

# 非局域克尔介质中厄米高斯光束传输的变分研究<sup>\*</sup>

白东峰 郭旗<sup>†</sup> 胡巍

(华南师范大学光子信息技术广东省高校重点实验室 广州 510006)

(2007 年 12 月 27 日收到 2008 年 3 月 24 日收到修改稿)

在非局域非线性克尔介质中,通过对介质实对称响应函数的泰勒展开,简化了非局域非线性薛定谔方程所对应的 Lagrange 密度,进而利用变分法对光束的传输问题进行了分析.求出试探解各个参量的演化方程并得到了自聚焦介质中的厄米高斯型光束的精确解析解,当输入功率达到临界功率时,即形成高阶空间光孤子(厄米高斯孤子),其最低阶(基模光孤子)就是高斯孤子.通过数值模拟发现解析解与数值解符合得很好.

关键词:非局域克尔介质,变分法,厄米高斯光束,空间光孤子

PACC: 4265S

## 1. 引言

光束在非线性介质中传输时,受到使其展宽的衍射效应以及使其压缩的非线性效应,当两者达到平衡时,光束的束宽保持不变,形成空间光孤子.由于空间光孤子在全光开关、全光逻辑光路以及全光互连器件等光子信息处理器件上有着广泛的应用前景,因此近年来受到相当大的关注,成为非线性光学领域的研究热点.

非局域空间光孤子是空间光孤子家族中的一种.1997 年, Snyder 和 Mitchell 提出的非局域线性模型<sup>[1]</sup>,极大地降低了孤子问题的复杂程度,进而掀起了研究空间光孤子的热潮<sup>[2]</sup>. Krolikowski 等得到了弱非局域介质中的空间光孤子的精确解析解<sup>[3]</sup>,分析了不同非局域程度的调制不稳定性<sup>[4]</sup>,并讨论了非局域程度对光束的塌陷及相互作用等方面的影响<sup>[5]</sup>; Assanto 小组在向列相液晶中发现了非局域空间光孤子(nematicons)<sup>[6]</sup>; Conti 等从理论<sup>[7,8]</sup>和实验证明,向列相液晶是第一个被发现的具有强非局域性的非线性介质;后来发现铅玻璃也具有强非局域性的非线性介质<sup>[9]</sup>; Guo 等发现了强非局域介质中空间光孤子具有很大的相位改变<sup>[10]</sup>,对非局域孤子的相互作用进行了研究<sup>[11]</sup>,讨论了偏离束腰入射的

光束对非局域光束传输的影响<sup>[12]</sup>,得出了亚强非局域介质中光束的近似解析解<sup>[13]</sup>,求得了高阶孤子<sup>[14,15]</sup>及椭圆空间光孤子<sup>[16]</sup>的解析解,对有损耗介质中光束的传输做了理论上的探讨<sup>[17]</sup>,利用微扰方法得到非局域孤子的解析解<sup>[18]</sup>,在实验上通过改变偏置电压(进而改变预偏角)来控制向列相液晶中孤子的相互作用<sup>[19]</sup>.目前,对孤子的传输特性及相互作用的研究都取得了很大的进展,正是基于这些研究成果,非局域空间光孤子显示出在实现全光开关、全光信息处理上的巨大潜力.

本文从变分法的角度对强非局域克尔介质中高阶光束的传输理论进行了分析.通过对非局域介质中实响应函数的泰勒展开,推导并简化了光束所满足的传输方程对应的 Lagrange 密度,利用瑞利-里兹方法得到光束的各个参量所满足的欧拉方程,进而求得厄米高斯孤子波的精确解析解.

## 2. 非局域非线性介质中光束传输模型的变分表述

在非局域克尔介质中,光束的传输满足非局域非线性薛定谔方程<sup>[10]</sup>

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \mu \nabla_{\perp}^2 \psi$$

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号:10474023 和 10674050)、高等学校博士学科点专项科研基金(批准号:20060574006)和广东省高等学校科技创新团队项目(批准号:06CXTD005)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人, E-mail: guoq@scnu.edu.cn

$$+ \rho \psi \int_{-\infty}^{+\infty} R(\mathbf{r} - \mathbf{r}', z) |\psi(\mathbf{r}', z)|^2 d^D \mathbf{r}' = 0, \quad (1)$$

