第 58 卷 第 1 期 2009 年 1 月
1000-3290/2009/58(01)/0022-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.1,January,2009

一般完整系统 Mei 对称性的共形不变性与守恒量*

蔡建乐†

(杭州师范大学理学院,杭州 310018)

(2008 年 4 月 8 日收到;2008 年 7 月 2 日收到修改稿)

研究一般完整系统 Mei 对称性的共形不变性与守恒量.引入无限小单参数变换群及其生成元向量,定义一般完整系统动力学方程的 Mei 对称性共形不变性,借助 Euler 算子导出 Mei 对称性共形不变性的相关条件,给出其确定方程.讨论共形不变性与 Noether 对称性、Lie 对称性以及 Mei 对称性之间的关系.利用规范函数满足的结构方程得到系统相应的守恒量.举例说明结果的应用.

关键词:一般完整系统,Mei 对称性,共形不变性,守恒量

PACC:0320

1.引　言

对称性原理是物理学中更高层次的法则,用对称性理论来研究力学系统的守恒量是近代数学、力学和物理学科的一个发展方向.1918 年,Noether 研究 Hamilton 作用量泛函在时空群的无限小变换作用下的不变性时,揭示了力学系统守恒量与对称性之间的关系,提出了著名的 Noether 定理[1,2].近年来,动力学系统的 Noether 对称性、Lie 对称性和 Mei 对称性及其守恒量的研究备受人们关注,已经成为一个热门的研究领域,取得了一系列重要成果[3—18].梅凤翔提出的 Mei 对称性,受到学术界的重视,被迅速拓展到各类力学系统[19—26].

寻求力学系统的对称性,也就是寻求力学系统动力学方程共形不变所对应的独立或非独立变量的变换集.Galiullin 等人研究了 Birkhoff 系统的共形不变性[27],文献[28]研究了一般完整系统的共形不变性.本文研究一般完整系统 Mei 对称性的共形不变性及系统的守恒量,并举例说明结果的应用.

2.一般完整系统的 Mei 对称性

对于由 n 个广义坐标 q_s($s=1,\cdots,n$)确定的一般完整系统,其运动微分方程有如下形式:

$$E_s(L)=Q_s,\qquad (s=1,\cdots,n),\tag{1}$$

式中

$$E_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s}\tag{2}$$

为 Euler 算子,$L=L(t,q,\dot{q})$ 为系统的 Lagrange 函数,$Q_s=Q_s(t,q,\dot{q})$ 为非势广义力.

如果(1)式非奇异,即

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}\right)\neq 0,\qquad (s,k=1,\cdots,n),\tag{3}$$

则由(1)式可求得广义加速度

$$\begin{aligned}\ddot{q}_s&=\alpha_s(t,q,\dot{q})\\&=\frac{M_{sk}}{D}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_k\partial t}-\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_k\partial q_j}\dot{q}_j+Q_k\right),\\&\qquad(s,k,j=1,\cdots,n).\end{aligned}\tag{4}$$

式中 $\frac{M_{sk}}{D}=\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}\right)^{-1}$.

取时间 t 和广义坐标 q_s 的无限小单参数变换群

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,q,\dot{q}),$$
$$q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,q,\dot{q}),\tag{5}$$

其中 ε 为无限小参数,ξ_0,ξ_s 为群的无限小变换的生成元或生成函数.引入无限小生成元向量及其一、二次扩展

$$X^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s},\tag{6}$$

* 国家自然科学基金(批准号:10572021,10772025)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号:20040007022)资助的课题.

† E-mail:caijianle@yahoo.com.cn

$$X^{(1)} = X^{(0)} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s \dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{7}$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} + (\ddot{\xi}_s - 2\ddot{q}_s\dot{\xi}_0 - \dot{q}_s\ddot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}. \tag{8}$$

假设在无限小变换(5)下，Lagrange 函数 L 变为 L^*，广义力 Q_s 变为 Q_s^*，有

$$\begin{aligned} L^* &= L\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) \\ &= L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon X^{(1)}(L) + o(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} Q_s^* &= Q_s\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) \\ &= Q_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon X^{(1)}(Q_s) + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{10}$$

如果用变换后的动力学函数 L^*，Q_s^* 代替变换前的动力学函数 L，Q_s 时，方程(1)的形式保持不变，即

$$E_s(L^*) = Q_s^*, \tag{11}$$

则称这种不变性为广义坐标下一般完整系统的 Mei 对称性.

