第 58 卷 第 1 期 2009 年 1 月
1000-3290/2009/58(01)/0016-06
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.58, No.1, January, 2009

Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程的 Lie 对称性与守恒量*

贾利群[1)†] 崔金超[1)] 张耀宇[2)] 罗绍凯[3)]

1)(江南大学理学院,无锡 214122)

2)(平顶山学院电气信息工程学院,平顶山 467002)

3)(浙江理工大学数学力学与数学物理研究所,杭州 310018)

(2007 年 10 月 20 日收到;2008 年 6 月 12 日收到修改稿)

研究 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程的 Lie 对称性和 Lie 对称性直接导致的守恒量.分析 Lagrange 函数和 A 函数的关系,讨论 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程的 Lie 对称性导致的守恒量的一般研究方法;在群的无限小变换下,给出 Appell 方程 Lie 对称性的定义和判据,得到 Lie 对称性的结构方程以及 Lie 对称性直接导致的守恒量的表达式.举例说明结果的应用.

关键词:Appell 方程, Chetaev 型约束力学系统, Lie 对称性, 守恒量

PACC:0320

1. 引 言

1899 年,Gibbs 找到一种研究力学系统运动的新方法[1].同年,Appell 由这种方法出发,得到了 Appell 方程[2].现在 Appell 方程已在分析力学理论中占据重要地位,发展成为分析力学理论中三大力学体系(Lagrange 体系、Nielsen 体系和 Appell 体系)之一[3].

1918 年,Noether 揭示了对称性与守恒量之间的潜在关系[4].但是,直到 20 世纪 70 年代,对称性与守恒量的研究才在分析力学领域飞速发展,现已取得许多成果[5—18].

然而,Appell 方程对称性与守恒量的研究却进展缓慢.近年来,为寻找 Appell 方程的求解途径,Mei 首先由形式不变性(即 Mei 对称性)通过 Noether 对称性间接得到了 Noether 守恒量[19];李仁杰和乔永芬等人由形式不变性通过 Noether 对称性间接得到了变质量完整系统的守恒量[20];罗绍凯由形式不变性分别通过 Noether 对称性和 Lie 对称性间接得到转动相对论完整系统 Appell 方程的守恒量[21],罗绍凯还由形式不变性通过 Lie 对称性间接得到了一般完整系统的守恒量[22];文献[23]研究了用 Appell 函数表示的 Appell 方程 Mei 对称性的结构方程和 Mei 守恒量.

本文研究 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程的 Lie 对称性和由 Lie 对称性导致的 Lie 守恒量.首先,建立 Chetaev 型约束力学系统的 Appell 方程和系统的运动微分方程;其次,利用 Appell 方程和 Lagrange 方程的等价性,分析 Lagrange 函数和 A 函数的关系,由 A 函数通过简单运算得到 Lagrange 函数(该方法比文献[19]利用 Santilli 理论[24]要方便),进而讨论 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程的 Lie 对称性导致的守恒量的一般研究方法;第三,在群的无限小变换下,定义系统的 Lie 对称性、弱 Lie 对称性和强 Lie 对称性,并得到相应的判据方程;第四,得到 Lie 对称性的结构方程以及 Lie 对称性直接导致的守恒量的表达式.最后,给出一个算例,并对本文结论进行讨论.

2. Chetaev 型约束力学系统的 Appell 方程

假设 Chetaev 型约束力学系统由 N 个质点组成,其中第 i 个质点的质量和位矢分别为 m_i, $\boldsymbol{r}_i$,系

* 国家自然科学基金(批准号:10572021)和江南大学预研基金(批准号:2008LYY011)资助的课题.

† E-mail:jlq0000@163.com

统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 确定，系统所受的 g 个理想 Chetaev 型的非完整约束方程、约束对虚位移的限制条件和加速度能量分别为

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0\quad(\beta=1,2,\cdots,g),\tag{1}$$

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot q_s}\delta q_s=0\quad(\beta=1,2,\cdots,g),\tag{2}$$

$$S=S(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})=\frac{1}{2}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i^2,\tag{3}$$

(2)式、(3)式以及下文均采用 Einstein 求和约定．系统的 Appell 方程可表示为

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial\ddot q_s}&=Q_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot q_s}\\&=Q_s'+Q_s''+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot q_s}\\&\qquad(s=1,2,\cdots,n),\end{aligned}\tag{4}$$

