D_x,D_y)\exp(2\pi i n\eta+\pi i n^2\tau)\\&\cdot\exp(2\pi i n'\eta+\pi i n'^2\tau)\\=&\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}F(D_t,D_x,D_y)\exp(2\pi i n\eta+\pi i n^2\tau)\\&\cdot\exp(2\pi i(m-n)\eta+\pi i(m-n)^2\tau)\\=&\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}F[2\pi i(2n-m)\omega,\\&2\pi i(2n-m)p,2\pi i(2n-m)l)]\\&\times\exp\{2\pi i m\eta+\pi i[n^2+(n-m)^2]\tau\}\\=&\sum_{m=-\infty}^{\infty}\tilde F(m)\exp(2\pi i m\eta),\end{aligned} \tag{17}$$

这里引入了求和指标 $m=n+n'$,而 $\tilde F(m)$ 是

$$\begin{aligned}\tilde F(m)=&\sum_{n=-\infty}^{\infty}F[2\pi i(2n-m)\omega,\\&2\pi i(2n-m)p,2\pi i(2n-m)l)]\\&\times\exp\{\pi i[n^2+(n-m)^2]\tau\}.\end{aligned} \tag{18}$$

利用 $n=n'+1$,(18)式变为

$$\begin{aligned}\tilde F(m)=&\sum_{n'=-\infty}^{\infty}F\{2\pi i[2n'-(m-2)]\omega,\\&2\pi i[2n'-(m-2)]p,\\&2\pi i[2n'-(m-2)]l\}\\&\times\exp\{\pi i[n'^2+(m-2-n')^2]\tau\}\\&\times\exp\{2\pi i(m-1)\tau\}\\=&\tilde F(m-2)\exp\{2\pi i(m-1)\tau\}.\end{aligned} \tag{19}$$

从(19)式可以看到,如果 $\tilde F(0)$ 和 $\tilde F(1)$ 都是零,那么所有的 $\tilde F(m)$ 均为零.另一方面,我们知道,即使其他的参数都知道,积分常数 c 和频率 ω 却是不知道的.因此,利用 $\tilde F(0)=0$ 和 $\tilde F(1)=0$ 解出积分常数 c 和非线性色散关系 ω 我们就可以得到方程(15)的精确周期解.$\tilde F(0)=0$ 和 $\tilde F(1)=0$ 可以分别写为

$$\begin{aligned}\tilde F(0)=&\sum_{n=-\infty}^{\infty}[-16\pi^2n^2\omega^2+16(1+6u_0)\pi^2n^2p^2\\&+16\pi^2n^2l^2-256\pi^4n^4p^4+c]\\&\times\exp(2\pi i n^2\tau)\\=&0,\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\tilde F(1)=&\sum_{n=-\infty}^{\infty}[-4\pi^2(2n-1)^2\omega^2\\&+4(1+6u_0)\pi^2(2n-1)^2p^2\\&+4\pi^2(2n-1)^2l^2-16\pi^4(2n-1)^4p^4+c]\\&\times\exp\{\pi i[n^2+(n-1)^2]\tau\}\\=&0.\end{aligned} \tag{21}$$

通过引入

$$A_0(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(2\pi i n^2\tau), \tag{22}$$

$$A_1(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(4n)^2\exp(2\pi i n^2\tau), \tag{23}$$

$$A_2(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(4n)^4\exp(2\pi i n^2\tau), \tag{24}$$

$$B_0(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\{\pi i[n^2+(n-1)^2]\tau\}, \tag{25}$$

$$B_1(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(4n-2)^2\exp\{\pi i[n^2+(n-1)^2]\tau\}, \tag{26}$$

$$B_2(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(4n-2)^4\exp\{\pi i[n^2+(n-1)^2]\tau\}, \tag{27}$$