其中  $\psi(\mathbf{r}, z)$  是傍轴光束,  $\mu = 1/2k$ ,  $\rho = k\eta$  是介质常数,  $\nabla_{\perp}^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , 为横向拉普拉斯算符,  $\eta$  为材料常数 ( $\eta > 0, \eta < 0$  分别表示聚焦或散焦介质),  $k$  是介质中的波数,  $z$  为纵向坐标 (光束的传输轴),  $\mathbf{r}$  是  $D$  维 ( $D=1$  或  $2$ ) 横向空间坐标,  $R(\mathbf{r}, z)$  是介质的实对称响应函数, 满足归一化条件  $\int_{-\infty}^{+\infty} R(\mathbf{r}') d^D \mathbf{r}' = 1$ . 方程 (1) 由最小作用量原理从下面的 Lagrange 密度推出

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{i}{2} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) - \mu \mathcal{A} |\nabla_{\perp} \psi|^2 \\ & + \frac{1}{2} \rho |\psi|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} R(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\psi(\mathbf{r}', z)|^2 d^D \mathbf{r}', \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $*$  表示复共轭 (2) 式所对应的变分方程可写为

$$\delta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A} \psi, \psi^*, \psi_z, \psi_z^*, \psi_x, \psi_x^*, \psi_y, \psi_y^* d^D \mathbf{r} dz = 0. \quad (3)$$

介质的非局域程度为  $\alpha = a/a_m$ ,  $a$  和  $a_m$  分别是光束的宽度和介质的响应函数的特征响应长度.

### 2.1. 1+1 维空间厄米高斯光束的变分解

1+1 维的情况下, 我们假设方程 (1) 具有厄米高斯型的试探解

$$\begin{aligned} \psi(x, z) = & A(z) H_n \left[ \frac{x}{\alpha(z)} \right] \\ & \times \exp \left[ -\frac{x^2}{2\alpha(z)} + i\mathcal{C}(z)x^2 + i\mathcal{C}(z)z \right], \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $A(z)$  和  $\mathcal{C}(z)$  分别是试探解复振幅的幅值和相位,  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} d^n e^{-x^2} / dx^n$  是厄米多项式,  $\alpha(z)$  是光束的束宽,  $\mathcal{C}(z)$  是波前曲率. 此变分问题可以简化为

$$\delta \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_z dz = 0. \quad (5)$$

其中

$$\mathcal{L}_z = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L} dx. \quad (6)$$

将  $R(x-x')$  分两步作泰勒展开, 具体做法如下: 先对  $R(x-x')$  在  $x'=0$  处作展开, 再对展开的各项在  $x=0$  处进一步作泰勒展开, 近似取到二阶,

$$\begin{aligned} R(x-x') \approx & R_0 - (x-x') R^{(1)}(0) \\ & + \frac{1}{2} (x-x')^2 R^{(2)}(0), \end{aligned} \quad (7)$$

上式中  $R_0 = R(0)$ ,  $R^{(1)}(0) = 0$ . 设  $\gamma = -R^{(2)}(0) > 0$ . 方程 (1) 对应的 Lagrange 密度 (2) 式可简化为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{i}{2} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) - \mu \mathcal{A} \left| \frac{d\psi}{dx} \right|^2 \\ & + \frac{1}{2} \rho |\psi|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ R_0 - \frac{1}{2} \gamma (x-x')^2 \right] \\ & \times |\psi(x', z)|^2 d^D x'. \end{aligned} \quad (8)$$

将试探解 (4) 代入 (8) 式并对  $x$  积分得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_z = & -\sqrt{\pi} 2^{n-1} (2n+1) n! A^2 a^2 \frac{dc}{dz} - \sqrt{\pi} 2^n n! A^2 a \frac{d\theta}{dz} \\ & - \sqrt{\pi} 2^n n! \mu A^2 \left[ \frac{2n+1}{2a} + \gamma (2n+1) c^2 a^3 \right] \\ & - \frac{\pi}{2} (2^n) \gamma (n!) \rho A^4 a^2 \left[ R_0 - \frac{(2n+1)}{2} a^2 \gamma \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

运用变分方法的一般步骤, 利用厄米多项式的正交性

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) \exp(-x^2) dx \\ = & \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & m = n. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

