第 58 卷 第 1 期 2009 年 1 月
1000-3290/2009/58(01)/0028-06
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 58, No. 1, January, 2009

相对论性转动变质量非完整可控力学系统的非 Noether 守恒量*

夏丽莉[1)†]　李元成[2)]　王显军[1)]
1)(河南教育学院物理系,郑州　450014)
2)(中国石油大学(华东)物理科学与技术学院,东营　257061)
(2008 年 3 月 19 日收到;2008 年 6 月 6 日收到修改稿)

研究相对论性转动变质量非完整可控力学系统的非 Noether 守恒量——Hojman 守恒量. 建立了系统的运动微分方程,给出了系统在特殊无限小变换下的 Mei 对称性(形式不变性)和 Lie 对称性的定义和判据,以及系统的 Mei 对称性是 Lie 对称性的充分必要条件. 得到了系统 Mei 对称性导致非 Noether 守恒量的条件和具体形式. 举例说明结果的应用.

关键词:相对论性转动,可控力学系统,变质量,非 Noether 守恒量
PACC:0320,0330

1. 引　言

对称性原理是物理学中更高层次的法则,力学系统对称性和守恒量的研究具有重要的物理意义和现实意义. 近年来,经典力学系统的对称性和守恒量的研究取得了一系列重要成果[1—7]. Carmeli 为了解决高速转动的动力学问题,建立了转动相对论力学理论[8,9]. 1996 年以来,我国学者建立了转动系统相对论性分析力学理论[10,11]. 自此,转动相对论力学系统的变分原理、运动方程及对称性理论等方面的研究取得了一定的成果,这些成果使爱因斯坦建立的相对论力学取得了一定的进展[12—22].

随着科技的迅猛发展,控制技术越来越显出其巨大的应用价值,特别是在工程实践上获得了充分的应用[23]. 控制技术的发展必然要求控制理论的更大进步,因此对现实社会中普遍存在的可控力学系统这一既有理论价值又有实际意义的力学系统的研究就显得尤为重要.可控力学系统是在现实社会中普遍存在的一类力学系统. 通常研究的可控力学系统是指系统的约束方程中带有控制参数的. 目前,已对此类约束系统进行了一定的研究[24—32]. 但是这些研究局限于经典的可控力学,对于相对论性可控力学系统的对称性和守恒量的研究不仅具有数学意义,而且具有更重要的物理意义.

现在,我们将可控力学系统从经典研究领域推广到高速转动的相对论研究领域,研究相对论性转动变质量非完整可控力系统的非 Noether 守恒量——Hojman 守恒量. 建立了系统的运动微分方程,给出了系统在特殊无限小变换下的 Mei 对称性(形式不变性)和 Lie 对称性的定义和判据,以及系统的 Mei 对称性是 Lie 对称性的充分必要条件. 并得到了系统形式不变性导致非 Noether 守恒量的条件和具体形式.

2. 系统的运动微分方程

设力学系统由 N 个变质量质点组成,在 t 时刻静止质量为 m_{0i} 的质点以角速度 ω_i 绕 oz 轴转动,质点到轴的距离为 r_i,其经典转动惯量 $I_{0i} = r_i^2 m_{0i}$,相对论转动惯量 $I_i = \dfrac{I_{0i}}{\sqrt{1-\dfrac{\dot{\theta}_i^2}{\Gamma_i^2}}}$;另一静止质量为 Δm_{0i} 的微元质量以角速度 Ω_i 绕 oz 轴转动,其经典转动惯量 $\Delta I_{0i} = r_i^2 \Delta m_{0i}$. 在 t 时刻后的 Δt 时间内两者合并,则系统的相对论 d'Alembert 原理为[4]

---

* 河南教育学院重点学科建设基金资助的课题.
† E-mail:xialilixialili@yahoo.com.cn

$$\sum_{s=1}^{n}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_{\mathrm{r}}^{*}}{\partial \dot{q}_{s}}+\frac{\partial T_{\mathrm{r}}^{*}}{\partial q_{s}}+G_{s}+G_{s}^{*}\right]\delta q_{s}=0,\tag{1}$$