方程(20)和(21)可以写为

$$\begin{aligned}&-A_1(\tau)(\pi\omega)^2+(1+6u_0)A_1(\tau)(\pi p)^2\\&+A_1(\tau)(\pi l)^2-A_2(\tau)(\pi p)^4+cA_0(\tau)\\=&0,\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}&-B_1(\tau)(\pi\omega)^2+(1+6u_0)B_1(\tau)(\pi p)^2\\&+B_1(\tau)(\pi l)^2-B_2(\tau)(\pi p)^4+cB_0(\tau)\\=&0.\end{aligned} \tag{29}$$

解此方程组得到

$$\begin{aligned}\omega^2=&(1+6u_0)p^2+l^2\\&-\frac{A_2(\tau)B_0(\tau)-B_2(\tau)A_0(\tau)}{A_1(\tau)B_0(\tau)-B_1(\tau)A_0(\tau)}\pi^2p^4,\end{aligned} \tag{30}$$

$$c=\frac{A_2(\tau)B_1(\tau)-B_2(\tau)A_1(\tau)}{A_0(\tau)B_1(\tau)-B_0(\tau)A_1(\tau)}(\pi p)^4. \tag{31}$$

因此,表达式(5)加上(16)式和(30)式就是我们得到的(2+1)维 Boussinesq 方程(1)的单周期波解.有意思的是,在极限情况下,可以由周期解得到孤子解,为此我们引入

$$q=\exp(\pi i\tau), \tag{32}$$

则(22)—(27)式及(30),(31)式可以分别表示为

$$A_0=1+2q^2+2q^8+\cdots \tag{33}$$

$$A_1=32q^2+128q^8+\cdots \tag{34}$$

$$A_2=512q^2+8192q^8+\cdots \tag{35}$$

$$B_0=2q+2q^5+2q^{13}+\cdots \tag{36}$$

$$B_1=8q+72q^5+200q^{13}+\cdots \tag{37}$$

$$B_2=32q+2592q^5+20000q^{13}+\cdots \tag{38}$$

取极限 $q\to0$(或者 $\mathrm{Im}\tau\to\infty$)有

$$\begin{aligned}\omega^2=&(1+6u_0)p^2+l^2-4\pi^2\frac{1-30q^2+81q^4+\cdots}{1-6q^2+9q^4+\cdots}p^4\\&\to(1+6u_0)p^2+l^2-4\pi p^4,\\&(q\to0),\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}c=&384q^2\frac{1-15q^4+20q^6+\cdots}{1-6q^2+9q^4+\cdots}(\pi p)^4\to0,\\&(q\to0).\end{aligned} \tag{40}$$

引入记号

$$\begin{aligned}&\tilde{p}=2\pi ip,\ \tilde{l}=2\pi il,\\&\tilde{\omega}=2\pi i\omega,\ \tilde{\eta}_0=2\pi i\eta_0+\pi i\tau,\end{aligned} \tag{41}$$

则在极限 $q\to0$(或者 $\mathrm{Im}\tau\to\infty$)下,有

$$\begin{aligned}f=&1+\exp(2\pi i\eta+\pi i\tau)+\exp(-2\pi i\eta+\pi i\tau)+\cdots\\=&1+\exp(\tilde{p}x+\tilde{l}y+\tilde{\omega}t+\tilde{\eta}_0).\end{aligned} \tag{42}$$

这是用双线性变量表示的(2+1)维 Boussinesq 方程(1)的解,通过(5)式,它可以转化为孤子解

$$u(x,y,t)=u_0+\frac{\tilde{p}^2}{2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{\tilde{p}x+\tilde{l}y+\tilde{\omega}t+\tilde{\eta}_0}{2}\right). \tag{43}$$

2.3. 方程(1)的双周期解及 N 周期解的条件

为求得双周期波解,我们取 N 维 Riemann theta 函数

$$\begin{aligned}f=&\theta(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_N;\tau)\\=&\sum_{n_1,\cdots,n_N=-\infty}^{\infty}\exp\left(2\pi i\sum_{j=1}^{N}n_j\eta_j+\pi i\sum_{j,k=1}^{N}\tau_{jk}n_jn_k\right),\\&\eta_j=p_jx+l_jy+\omega_jt+\eta_{0j}\\&j=1,2,\cdots,N,\end{aligned} \tag{44}$$