由 (9) 式和 (5) 式可得到试探解中各个参量所满足的欧拉方程

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}_z}{\delta A} = 0 \Rightarrow & -(2n+1) a^2 \frac{dc}{dz} - 2 \frac{d\theta}{dz} \\ & - 2\mu \left[ \frac{2n+1}{2a^2} + \gamma (2n+1) c^2 a^2 \right] \\ & + 2^{n+1} n! \sqrt{\pi} \rho R_0 A^2 a \\ & - (2n+1) 2^n n! \sqrt{\pi} \rho \gamma A^2 a^3 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}_z}{\delta a} = 0 \Rightarrow & -\frac{\gamma (2n+1)}{2} a^2 \frac{dc}{dz} - \frac{d\theta}{dz} \\ & - \mu \left[ -\frac{2n+1}{2a^2} + \gamma (2n+1) c^2 a^2 \right] \\ & + 2^n n! \sqrt{\pi} \rho R_0 A^2 a \\ & - \frac{(2n+1)}{2} 2^n n! \sqrt{\pi} \rho \gamma A^2 a^3 (1+A^2) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}_z}{\delta c} = 0 \Rightarrow & -4\sqrt{\pi} (2n+1) 2^n n! \mu c A^2 a^3 \\ & + \frac{d}{dz} \left[ \sqrt{\pi} (2n+1) 2^{n-1} n! A^2 a^3 \right] = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_z}{\delta \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dz} (\sqrt{\pi} 2^n n! A^2 a^3) = 0, \quad (14)$$

由方程 (11)(12)(13)(14) 得到

$$\frac{dc}{dz} = \frac{\mu}{a^4} - 4\mu c^2 - \frac{1}{2}\rho\gamma P_0, \quad (15)$$

$$\frac{d\theta}{dz} = -\frac{(2n+1)\mu}{a^2} - \frac{(2n+1)}{4}\rho\gamma P_0 a^2 + \rho R_0 P_0, \quad (16)$$

$$A^2 a = \frac{P_0}{2^n n \sqrt{\pi}}, \quad (17)$$

$$\frac{da^2}{dz^2} = \frac{4\mu^2}{a^3} - 2\mu\rho\gamma P_0 a, \quad (18)$$

其中  $P_0$  是输入功率,  $P_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, z)|^2 dx =$

$2^n n \sqrt{\pi} A^2 a = 2^n n \sqrt{\pi} A_0^2 a_0$ ,  $A_0$  和  $a_0$  分别是初始振幅和束宽, (17) 式说明光束在传输过程中能量守恒. 令  $y(z) = a(z) a_0$ , 则方程 (18) 可写为

$$\frac{1}{\mu} \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{4\mu}{a_0^4 y^3} + 2\rho\gamma P_0 y = 0, \quad (19)$$

可以将  $y$  和  $z$  分别看作广义坐标, 广义时间, 则方程 (19) 等效于经典力学中的牛顿第二定律<sup>[10]</sup>. 其中  $F = 4\mu(\frac{1}{a_0^4 y^3}) - 2\rho\gamma P_0 y$ .  $F$  的第一项使粒子加速, 即使光束有发散的趋势, 具有衍射效应;  $F$  的第二项使粒子减速, 即使光束有压缩的趋势, 因而具有非线性效应(对于自聚焦材料,  $\eta > 0$ ). 令  $F = 0$ , 此时衍射效应跟非线性效应达到平衡, 假设粒子的初速度  $dy/dz|_{z=0} = \alpha$  (光束从束腰入射), 那么光束的束宽将保持不变, 形成孤子状态, 我们可以得到孤子传输的临界(输入)功率

$$P_c = \frac{2\mu}{\gamma\rho a_0^4} = \frac{1}{\gamma a_0^4 k^2 \eta}. \quad (20)$$