其中

$$Q_s=Q_s'+Q_s''\quad(s=1,2,\cdots,n).\tag{5}$$

λ_β 为与第 β 个约束所对应的约束乘子，$Q_s'=Q_s'(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$，$Q''_s=Q''_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 和 $Q_s=Q_s(t,q,\dot q)$ 分别为与第 s 个广义坐标 q_s 对应的广义约束力、广义有势力、广义非势力和广义力．令

$$A=A(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})=S-\ddot q_sQ_s',\tag{6}$$

称之为 A 函数．由(4)式和(6)式，可将系统的 Appell 方程改写为

$$\frac{\partial A}{\partial\ddot q_s}=\frac{\partial S}{\partial\ddot q_s}-Q_s'=Q_s''+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot q_s}\quad(s=1,2,\cdots,n).\tag{7}$$

利用微分运算规则，由(3)式可直接算得[22]

$$\frac{\partial S}{\partial\ddot q_s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot q_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s},\tag{8}$$

将方程(8)代入方程(7)，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial\ddot q_s}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot q_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}\\&=Q_s''+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot q_s}\quad(s=1,2,\cdots,n).\end{aligned}\tag{9}$$

假设系统非奇异，即 $\det\left(\dfrac{\partial^2L}{\partial\dot q_s\partial\dot q_k}\right)\neq0$，则在运动微分方程积分之前，可由方程(1)，(9)求出约束乘子 $\lambda_\beta=\lambda_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$．令

$$\Lambda_s=\Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot q_s}\quad(s=1,2,\cdots,n),\tag{10}$$

Λ_s 为与第 s 个广义坐标 q_s 对应的广义约束力．于是，有

$$\frac{\partial A}{\partial\ddot q_s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot q_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=\Gamma_s\quad(s=1,2,\cdots,n),\tag{11}$$

其中

$$\Gamma_s=\Gamma_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=Q_s''+\Lambda_s\quad(s=1,2,\cdots,n)\tag{12}$$

称为与第 s 个广义坐标 q_s 对应的广义非势合力．方程(11)称为与 Chetaev 型约束力学系统((1)，(9))相应的完整系统的 Appell 方程．如果系统的初始条件满足方程(1)，那么方程(11)的解就给出 Chetaev 型约束力学系统((1)，(9))的运动．利用(11)式可求出 Appell 方程与 Lagrange 方程所共同具有的全部广义加速度——系统的运动微分方程

$$\ddot q_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\quad(s=1,2,\cdots,n).\tag{13}$$

方程(13)表明，由 Appell 方程与 Lagrange 方程所得到的系统的运动微分方程完全相同．

3．Lagrange 函数与 A 函数的关系

一般情况下，Lagrange 函数表述为如下形式：

$$L=a_{ij}(t,\boldsymbol{q})\dot q_i\dot q_j+b_i(t,\boldsymbol{q})\dot q_i+c(t,\boldsymbol{q}),\tag{14}$$

其中，第一项对应于动能，后两项与广义势能函数对应．利用方程(11)中的 $\dfrac{\partial A}{\partial\ddot q_s}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial\dot q_s}-\dfrac{\partial L}{\partial q_s}$ 可求出 Lagrange 函数与 A 函数的关系．作如下运算：

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial\ddot q_s}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot q_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}\\&=\dot a_{sj}\dot q_j+a_{sj}\ddot q_j+\dot b_s\\&\quad-\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_s}\dot q_i\dot q_j-\frac{\partial b_i}{\partial q_s}\dot q_i-\frac{\partial c}{\partial q_s},\end{aligned}$$

适当调整脚标，可得

$$\begin{aligned}A&=\dot a_{ij}\dot q_j\ddot q_i+a_{ij}\ddot q_j\ddot q_i+\dot b_i\ddot q_i\\&\quad-\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_s}\dot q_i\dot q_j\ddot q_s-\frac{\partial b_i}{\partial q_s}\dot q_i\ddot q_s\\&\quad-\frac{\partial c}{\partial q_s}\ddot q_s+d(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}).\end{aligned}\tag{15}$$

显然，如果已知 Lagrange 函数 L，便可由此求出 A 函数．反之亦然．由(14)，(15)式可知，(15)式中的

$d(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 与 Lagrange 函数 L 无关.

在 Lagrange 函数为动势结构的情况,即 $b_i = 0$, $a_{ij} = 0(i \neq j)$,若设 $a_{ss} = \text{const}(i = j = s)$, $d = 0$,则有

$$L = a_{ss}\dot{q}_s^2 + c(t, \boldsymbol{q}), \tag{16}$$

$$A = a_{ss}\ddot{q}_s^2 - \frac{\partial c(t, \boldsymbol{q})}{\partial q_s}\ddot{q}_s, \tag{17}$$

其中 c 对应于势能,它不能仅为时间 t 的函数.