其中 p_j,l_j,ω_j 和 η_{0j} 的意义同一维情形相仿,$\tau_{jk}(j\neq k)$ 表示波之间的相互作用.并假设复矩阵 $\tau=(\tau_{jk})_{N\times N}$ 对称且具有正定的虚部.把(44)式代入(15)式并利用(4)式,我们得到与(17)式相应的结果:

$$\begin{aligned}Ff\cdot f=&\sum_{m_1,\cdots,m_N=-\infty}^{\infty}\tilde{F}(m_1,\cdots,m_N)\\&\times\exp\left(2\pi i\sum_{j=1}^{N}m_j\eta_j\right),\end{aligned} \tag{45}$$

其中

$$\begin{aligned}&\tilde{F}(m_1,\cdots,m_N)\\&=\sum_{n_1,\cdots,n_N=-\infty}^{\infty}F\Big[2\pi i\sum_{j=1}^{N}(2n_j-m_j)\omega_j,\\&2\pi i\sum_{j=1}^{N}(2n_j-m_j)p_j,\\&2\pi i\sum_{j=1}^{N}(2n_j-m_j)l_j\Big]\\&\times\exp\Big\{\pi i\sum_{j,k=1}^{N}[n_j\tau_{jk}n_k\\&+(m_j-n_j)\tau_{jk}(m_k-n_k)]\Big\}.\end{aligned} \tag{46}$$

把第 h 个求和指标 n_h 平移一个单位,我们得到与(19)式相对应的关系

$$\tilde{F}(m_1,\cdots,m_N)$$

$$= \tilde F(m_1,\cdots,m_{h-1},m_h-2,m_{h+1},\cdots,m_N)$$
$$\times \exp\left(2\pi i\sum_{j=1}^{N}\tau_{hj}m_j-2\tau_{hh}\right),$$
$$h=1,2,\cdots,N. \tag{47}$$

如果关系式

$$\tilde F(m_1,\cdots,m_N)=0, \tag{48}$$

对所有的 $m_1=0,1,m_2=0,1,\cdots,m_N=0,1$ 成立,那么(44)式便给出了(2+1)维 Boussinesq 方程(1)的 N 周期波解.注意到(48)式共有 2^N 个方程,而当参数 u_0,波向量 $k_1,l_1,\cdots,k_N,l_N$ 以及 τ_{11},τ_{22} 为已知时,包含在问题中的未知量的个数包括积分常数 c,非线性频率 $\omega_j(j=1,\cdots,\omega_N)$ 和相互干扰项 $\tau_{jk}(1\leqslant j,k\leqslant N,j\neq k)$ 共有 $1+N+C_N^2=\frac{1}{2}(N^2+N+2)$ 个.对于 $N=1,2$,方程个数与未知量个数相等,此乃意味着方程(1)总存在单周期波和双周期波解,对于一般的 N,(48)式是否是存在 N 周期波解的充分条件目前仍是一个未决问题.