这里的  $P_c$  与材料有关, 不同的材料对应不同的临界功率. 由方程 (15)(16)(18) 解得

$$a^2(z) = a_0^2 [\cos^2(\beta_0 z) + \Lambda \sin^2(\beta_0 z)], \quad (21)$$

$$\alpha(z) = \frac{\beta_0 k (\Lambda - 1) \sin(2\beta_0 z)}{4a_0^2 [\cos^2(\beta_0 z) + \Lambda \sin^2(\beta_0 z)]}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \theta(z) = & -\frac{(2n+1)}{2} \arctan[\sqrt{\Lambda} \tan(\beta_0 z)] \\ & + (2n+1) \left[ \frac{(\Lambda-1)\rho\gamma a_0^2 P_0}{16\beta_0} \sin(2\beta_0 z) \right. \\ & \left. - \frac{(\Lambda-1)\rho\gamma a_0^2 P_0 z}{8} \right] + \rho R_0 P_0 z, \quad (23) \end{aligned}$$

其中  $\Lambda = P_c/P_0$ ,  $\beta_0 = (\gamma\eta P_0)^{1/2}$ . 由前面计算可知, 各式中的  $a(z)$  为基模高斯光束的束宽, 显然它不能表示高阶厄米高斯光束的束宽, 可以定义厄米高斯光束的束宽  $a_n(z)$  为光强降为最大值  $1/e$  的最外侧

点到轴的距离<sup>[20]</sup>, 则  $a_n(z) = \sqrt{2n+1} a(z)$ , 因此介质的非局域程度可以表示为  $\alpha = a_n(z) a_m = \sqrt{2n+1} a(z) a_m$ , 可知随着厄米高斯光束阶数  $n$  的增大, 介质的非局域程度在减小( $\alpha$  增大). 要使解析解接近数值解, 非局域程度必须取较大的值(即  $\alpha$  取较小的值). 当  $n=0$  时,

$$\begin{aligned} \psi(x, z) = & \frac{\sqrt{P_0}}{[\sqrt{\pi} a_0(z)]^{1/2}} \\ & \times \exp\left[-\frac{x^2}{2a_0(z)^2} + i\alpha(z)x^2 + i\theta_0(z)\right], \quad (24) \end{aligned}$$

$a_0(z)$  和  $\theta_0(z)$  分别对应于零阶厄米高斯光束的束宽及复振幅相位. 以上所得到的解析解与文献 [21] 所得到的结果一致. 图 1(a)(b) 是  $n=4$ ,  $n=5$  所对应的厄米高斯孤子传输图, (c)(d) 给出了解析解与数值解的比较图, 发现符合得比较好. 在非局域程度增大时, 解析解与数值模拟符合得非常好(如图 1 的 (e)(f) 所示). 图中采取了归一化坐标  $Z = z/ka_0^2$ ,  $X = x/a_0$ ,  $\Psi = ka_0 \eta^{1/2} \psi$ . 在数值模拟中假设非局域响应函数为高斯型  $R(x) = 1/(\sqrt{2\pi} a_m) \exp(-x^2/2a_m^2)$ . 随着非局域程度的增加, 解析解更加接近数值解. 当  $P_0 < P_c$  (即输入功率小于临界功率) 时, 光束所受到的衍射作用强于非线性作用, 光束先展宽后压缩至初始宽度, 形成呼吸子; 当  $P_0 > P_c$  时, 光束所受到的衍射作用弱于非线性作用, 光束先压缩后展宽至初始宽度, 形成呼吸子. 两种情况下的呼吸子的周期可由 (21) 式求出  $T = \pi/\beta_0 = \pi/(\gamma\eta P_0)^{1/2}$ , 当  $P_0 = P_c$  时,  $a_n(z) = a_n(0)$ , 光束的束宽不再发生变化, 即出现孤子解

$$\begin{aligned} \psi_s(x, z) = & \frac{\exp[i\phi z]}{(2^n n!)^{1/2} \pi^{1/4} a_0^{5/2} (\gamma\eta)^{1/2} k} \\ & \times H_n\left[\frac{x}{a_0}\right] \exp\left[-\frac{x^2}{2a_0^2}\right], \quad (25) \end{aligned}$$

其中  $\phi = R_0/\gamma ka_0^4 - 3(2n+1)\gamma ka_0^2$ . 当  $n=0$  时, 即为最低阶孤子(基模孤子)

$$\psi_0(x, z) = \frac{\exp[i\phi z]}{\pi^{1/4} a_0^{5/2} (\gamma\eta)^{1/2} k} \exp\left[-\frac{x^2}{2a_0^2}\right]. \quad (26)$$