4. Appell 方程 Lie 对称性导致的守恒量的一般研究方法

方程(11)表明,Chetaev 型约束力学系统的 Appell 方程与 Chetaev 型约束力学系统的 Lagrange 方程等价.因此,只需给出 Appell 方程(11)Lie 对称性的定义并找到其判据方程,再利用(14),(15)式,将 Chetaev 型非完整约束的 Lagrange 系统 Lie 对称性的结构方程和 Lie 对称性导致的守恒量表达式中的 Lagrange 函数 L 用由(15)式决定的 $a_{ij}(t, \boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j + b_i(t, \boldsymbol{q})\dot{q}_i + c(t, \boldsymbol{q})$ 代替,即可得到 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程(11)的 Lie 对称性的结构方程和 Lie 对称性导致的守恒量的表达式.

5. Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程的 Lie 对称性

引入时间和广义坐标的无限小变换

$$t^* = t + \Delta t, q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s$$
$$(s = 1,2,\cdots,n), \tag{18}$$

或其展开式

$$t^* = t + \varepsilon\xi_0(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}),$$
$$q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$$
$$(s = 1,2,\cdots,n), \tag{19}$$

其中,ε 为无限小参数,ξ_0, ξ_s 为无限小变换生成元.引进无限小变换生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{20}$$

以及它的一次扩展和二次扩展

$$\tilde{X}^{(1)} = X^{(0)} + \left(\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_s}{\mathrm{d}t} - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s},$$

$$\tilde{X}^{(2)} = \tilde{X}^{(1)} + \left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_s}{\mathrm{d}t} - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right) - \ddot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right]\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}, \tag{21}$$

其中函数对时间 t 的全导数采用沿系统运动轨道曲线的方式,有

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \alpha_s\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \tag{22}$$

定义 1 如果 Appell 方程(11)经无限小变换(19)变换后,其形式保持不变,即

$$\frac{\partial A^*}{\partial \ddot{q}_s} = \Lambda_s^* \quad (s = 1,2,\cdots,n), \tag{23}$$

则这种对称性称为与 Chetaev 型约束力学系统((1),(9))相应的完整力学系统 Appell 方程(11)的 Lie 对称性.

定义 2 如果 Appell 方程(11)经无限小变换(19)变换后,其形式保持不变,并且 Chetaev 型非完整约束方程(1)的形式也保持不变,即

$$f_\beta^* = f_\beta\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) = 0$$
$$(\beta = 1,2,\cdots,g), \tag{24}$$

和方程(23)同时成立,则这种对称性称为与 Chetaev 型约束力学系统((1),(9))相应的完整力学系统 Appell 方程(11)的弱 Lie 对称性.

容易证明,约束方程(1)加在虚位移 δq_s 上的条件方程(2)可改写为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = 0$$
$$(\beta = 1,2,\cdots,g; s = 1,2,\cdots,n), \tag{25}$$

方程(25)称为附加限制方程.

定义 3 如果 Appell 方程(11)和 Chetaev 型非完整约束方程(1)经无限小变换(19)变换后,其形式都保持不变,并要求无限小变换生成元 ξ_0, ξ_s 满足附加限制方程(25),则这种对称性称为与 Chetaev 型约束力学系统((1),(9))相应的完整力学系统 Appell 方程(11)的强 Lie 对称性.

6. Lie 对称性的判据

Lie 对称性是微分方程在群的无限小变换(19)下的一种不变性.方程(11)和(13)的 Lie 对称性判据方程分别为[25]

$$\tilde{X}^{(2)}\left(\frac{\partial A}{\partial \ddot{q}_s}\right) = \tilde{X}^{(1)}(\Gamma_s), \tag{26}$$

$$\ddot{\xi}_s - \dot{q}_s\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\alpha_s = \frac{\partial\alpha_s}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial\alpha_s}{\partial q_k}\xi_k + \frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_k}(\dot{\xi}_k - \dot{q}_k\dot{\xi}_0). \tag{27}$$

方程(26),(27)等价[25]. Chetaev 型非完整约束方程(1)在变换(19)下的不变性,可归结为如下约束限制方程:

$$\tilde{X}^{(1)}[f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})] = 0. \tag{28}$$

于是,有

判据 1　对于与 Chetaev 型约束力学系统((1),(9))相应的完整系统的 Appell 方程(11),如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 使判据方程(26)(或(27))成立,则 Appell 方程(11)在无限小变换(19)下的不变性,称为 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程(11)的 Lie 对称性.