将(9)和(10)式代入(11)式，忽略高阶小量，并利用方程(1)可得广义坐标下一般完整系统 Mei 对称性的确定方程

$$\{E_s[X^{(1)}(L)] - X^{(1)}(Q_s)\}\big|_{E_s(L)=Q_s} = 0. \tag{12}$$

3. 一般完整系统 Mei 对称性的共形不变性

定义 1　对于广义坐标下一般完整系统动力学方程(1)，如果存在非奇异矩阵 M_s^k 满足

$$\begin{aligned} &E_s\{X^{(1)}(L)\} - X^{(1)}(Q_s) \\ &= M_s^k\{E_k(L) - Q_k\}, (s, k = 1, \cdots, n), \end{aligned} \tag{13}$$

则称方程(1)在无限小单参数变换(5)作用下是 Mei 对称性共形不变性. (13)式是满足 Mei 对称性共形不变性的确定方程，其中 M_s^k 为其共形因子.

由于描述系统运动特征的 Lagrange 函数 L 不是唯一的，如果：1)在 L 和 Q_s 上乘一个任意常数 M，2)在 L 上添加一个任意函数 $\varphi = \varphi(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 的全导数项 $\dot{\varphi}$，3)在 L 上添加一个时间 t 的任意函数 $\psi = \psi(t)$，这几种情形都不会改变系统的运动微分方程. 即有

$$\begin{aligned} &E_s(ML + C_1\dot{\varphi} + C_2\psi) - MQ_s \\ &= M\{E_s(L) - Q_s\} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

由此有如下命题.

命题 1　如果 Lagrange 函数 L 和非势广义力 Q_s 在无限小单参数变换(5)作用下满足

$$\begin{aligned} X^{(1)}(L) &= ML + C_1\dot{\varphi} + C_2\psi, \\ X^{(1)}(Q_s) &= MQ_s, \end{aligned} \tag{15}$$

其中 C_1，C_2 和 M 为常数，$\varphi = \varphi(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$，$\psi = \psi(t)$，则动力学方程(1)是 Mei 对称性共形不变性.

证明　由于

$$\begin{aligned} E_s(\dot{\varphi}) &= E_s\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}_k}\ddot{q}_k\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi}{\partial q_s} - \frac{\partial}{\partial q_s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}_k}\ddot{q}_k\right) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{16}$$

$$E_s(\psi(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\psi(t)}{\partial\dot{q}_s} - \frac{\partial\psi(t)}{\partial q_s} = 0, \tag{17}$$

容易得到

$$\begin{aligned} &E_s\{X^{(1)}(L)\} - X^{(1)}(Q_s) \\ &= ME_s(L) + C_1E_s(\dot{\varphi}) + C_2E_s(\psi) - M(Q_s) \\ &= ME_s(L) - M(Q_s) = M_s^k\{E_k(L) - (Q_k)\}, \\ &\quad (s, k = 1, \cdots, n), \end{aligned} \tag{18}$$

式中 $M_s^k = \delta_s^k M$（其中 $\delta_s^k = \begin{cases} 1, s = k \\ 0, s \neq k \end{cases}$），由定义 1 可知，动力学方程(1)是 Mei 对称性共形不变性.

4. Mei 对称性共形不变性与其他对称性的关系

由 Noether 定理，不难得到一般完整系统的 Mei 对称性共形不变性与 Noether 对称性的关系.

命题 2　如果一般完整系统 Mei 对称性共形不变性的生成元 ξ_0，ξ_s 和规范函数 $G_N = G_N(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下 Noether 等式

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + Q_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G}_N = 0, \tag{19}$$

则 Mei 对称性共形不变性是 Noether 对称性. 否则，不是 Noether 对称性.

一般完整系统的 Mei 对称性共形不变性与 Lie 对称性的关系，有下述命题.

命题 3　如果生成元向量和 Euler 算子对 Lagrange 函数 L 和非势广义力 Q_s 的作用满足

$$\begin{aligned} &E_s[X^{(1)}(L)] - X^{(1)}(Q_s) \\ &= C\{X^{(2)}[E_s(L)] - X^{(1)}(Q_s)\}, \\ &\quad (C \text{ 为常数}), \end{aligned} \tag{20}$$

则一般完整系统的 Mei 对称性共形不变性是 Lie 对

称性共形不变性.同时,系统也是 Lie 对称性.