## 2.2. 1+2 维空间厄米高斯光束的变分解

在 1+2 维的空间中, 我们假设方程 (1) 具有厄米高斯型的试探解

$$\psi(x, y, z) = A(z) H_n\left[\frac{x}{a(z)}\right] H_m\left[\frac{y}{a(z)}\right]$$

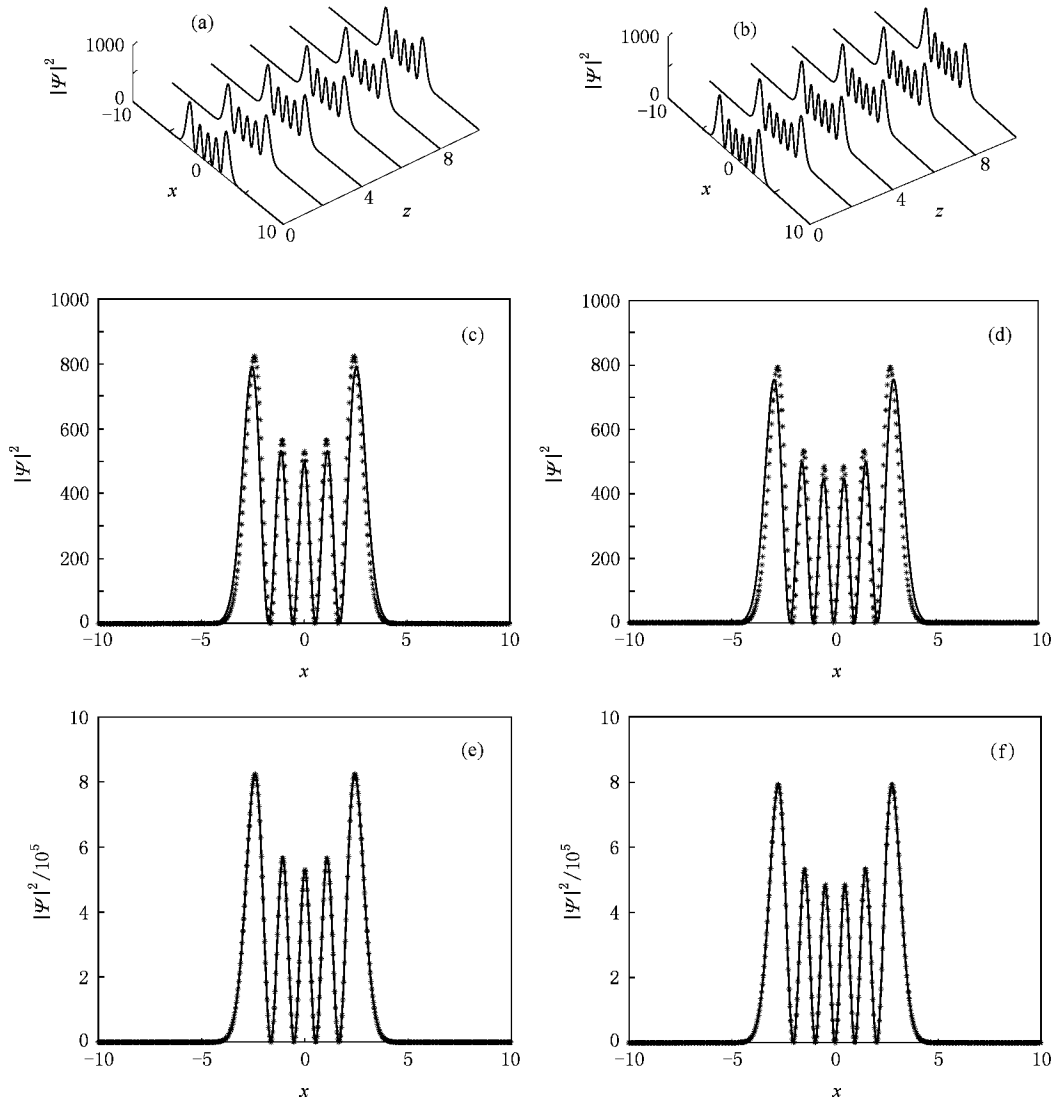


图 1 (1+1) 维不同阶数的厄米高斯孤子传输过程中的归一化强度分布图 (a)–(d) 对应非局域程度  $\alpha=0.1$ , (a)  $n=4$ ; (b)  $n=5$ , (c) (d) 分别对应的是  $n=4, n=5$  时归一化光强的解析解 (实线) 与数值模拟 (星形线) 在  $Z=5$  时的比较图 (e) 和 (f) 对应非局域程度  $\alpha=0.01$ .