判据 2　对于与 Chetaev 型约束力学系统((1),(9))相应的完整系统的 Appell 方程(11),如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 使判据方程(26)(或(27))和约束限制方程(28)成立,则 Appell 方程(11)在无限小变换(19)下的不变性,称为 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程(11)的弱 Lie 对称性.

判据 3　对于与 Chetaev 型约束力学系统((1),(9))相应的完整系统的 Appell 方程(11),如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 使附加限制方程(25)、判据方程(26)(或(27))和约束限制方程(28)成立,则 Appell 方程(11)在无限小变换(19)下的不变性,称为 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程(11)的强 Lie 对称性.

7. 系统 Appell 方程 Lie 对称性的结构方程和 Lie 对称性导致的守恒量

与 Noether 对称性不同,Lie 对称性不一定导致守恒量.根据 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程和 Lagrange 方程的等价性,以及 Chetaev 型约束力学系统 Lagrange 方程的 Lie 对称性理论,可给出 Lie 对称性导致守恒量的条件和守恒量表达式的如下命题[26].

命题　如果与 Chetaev 型约束力学系统((1),(9))相应的完整系统的 Appell 方程(11)的 Lie 对称性、弱 Lie 对称性和强 Lie 对称性的生成元 ξ_0,ξ_s 以及规范函数 $G = G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下结构方程

$$\begin{aligned}&[a_{ij}(t,\boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j + b_i(t,\boldsymbol{q})\dot{q}_i + c(t,\boldsymbol{q})]\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\\&+\tilde{X}^{(1)}[a_{ij}(t,\boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j + b_i(t,\boldsymbol{q})\dot{q}_i + c(t,\boldsymbol{q})]\\&+\Gamma_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\bar{\mathrm{d}}G}{\mathrm{d}t} = 0,\end{aligned} \tag{29}$$

则与 Chetaev 型约束力学系统((1),(9))相应的完整系统的 Appell 方程(11)的 Lie 对称性、弱 Lie 对称性和强 Lie 对称性导致的 Lie 守恒量为

$$\begin{aligned}I &= [a_{ij}(t,\boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j + b_i(t,\boldsymbol{q})\dot{q}_i + c(t,\boldsymbol{q})]\xi_0\\&+\frac{\partial[a_{ij}(t,\boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j + b_i(t,\boldsymbol{q})\dot{q}_i + c(t,\boldsymbol{q})]}{\partial\dot{q}_s}\\&\times(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G\\&= \mathrm{const}.\end{aligned} \tag{30}$$

在 Lagrange 函数为动势结构的情况下,即 $b_i = 0, a_{ij} = 0(i \neq j)$,若设 $a_{ss} = \mathrm{const}(i = j = s)$,注意到(16)式,则结构方程(29)和守恒量(30)式变为

$$\begin{aligned}&[a_{ss}\dot{q}_s^2 + c(t,\boldsymbol{q})]\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\\&+\{\tilde{X}^{(1)}[a_{ss}\dot{q}_s^2 + c(t,\boldsymbol{q})]\}\\&+\Gamma_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\bar{\mathrm{d}}G_M}{\mathrm{d}t} = 0,\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}I_{\mathrm{M}} &= [a_{ss}\dot{q}_s^2 + c(t,\boldsymbol{q})]\xi_0 + \frac{\partial[a_{ss}\dot{q}_s^2 + c(t,\boldsymbol{q})]}{\partial\dot{q}_s}\\&\times(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G\\&= \mathrm{const}.\end{aligned} \tag{32}$$

8. 算　　例

Chetaev 型约束力学系统的加速度能量、约束方程、有势广义力和非势广义力分别为

$$S = \frac{1}{2}m(\ddot{q}_1^2 + \ddot{q}_2^2 + \ddot{q}_3^2), \tag{33}$$

$$f = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - q_3^2 = 0, \tag{34}$$

$$\begin{aligned}&Q'_3 = -mg,\\&Q'_1 = Q'_2 = Q''_1 = Q''_2 = Q''_3 = 0.\end{aligned} \tag{35}$$

(34)式中 m,g 为常量.是研究系统 Appell 方程的 Lie 对称性和 Lie 对称性导致的守恒量.