证明 Lie 对称性共形不变性可定义为

$$X^{(2)}\{E_s(L)-Q_s\}=l_s^k\{E_k(L)-Q_k\},\tag{21}$$

由(20)式有

$$\begin{aligned}&E_s\{X^{(1)}(L)\}-X^{(1)}(Q_s)\\&=C\{X^{(2)}[E_s(L)]-X^{(1)}(Q_s)\}\\&=CX^{(2)}\{E_s(L)-Q_s\}.\end{aligned}\tag{22}$$

由 Mei 对称性共形不变性定义(13)式不难得出

$$\begin{aligned}X^{(2)}\{E_s(L)-Q_s\}&=\frac{1}{C}M_s^k\{E_k(L)-Q_k\}\\&=l_s^k\{E_k(L)-Q_k\},\end{aligned}\tag{23}$$

即一般完整系统的 Mei 对称性共形不变性是 Lie 对称性共形不变性.

考虑到一般完整系统动力学方程(1),则有

$$\begin{aligned}&X^{(2)}\{E_s(L)-Q_s\}\mid_{E_k(L)=Q_s}\\&=l_s^k\{E_k(L)-Q_k\}\mid_{E_k(L)=Q_s}=0,\end{aligned}\tag{24}$$

即一般完整系统的 Mei 对称性共形不变性是 Lie 对称性.

广义坐标下一般完整系统 Mei 对称性共形不变性与 Mei 对称性有如下关系.

命题 4 如果广义坐标下一般完整系统是 Mei 对称性共形不变性,则系统必定也是 Mei 对称性.

证明 将(1)式代入(13)式,即得一般完整系统动力学方程(1)Mei 对称性的确定方程

$$\begin{aligned}&\{E_s[X^{(1)}(L)]-X^{(1)}(Q_s)\}\mid_{E_s(L)=Q_s}\\&=M_s^k\{E_k(L)-Q_s\}\mid_{E_k(L)=Q_s}\\&=0.\end{aligned}\tag{25}$$

5. Mei 对称性共形不变性的守恒量

一般完整系统的 Mei 对称性共形不变性满足一定条件时也可导致相应的守恒量,结果如下:

命题 5 对于满足 Mei 对称性共形不变性的确定方程(13)的无限小生成元 ξ_0,ξ_s,如果存在规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下结构方程:

$$\begin{aligned}&X^{(1)}(L)\dot{\xi}_0+X^{(1)}\{X^{(1)}(L)\}\\&+X^{(1)}(Q_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}=0,\end{aligned}\tag{26}$$

则一般完整系统存在对应于 Mei 对称性共形不变性的 Mei 守恒量

$$\begin{aligned}I_{\mathrm{M}}&=X^{(1)}(L)\xi_0+\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G\\&=\mathrm{const}.\end{aligned}\tag{27}$$

证明 利用广义坐标下一般完整系统的运动微分方程(1)及其 Mei 对称共形不变性的确定方程(13),可以得到

$$\begin{aligned}&E_s\{X^{(1)}(L)\}-X^{(1)}(Q_s)\\&=M_s^k\{E_k(L)-Q_k\}\\&=0,\end{aligned}\tag{28}$$

从而有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}&=\left(\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial t}+\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\ddot{q}_s\right)\xi_0\\&+X^{(1)}(L)\dot{\xi}_0+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)\\&+\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}(\dot{\xi}_s-\ddot{q}_s\xi_0-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)-X^{(1)}(L)\dot{\xi}_0\\&-\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial t}\xi_0-\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s}\xi_s\\&-\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\\&-X^{(1)}(Q_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)\\&=(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s}\right.\\&\left.-X^{(1)}(Q_s)\right)\\&=(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)M_s^k\{E_k(L)-Q_k\}\\&=0.\end{aligned}\tag{29}$$

Mei 对称性共形不变性通过 Noether 对称性可导出 Noether 守恒量.

命题 6 对一般完整系统,如果 Mei 对称性共形不变性的生成元 ξ_0,ξ_s 和规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下结构方程

$$L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+Q_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}_N=0,\tag{30}$$

则 Mei 对称性共形不变性导致 Noether 守恒量

$$I_{\mathrm{N}}=L\xi_0+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_N=\mathrm{const}.\tag{31}$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}t}&=\dot{L}\xi_0+L\dot{\xi}_0+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)\\&+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\dot{\xi}_s-\ddot{q}_s\xi_0-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\\&-L\dot{\xi}_0-\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0-\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s\\&-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)-Q_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)\end{aligned}$$

$$= (\xi_s - \dot{q}_s \xi_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q_s\right)$$

$$= 0. \tag{32}$$

在时间不变的特殊无限小变换下，即(5)式中取 $\xi_0 = 0$，Mei 对称性共形不变性通过 Lie 对称性可导出 Hojman 守恒量.