下面就 $N=2$ 时求(1)式的双周期波解.由(47)和(48)式有

$$\begin{aligned}\tilde F(0,0)=&\sum_{n_1,n_2=-\infty}^{\infty}\{[2\pi i(2n_1\omega_1+2n_2\omega_2)]^2\\&-(1+6u_0)[2\pi i(2n_1p_1+2n_2p_2)]^2\\&-[2\pi i(2n_1l_1+2n_2l_2)]^2\\&-[2\pi i(2n_1p_1+2n_2p_2)]^4+c\}\\&\times\exp[2\pi i(\tau_{11}n_1^2+2\tau_{12}n_1n_2+\tau_{22}n_2^2)]\\=&0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde F(0,1)=&\sum_{n_1,n_2=-\infty}^{\infty}\{\{2\pi i[2n_1\omega_1+(2n_2-1)\omega_2]\}^2\\&-(1+6u_0)\{2\pi i[2n_1p_1+(2n_2-1)p_2]\}^2\\&-\{2\pi i[2n_1l_1+(2n_2-1)l_2]\}^2\\&-2\{\pi i[2n_1p_1+(2n_2-1)p_2]\}^4+c\}\\&\times\exp\left\{2\pi i\left[\tau_{11}n_1^2+\tau_{12}(2n_1n_2-n_1)\right.\right.\\&\left.\left.+\tau_{22}\left(n_2^2-n_2+\frac{1}{2}\right)\right]\right\}\\=&0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde F(1,0)=&\sum_{n_1,n_2=-\infty}^{\infty}\{\{2\pi i[2n_1-1)\omega_1+2n_2\omega_2]\}^2\\&-(1+6u_0)\{2\pi i[(2n_1-1)p_1+2n_2p_2]\}^2\\&-\{2\pi i[(2n_1-1)l_1+2n_2l_2]\}^2\\&-\{2\pi i[(2n_1-1)p_1+2n_2p_2]\}^4+c\}\\&\times\exp\left\{2\pi i\left[\tau_{11}\left(n_1^2-n_1+\frac{1}{2}\right)\right.\right.\\&\left.\left.+\tau_{12}(2n_1n_2-n_2)+\tau_{22}n_2^2\right]\right\}\\=&0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde F(1,1)=&\sum_{n_1,n_2=-\infty}^{\infty}\{\{2\pi i[(2n_1-1)\omega_1+(2n_2-1)\omega_2]\}^2\\&-(1+6u_0)\{2\pi i[(2n_1-1)p_1+(2n_2-1)p_2]\}^2\\&-\{2\pi i[(2n_1-1)l_1+(2n_2-1)l_2]\}^2\\&-\{2\pi i[(2n_1-1)p_1+(2n_2-1)p_2]\}^4+c\}\\&\times\exp\left\{2\pi i\left[\tau_{11}\left(n_1^2-n_1+\frac{1}{2}\right)\right.\right.\\&+\tau_{12}(2n_1n_2-n_1-n_2+1)\\&\left.\left.+\tau_{22}\left(n_2^2-n_2+\frac{1}{2}\right)\right]\right\}\\=&0,\end{aligned} \tag{49}$$

此方程组确定了 ω_1^2,ω_2^2,c 和 τ_{12}.表达式(5),(44)($N=2$)和(49)就是(2+1)维 Boussinesq 方程(1)的双周期波解.同样有意思的是,在极限情况下,也可以由周期解得到双孤子解,为此我们引入记号

$$\tilde p_1=2\pi ip_1,\tilde l_1=2\pi il_1,$$
$$\tilde\omega_1=2\pi i\omega_1,\tilde\eta_{01}=2\pi i\eta_{01}+\pi i\tau_{11}, \tag{50}$$
$$\tilde p_2=2\pi ip_2,\tilde l_2=2\pi il_2,$$
$$\tilde\omega_2=2\pi i\omega_2,\tilde\eta_{02}=2\pi i\eta_{02}+\pi i\tau_{22}, \tag{51}$$

则当 $\mathrm{Im}\tau_{11}\to\infty,\mathrm{Im}\tau_{22}\to\infty$ 时有

$$\begin{aligned}f=&1+\exp(2\pi i\eta_1+\pi i\tau_{11})\\&+\exp(-2\pi i\eta_1+\pi i\tau_{11})\\&+\exp(2\pi i\eta_2+\pi i\tau_{22})\\&+\exp(-2\pi i\eta_2+\pi i\tau_{22})+\cdots\\=&1+\exp(\tilde p_1x+\tilde l_1y+\tilde\omega_1t+\tilde\eta_{01})\\&+\exp(\tilde p_2x+\tilde l_2y+\tilde\omega_2t+\tilde\eta_{02}).\end{aligned} \tag{52}$$