由(6)式、(33)式和(35)式可得

$$A = \frac{1}{2}m(\ddot{q}_1^2 + \ddot{q}_2^2 + \ddot{q}_3^2) + mg\ddot{q}_3, \tag{36}$$

由(16)和(17)式可得

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - mgq_3. \tag{37}$$

由方程(7)和(34)以及(10)和(36)式可得

$$\frac{\partial A}{\partial\ddot{q}_1} = m\ddot{q}_1 = \Lambda_1 = 2\lambda\dot{q}_1,$$

$$\frac{\partial A}{\partial \ddot{q}_2} = m\ddot{q}_2 = \Lambda_2 = 2\lambda \dot{q}_2,$$

$$\frac{\partial A}{\partial \ddot{q}_3} = m\ddot{q}_3 = -mg + \Lambda_3 = -mg - 2\lambda \dot{q}_3. \tag{38}$$

由方程(34)和(38)可得

$$\lambda = -\frac{mg\dot{q}_3}{2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)} = -\frac{mg}{4\dot{q}_3}, \tag{39}$$

(39)式代入方程(38)可得

$$m\ddot{q}_1 = \Lambda_1 = -\frac{mg\dot{q}_1}{2\dot{q}_3},$$

$$m\ddot{q}_2 = \Lambda_2 = -\frac{mg\dot{q}_2}{2\dot{q}_3},$$

$$m\ddot{q}_3 = -mg + \Lambda_3 = -\frac{mg}{2}. \tag{40}$$

最后,研究 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程的 Lie 对称性和 Lie 对称性导致的守恒量.判据方程(27)给出

$$\ddot{\xi}_1 - \dot{q}_1\ddot{\xi}_0 + \dot{\xi}_0 \frac{g\dot{q}_1}{\dot{q}_3}$$

$$= -(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0)\frac{g}{2\dot{q}_3} + (\dot{\xi}_3 - \dot{q}_3\dot{\xi}_0)\frac{g\dot{q}_1}{2\dot{q}_3^2},$$

$$\ddot{\xi}_2 - \dot{q}_2\ddot{\xi}_0 + \dot{\xi}_0 \frac{g\dot{q}_2}{\dot{q}_3}$$

$$= -(\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0)\frac{g}{2\dot{q}_3} + (\dot{\xi}_3 - \dot{q}_3\dot{\xi}_0)\frac{g\dot{q}_2}{2\dot{q}_3^2},$$

$$\ddot{\xi}_3 - \dot{q}_3\ddot{\xi}_0 + \dot{\xi}_0 g = 0. \tag{41}$$

方程(41)有如下两组解:

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0, X_1^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t}; \tag{42}$$

$$\xi_0 = \xi_1 = \xi_2 = 0, \xi_3 = 1, X_2^{(0)} = \frac{\partial}{\partial q_3}. \tag{43}$$

这两组无限小变换生成元对应于方程(40)的 Lie 对称性,即对应于与 Chetaev 型约束力学系统相应的完整力学系统的 Lie 对称性.约束限制方程(28)给出

$$(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0)\dot{q}_1 + (\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0)\dot{q}_2 - (\dot{\xi}_3 - \dot{q}_3\dot{\xi}_0)\dot{q}_3 = 0. \tag{44}$$

可以验证(42),(43)式这两组无限小变换生成元满足方程(44),因此,它们还对应于方程(40)的弱 Lie 对称性.附加限制方程(25)给出

$$(\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0)\dot{q}_1 + (\xi_2 - \dot{q}_2\xi_0)\dot{q}_2 - (\xi_3 - \dot{q}_3\xi_0)\dot{q}_3 = 0. \tag{45}$$

可以验证,无限小变换生成元(42)满足方程(45),但无限小变换生成元(43)不满足方程(45).因此,无限小变换生成元(42)还对应于方程(40)的强 Lie 对称性.

由结构方程(29),可分别求出无限小变换生成元(42)和(43)对应的规范函数

$$G_1 = 0, \tag{46}$$

$$G_2 = \frac{1}{2}mgt. \tag{47}$$

将(42),(46)和(43),(47)分别代入(30)式,可分别得到守恒量

$$I_1 = -\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + mgq_3 = \text{const},$$

$$I_2 = m\dot{q}_3 + \frac{1}{2}mgt = \text{const}. \tag{48}$$

I_1 是 Lie 对称性守恒量,又是弱 Lie 对称性守恒量,同时还是强 Lie 对称性守恒量;I_2 仅是 Lie 对称性守恒量和弱 Lie 对称性守恒量.