命题 7　一般完整系统在时间不变的特殊无限小变换下，如果 Mei 对称性共形不变性的生成元 ξ_s 满足条件

$$\ddot{\xi}_s = \frac{\partial \alpha_s}{\partial q_k}\xi_k + \frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_k}\dot{\xi}_k, \tag{33}$$

且存在某函数 $\mu = \mu(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 使得

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\mu = 0, \tag{34}$$

则 Mei 对称性共形不变性导致 Hojman 守恒量

$$I_{\mathrm{H}} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s) + \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left(\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right) = \mathrm{const}. \tag{35}$$

证明　在时间不变的特殊无限小变换下，即(5)式中取 $\xi_0 = 0$，则

$$X^{(2)}\{E_s(L) - Q_s\}$$

$$= X^{(2)}(\ddot{q}_s - \alpha_s)$$

$$= \left(\xi_k\frac{\partial}{\partial q_k} + \dot{\xi}_k\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} + \ddot{\xi}_k\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_k}\right)(\ddot{q}_s - \alpha_s)$$

$$= \ddot{\xi}_s - \xi_k\frac{\partial \alpha_s}{\partial q_k} - \dot{\xi}_k\frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_k}. \tag{36}$$

若生成元 ξ_s 满足条件(33)，则等式右边等于零，即系统 Lie 对称性，从而导致 Hojman 守恒量(35)[11].

需要指出的是，在上述情况中，如果生成元既是 Lie 对称性生成元又是 Noether 对称性生成元，则(35)式给出的守恒量是平凡的[29].

6. 算　　例

二自由度系统为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2),$$

$$Q_1 = q_1^2,$$

$$Q_2 = q_2^2. \tag{37}$$

取无限小变换的生成元

$$\xi_0 = 1,\quad \xi_1 = q_1,\quad \xi_2 = q_2, \tag{38}$$

则

$$X^{(1)}(L) = 2\left[\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\right] = 2L,$$

$$X^{(1)}(Q_1) = 2Q_1,$$

$$X^{(1)}(Q_2) = 2Q_2 \tag{39}$$

满足(15)，系统为 Mei 对称性共形不变性. 事实上，

$$E_s\{X^{(1)}(L)\} - X^{(1)}(Q_s)$$

$$= E_s(2L) - 2Q_s$$

$$= 2\delta_s^k\{E_k(L) - Q_k\} = 0$$

$$(s, k = 1, 2), \tag{40}$$

由定义 1，系统是 Mei 对称性共形不变性，共形因子 $M_s^k = 2\delta_s^k$. 由命题 4，系统同时也是 Mei 对称性的. 由(26)得

$$\dot{G} = -X^{(1)}(L)\dot{\xi}_0 - X^{(1)}\{X^{(1)}(L)\}$$

$$- X^{(1)}(Q_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)$$

$$= -2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2(q_1^3 + q_2^3)$$

$$+ 2(q_1^2\dot{q}_1 + q_2^2\dot{q}_2), \tag{41}$$

$$G = \frac{2}{3}(q_1^3 + q_2^3) - 2(q_1\dot{q}_1 + q_2\dot{q}_2). \tag{42}$$

(27)式给出 Mei 对称共形不变性的守恒量

$$I = \frac{2}{3}(q_1^3 + q_2^3) - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) = \mathrm{const}. \tag{43}$$

显然，生成元 ξ_0, ξ_s 和规范函数 $G = \frac{1}{3}(q_1^3 + q_2^3) - (q_1\dot{q}_1 + q_2\dot{q}_2)$ 满足结构方程(30)，导致的 Noether 守恒量与结果(43)相同. 事实上，考虑到结果(39)，则(26)与(30)式实际上是相同的，从而守恒量(27)与(31)结果也相同. 由命题 2 知，系统 Mei 对称性共形不变性是 Noether 对称性.

由于

$$X^{(2)}\{E_s(L)\} - X^{(1)}(Q_s) = E_s(L) - 2Q_s, \tag{44}$$

从(40)式可知，(44)式不满足条件(20). 根据命题 3，对于无限小变换的生成元(38)，系统 Mei 对称性共形不变性不是 Lie 对称性共形不变性，也不是 Lie 对称性.

如果取生成元

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = \dot{q}_1, \xi_2 = \dot{q}_2, \tag{45}$$

系统不是 Mei 对称性共形不变性，也不是 Mei 对称性，但满足 Lie 对称性条件，同时又是 Noether 对称性，(35)式给出的守恒量 $I = 0$ 是平凡的. 容易求出满足 Noether 等式(30)的规范函数 $G_{\mathrm{N}} = -\frac{2}{3}(q_1^3 + q_2^3)$，Noether 守恒量(31)计算的结果与(43)相同.