$$\times \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2\alpha(z)} + i\alpha(z)\chi(x^2+y^2) + i\alpha(z)\right], \quad (27)$$

介质的响应函数  $R(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=R(x-x',y-y')$ , 先对  $R(x-x',y-y')$  在  $x'=0, y'=0$  处作泰勒展开, 再对展开的各项在  $x=0, y=0$  处进一步作泰勒展开, 近似取到二阶, 得到

$$\begin{aligned} &R(x-x',y-y') \\ &\approx R_0 - \frac{1}{2}(x-x')^2\gamma_x \\ &\quad - \frac{1}{2}(y-y')^2\gamma_y, \end{aligned} \quad (28)$$

式中  $R_0=R(0,0)$ ,  $\gamma_x=-R^{(2,0)}(0,0)$ ,  $\gamma_y=-$

$R^{(0,2)}(0,0)$  假设响应函数是圆对称的, 则  $\gamma_x=\gamma_y=\gamma$ . 方程 (1) 对应的 Lagrange 密度 (2) 可以简化为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &\frac{i}{2}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial z}\right) - \mu |\nabla_{\perp} \psi|^2 \\ &+ \frac{1}{2} \rho |\psi|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ R_0 - \frac{1}{2} \chi(x-x')^2 - \frac{1}{2} \chi(y-y')^2 \right] \\ &\times |\psi(x',y',z)|^2 dx' dy'. \end{aligned} \quad (29)$$

将试探解 (27) 代入 (29) 式并对  $x, y$  积分得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_z = &-2^{n+m} n! m! A^2 \pi \left[ (n+m+1) a^4 \frac{dc}{dz} + a^2 \frac{d\theta}{dz} \right] \\ &- 2^{n+m} n! m! (n+m+1) \mu A^2 \pi (1+4c^2 a^4) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \pi^2 2^{\alpha_{n+m}} (n!m!)^2 \rho A^4 [R_0 a^4 - (n+m+1)\gamma a^6]. \quad (30)$$

由(30)式和(5)式可得到试探解中各个参量所满足的欧拉方程,进而求得各个参量的具体表达式,

$$a^2(z) = a_0^2 [\cos^2(\beta_0 z) + \Lambda \sin^2(\beta_0 z)], \quad (31)$$

$$\alpha(z) = \frac{\beta_0 k(\Lambda - 1) \sin(2\beta_0 z)}{4a_0^2 [\cos^2(\beta_0 z) + \Lambda \sin^2(\beta_0 z)]}, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \theta(z) = & -(n+m+1) \arctan[\sqrt{\Lambda} \tan(\beta_0 z)] \\ & + (n+m+1) \left[ \frac{(\Lambda - 1)\rho\gamma a_0^2 P_0 \sin(2\beta_0 z)}{8\beta_0} \right. \\ & \left. - \frac{(\Lambda + 1)\rho\gamma a_0^2 P_0}{4} \right] + \rho R_0 P_0 z. \quad (33) \end{aligned}$$

其中,  $P_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, y, z)|^2 dx dy = 2^{n+m} n!m! \times \pi A^2(z) a^2(z) = 2^{n+m} n!m! \pi A_0^2 a_0^2$ . 把(31), (32), (33)式代入试探解(27)可得到光束的具体表达式. 当输入功率等于临界功率即  $\Lambda = 1$  时可形成(1+2)维的厄米高斯孤子. 由前面的计算可知(1+1)维

和(1+2)维情况下厄米高斯光束的束宽  $a(z)$  及相前曲率  $\alpha(z)$  的表达式是一样的, 复振幅的幅值  $A(z)$  和相位  $\theta(z)$  的表达式有所不同.