9. 结 论

在本文中,如果非势广义力 $Q_s' = 0$,Chetaev 型约束力学系统的 Appell 方程问题就退化为 Chetaev 型约束的保守系统 Appell 方程问题 如果 $Q'_s = 0$,$f_\beta = f_\beta(t, \boldsymbol{q}) = 0$,Chetaev 型约束力学系统的 Appell 方程问题就退化为完整约束的保守系统 Appell 方程问题.显然,本文结论对这两种情况依然成立,因此本文结论具有较普遍的意义.

[1] Gibbs J W 1899 *Amer. J. Math.* **2** 49

[2] Appell P 1899 *C. R. Acad. Sc. Paris* **129** 317

[3] Mei F X 1985 *Foundations of mechanics of nonholonomic systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) p214 (inChinese) [梅凤翔 1985 非完整力学基础(北京 北京工业学院出版社) p214]

[4] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys.* **KI** 235

[5] Santilli R M 1978 *Foundations of Theoretical Mechanics* I (New York: Springer Verlay) p141

[6] Vujanović B 1986 *Acta Mech.* **65** 63

[7] Mei F X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1207 (in Chinese) [梅凤翔 2000

物理学报 49 1207]
[8] Li Y C, Zhang Y, Liang J H, Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 376
[9] Zhang H B 2002 *Chin. Phys.* **11** 765
[10] Zhang Y, Mei F X 2003 *Chin. Phys.* **12** 1058
[11] Fang J H, Liao Y P, Peng Y 2004 *Chin. Phys.* **13** 1620
[12] Chen X W, Li Y M 2005 *Chin. Phys.* **14** 663
[13] Fu J L, Chen L Q, Chen X W 2006 *Chin. Phys.* **15** 8
[14] Zheng S W, Jia L Q, Yu H S 2006 *Chin. Phys.* **15** 1399
[15] Jia L Q, Zheng S W 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3829 (in Chinese) [贾利群、郑世旺 2006 物理学报 **55** 3829]
[16] Ge W K 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1 (in Chinese) [葛伟宽 2007 物理学报 **56** 1]
[17] Jia L Q, Zhang Y Y, Zheng S W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 649 (in Chinese) [贾利群、张耀宇、郑世旺 2007 物理学报 **56** 649]
[18] Jia L Q, Zheng S W, Zhang Y Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5575 (in Chinese) [贾利群、郑世旺、张耀宇 2007 物理学报 **56** 5575]
[19] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177
[20] Li R J, QiaoY F, Meng J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1 (in Chinese) [李仁杰、乔永芬、孟　军 2002 物理学报 **51** 1]
[21] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]
[22] Luo S K 2002 *J. Changsha Univ.* **16** 1 (in Chinese) [罗绍凯 2002 长沙大学学报 **16** 1]
[23] Jia L Q, Xie J F, Zheng S W 2008 *Chin. Phys.* B **17** 17
[24] Santilli R M 1978 *Foundations of Theoretical Mechanics* I (New York: Springer-Verlag) p141
[25] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) p264 (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量(北京 北京理工大学出版社) p264]
[26] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京 科学出版社)]

Lie symmetry and conserved quantity of Appell equation for a Chetaev's type constrained mechanical system*

Jia Li-Qun[1)†]　Cui Jin-Chao[1)]　Zhang Yao-Yu[2)]　Luo Shao-Kai[3)]

1) (*School of Science, Jiangnan University, Wuxi* 214122, *China*)

2) (*Electric and Information Engineering College, Pingdingshan University, Pingdingshan* 467002, *China*)

3) (*Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou* 310018, *China*)

(Received 20 October 2007; revised manuscript 12 June 2008)

Abstract

Lie symmetry of Appell equation and conserved quantity deduced directly by Lie symmetry for a Chetaev's type constrained mechanical system are investigated. The relations between Lagrange function and A function are analyzed. A general approach of studying conserved quantity deduced by Lie symmetry of Appell equation for a Chetaev's type constrained mechanical system is discussed. The definition and the criterion of Lie symmetry of Appell equations under the infinitesimal transformations of groups are given. The structural equation of Lie symmetry and the expression of conserved quantity deduced directly by Lie symmetry are obtained. An example is given to illustrate the application of the results.

Keywords: Appell equation, Chetaev's type constrained mechanical system, Lie symmetry, conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No 10572021) and the Pre-Research Foundation of Jiangnan University (Grant No. 2008LYY011).

† E-mail: jlq0000@163.com