这是用双线性变量表示的(2+1)维 Boussinesq 方程(1)的解,通过(5)式,它可以转化为双孤子解

$$u(x,y,t)$$
$$=u_0+2\frac{\tilde p_1^2\exp\tilde\eta_1+\tilde p_2^2\exp\tilde\eta_2+(\tilde p_1-\tilde p_2)^2\exp(\tilde\eta_1+\tilde\eta_2)}{(1+\exp\tilde\eta_1+\exp\tilde\eta_2)^2}, \tag{53}$$

其中

$$\tilde\eta_1=\tilde p_1x+\tilde l_1y+\tilde\omega_1t+\tilde\eta_{01},$$
$$\tilde\eta_2=\tilde p_2x+\tilde l_2y+\tilde\omega_2t+\tilde\eta_{02}.$$

3. 结 论

本文使用的方法具有某种普遍性，利用它不仅可以得到(2+1)维 Boussinesq 方程的周期解，而且也可以得到其他非线性发展方程的周期解. 在极限情况下，它们可以退化为孤子解.

[1] Cao C W, Wu Y T, Geng X G 1999 *J. Math. Phys.* **40** 3948

[2] Cao C W, Geng X G, Wu Y T 1999 *J. Phys.* A **32** 8059

[3] Wu Y Q 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 2629

[4] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[5] Lei Y 1999 *Phys. Lett.* A **260** 55

[6] Fan E G, Zhang H Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 353 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]

[7] Fan E G 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1409 (in Chinese) [范恩贵 2000 物理学报 **49** 1409]

[8] Parkes E J, Duffy B R 1997 *Phys. Lett.* A **229** 217

[9] Fan E G 2000 *Phys. Lett.* A **277** 212

[10] Zhang G X, Li Z B, Duan Y S 2000 *Sci. Chian* A **30** 1103 (in Chinese) [张桂戍、李志斌、段一士 2000 中国科学 A **30** 1103]

[11] Shi Y R, Lü K P, Duan W S, Zhao J B 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2074 (in Chinese) [石玉仁、吕克璞、段文山、赵金宝 2001 物理学报 **50** 2074]

[12] Lü K P, Shi Y R, Duan W S *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 267 (in Chinese) [吕克璞、石玉仁、段文山等 2003 物理学报 **52** 267]

[13] Guo G P, Zhang J F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1159 (in Chinese) [郭冠平、张解放 2002 物理学报 **51** 1159]

[14] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068 (in Chinese) [刘式适、傅遵涛、刘式达、赵 强 2001 物理学报 **50** 2068]

[15] Zeng X, Zhang H Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1476 (in Chinese) [曾 昕、张鸿庆 2005 物理学报 **54** 1476]

[16] Lin M M, Duan W S, Lü K P 2007 *J. Northwe. Norm. Uni.* (Nat. Sci.) **43** (1) 39 (in Chinese) [林麦麦、段文山、吕克璞 2007 西北师范大学学报(自然科学版) **43** (1) 39]

[17] Senthilvelan M 2001 *Comput. Math. Appl.* **123** 381

[18] Allen M A, Rowlands G 1997 *Phys. Lett.* A **235** 145

[19] Chen Y, Yan Z Y, Zhang H Q 2003 *Phys. Lett.* A **307** 107

[20] Matsuno Y 1984 *Bilinear Transformation Method* (Academic Press, Inc.)

[21] Farkas H M, Kra I 1992 *Riemann Surfaces* (Springer-Verlag)

A new periodic wave solution for the (2+1)-dimensional Boussinesq equation*

Wu Yong-Qi†

(*Department of Mathematics*, *Zhanjiang Normal University*, *Zhanjiang* 524048, *China*)

(Received 6 November 2007; revised manuscript received 23 Feburary 2008)

Abstract

The new periodic wave solution for the (2+1)-dimensional Boussinesq equation is presented by using of Hirota method and Riemann theta function, from which the soliton solution can be obtained via an appropriate limited procedure.

Keywords: Hirota method, Riemann theta function, (2+1)-dimensional Boussinesq equation, periodic solution

PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the Doctoral Foundation of the Zhanjiang Normal University (Grant No. ZL0601).

† E-mail: yqwuedu@sina.com