### 3. 结 论

本文研究了在非局域非线性克尔介质中(1+1)维和(1+2)维厄米高斯光束的传输问题, 通过对介质实对称响应函数的泰勒展开, 大大地简化了非局域非线性薛定谔方程所对应的拉格朗日密度, 利用变分法对光束的传输问题进行了分析. 我们设试探解为厄米高斯函数, 求出了试探解中各个参量的演化方程, 通过求解这些方程, 得到了自聚焦介质中的厄米高斯型孤子波的精确解析解, 当输入功率达到临界功率时, 即形成高阶空间光孤子(厄米高斯孤子), 其最低阶(基模光孤子)就是高斯孤子. 通过与数值模拟的结果比较, 发现解析解与数值解符合得比较一致. 随着非局域程度的增加, 解析解更加接近数值解.

- [1] Snyder A W, Mitchell D J 1997 *Science* **276** 1538
- [2] Shen Y R 1997 *Science* **276** 1520
- [3] Krolikowski W, Bang O 2000 *Phys. Rev. E* **63** 016610
- [4] Krolikowski W, Bang O, Rasmussen J J 2001 *Phys. Rev. E* **64** 016612
- [5] Krolikowski W, Bang O, Nikolov N I *et al* 2004 *J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt.* **6** S288
- [6] Assanto G, Peccianti M, Conti C 2003 *Optics Photon. News* **45** 44
- [7] Conti C, Peccianti M, Assanto G 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 073901
- [8] Conti C, Peccianti M, Assanto G 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 113902
- [9] Rotschild C, Cohen O, Manela O *et al* 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 213904
- [10] Guo Q, Luo B, Yi F H *et al* 2004 *Phys. Rev. E* **69** 016602
- [11] Xie Y Q, Guo Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3020 (in Chinese) [谢逸群、郭旗 2004 物理学报 **53** 3020]
- [12] Guo Q, Xu C B 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3025 (in Chinese) [郭旗、许超彬 2004 物理学报 **53** 3025]
- [13] Guo Q, Luo B, Chi S 2006 *Opt. Commun.* **259** 336
- [14] Zhang X P, Guo Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3178 (in Chinese) [张霞萍、郭旗 2005 物理学报 **54** 3178]
- [15] Zhang X P, Guo Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5189 (in Chinese) [张霞萍、郭旗 2005 物理学报 **54** 5189]
- [16] Qin X J, Guo Q, Hu W *et al* 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1237 (in Chinese) [秦晓娟、郭旗、胡巍等 2006 物理学报 **55** 1237]
- [17] Huang Y, Guo Q, Cao J N 2006 *Opt. Commun.* **261** 175
- [18] Ouyang S G, Guo Q, Hu W 2006 *Phys. Rev. E* **74** 036622
- [19] Hu W, Zhang T, Guo Q 2006 *Applied Phys. Lett.* **89** 071111
- [20] Lu Y X, Yu X C, Zhang X X 2005 *Laser Physics* (Beijing: Beijing University of Posts and Telecommunications Press) p21 (in Chinese) [卢亚雄、余学才、张晓霞 2005 激光物理(北京:北京邮电大学出版社)第21页]
- [21] Deng D M, Zhao X, Guo Q *et al* 2007 *J. Opt. Soc. Am. B* **24** 2537

# Variational investigation of Hermite-Gaussian beam propagation in nonlocal Kerr media<sup>\*</sup>

Bai Dong-Feng Guo Qi<sup>†</sup> Hu Wei

( *Laboratory of Photonic Information Technology, South China Normal University, Guangzhou 510006, China* )

( Received 27 December 2007 ; revised manuscript received 24 March 2008 )

## Abstract

The reduced Lagrange density of nonlocal nonlinear Schrödinger equation ( NNLSE ) is obtained by expanding the real symmetric response function in Taylor 's series in strongly nonlocal Kerr media. The problem of higher-order beam propagation can be analyzed by a variational approach , the equations are obtained for the evolution during propagation of the parameters of the trial solution and exact analytical Hermite-Gaussian ( HG ) solutions are found. HG solitons are formed when the input power is equal to the critical power. We demonstrated that the analytical HG solutions are in good agreement with the numerical simulations in the case of strong nonlocality.

**Keywords** : nonlocal Kerr media , variational approach , Hermite-Gaussian beam , spatial solitons

**PACC** : 4265S

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 10474023 and 10674050 ), the Doctoral Program of Institution or Higher Education of China ( Grant No. 20060574006 ) and the Program for Innovative Research Team of the Higher Education in Guangdong ( Grant No. 06CXTD005 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : guoq@sncu.edu.cn