7. 结　论

在无限小单参数变换群作用下,定义一般完整系统动力学方程的 Mei 对称共形不变性. 如果 Lagrange 函数 L 和非势广义力 Q_s 在无限小单参数变换群作用下满足 $X^{(1)}(L)=ML+C_1\dot{\varphi}+C_2\psi$(其中 $\varphi=\varphi(t,q,\dot{q})$,$\psi=\psi(t)$,$C_1$,$C_2$ 和 M 为常数),则一般完整系统是 Mei 对称性共形不变性,同时也是 Mei 对称性. Mei 对称性共形不变性满足一定条件时也可导致相应的守恒量.

[1] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Math.* **2** 235

[2] Djukić D S, Vujanović B D 1975 *Acta Mechanica* **23** 17

[3] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京 科学出版社)]

[4] Zhao Y Y, Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量(北京 科学出版社)]

[5] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Tech.* **9** 120 (in Chinese) [梅凤翔 2000 北京理工大学学报 **9** 120]

[6] Mei F X 2001 *Chin Phys.* **10** 177

[7] Luo S K 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 449

[8] Luo S K 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 597

[9] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]

[10] Fang J H 2003 *Commun. Theor. Phys.* **40** 269

[11] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量(北京 北京理工大学出版社)]

[12] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 1]

[13] Zhang Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2980 (in Chinese) [张　毅 2005 物理学报 **54** 2980]

[14] Jia L Q, Zheng S W, Zhang Y Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5575 (in Chinese) [贾利群、郑世旺、张耀宇 2007 物理学报 **56** 5575]

[15] Mei F X, Xu X J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5521 (in Chinese) [梅凤翔、许学军 2005 物理学报 **54** 5521]

[16] Zhang Y 2006 *Commun. Theor. Phys.* **45** 732

[17] Zhang Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 30541 (in Chinese) [张　毅 2007 物理学报 **56** 3054]

[18] Ding N, Fang J H, Wang P 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 19

[19] Zheng S W, Xie J F, Zhang Q H 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 2164

[20] Fang J H, Wang P, Ding N 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 53

[21] Luo S K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 5 (in Chinese) [罗绍凯 2004 物理学报 **53** 5]

[22] Li H, Fang J H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2807 (in Chinese) [李红、方建会 2004 物理学报 **53** 2807]

[23] Zhang Y, Ge W K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1464 (in Chinese) [张毅、葛伟宽 2005 物理学报 **54** 1464]

[24] Fang J H, Liao Y P, Peng Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 500 (in Chinese) [方建会、廖永潘、彭　勇 2005 物理学报 **54** 500]

[25] Ge W K 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1 (in Chinese) [葛伟宽 2007 物理学报 **56** 1]

[26] Jia L Q, Luo S K, Zhang Y Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2006 (in Chinese) [贾利群、罗绍凯、张耀宇 2008 物理学报 **57** 2006]

[27] Galiullin A S, Gafarov G G, Malaishka R P, Khwan A M 1997 *Analytical Dynamics of Helmholtz, Birkhoff and Nambu Systems* (Moscow: UFN) (in Russian)

[28] Cai J L 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1523

[29] Zhang H B, Chen L Q 2005 *Journal of the Physical Society of Japan* **74** 905

Conformal invariance and conserved quantities of Mei symmetry for general holonomic systems*

Cai Jian-Le†

(*College of Science*, *Hangzhou Normal University*, *Hangzhou* 310018, *China*)

(Received 8 April 2008; revised manuscript received 2 July 2008)

Abstract

Conformal invariance and conserved quantities of Mei symmetry for general holonomic systems are studied thoroughly. By introducing a single-parameter infinitesimal transformation group and its infinitesimal transformation vector of generators, definitions of the conformal invariance of Mei symmetry for the system are provided. Conditions that the conformal invariance should satisfy are derived using the Euler operator, and their determining equations are then presented. Moreover, the relationship between conformal invariance and the three symmetries, i.e., Noether symmetry, Lie symmetry and Mei symmetry, are discussed. The system's corresponding conserved quantities are obtained, according to the structure equation satisfied by the gauge function. Finally, an example is provided to illustrate how the given result can be applied.

Keywords: general holonomic system, Mei symmetry, conformal invariance, conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10572021, 10772025), and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20040007022).

† E-mail: caijianle@yahoo.com.cn