其中

$$T_{\mathrm{r}}^{*}=\sum_{i=1}^{N}I_{0i}\Gamma_{i}^{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{\omega_{i}^{2}}{\Gamma_{i}^{2}}}\right),\tag{2}$$

$$\begin{aligned}G_{s}^{*}=&\sum_{i=1}^{N}\frac{I_{0i}\Omega_{i}}{\sqrt{1-\frac{\Omega_{i}^{2}}{\Gamma_{i}^{2}}}}\frac{\partial\theta_{i}}{\partial q_{s}}\\&-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial I_{0i}}{\partial q_{s}}\Gamma_{i}^{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{\omega_{i}^{2}}{\Gamma_{i}^{2}}}\right)\\&+\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial I_{0i}}{\partial \dot{q}_{s}}\Gamma_{i}^{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{\omega_{i}^{2}}{\Gamma_{i}^{2}}}\right)\right].\end{aligned}\tag{3}$$

式中 θ_i 为角坐标；$q_s(s=1,\cdots,n)$ 为广义坐标；G_s 为广义力；Γ_i 为极限角速度.

设系统除受完整约束外，还受 g 个理想的 Chetaev 型非完整约束

$$\varphi_{\beta}(t,q_{s},\dot{q}_{s},\mu_{k},\dot{\mu}_{k})=0\quad(\beta=1,\cdots,g),\tag{4}$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial\dot{q}_{s}}\delta q_{s}=0,\tag{5}$$

其中 $\mu_k(k=1,\cdots,p)$ 为控制参数. 力学系统的运动方程通过控制参数来实现可控约束，控制参数 μ_k 是这个力学系统成为可控力学系统的重要特征之一，这里 μ_k 是不可积分的.

由原理（1）和虚位移方程（5），利用 Lagrange 乘子法得到相对论性转动非完整可控力学系统的 Routh 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_{\mathrm{r}}^{*}}{\partial\dot{q}_{s}}-\frac{\partial T_{\mathrm{r}}^{*}}{\partial q_{s}}=G_{s}+G_{s}^{*}+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_{\beta}\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial\dot{q}_{s}}\quad(s=1,2,\cdots,n),\tag{6}$$

式中 λ_β 为约束乘子，广义力 G_s 分为有势力 G'_s 和非有势力 G''_s，有

$$G'_{s}=-\frac{\partial V}{\partial q_{s}},$$

$$G_{s}=-\frac{\partial V}{\partial q_{s}}+G''_{s},\tag{7}$$

则(6)式可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_{\mathrm{r}}^{*}}{\partial\dot{q}_{s}}-\frac{\partial L_{\mathrm{r}}^{*}}{\partial q_{s}}=G''_{s}+G_{s}^{*}+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_{\beta}\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial\dot{q}_{s}}\quad(s=1,2,\cdots,n),\tag{8}$$

式中 $L_{\mathrm{r}}^{*}=T_{\mathrm{r}}^{*}-V$ 为相对论性转动变质量系统的广义 Lagrange 函数.

在运动方程积分之前，可由方程（4）和方程（8）解出 $\lambda_\beta(t,q_s,\dot{q}_s,\mu_k,\dot{\mu}_k)$，将其代入（8)式得相对论性转动变质量非完整可控力学系统相应的完整系统的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_{\mathrm{r}}^{*}}{\partial\dot{q}_{s}}-\frac{\partial L_{\mathrm{r}}^{*}}{\partial q_{s}}=G''_{s}+G_{s}^{*}+\Lambda_{s}\quad(s=1,2,\cdots,n),\tag{9}$$

其中 $\Lambda_{s}=\Lambda_{s}(t,q_{s},\dot{q}_{s},\mu_{k},\dot{\mu}_{k})=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_{\beta}\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial\dot{q}_{s}}$ 为非完整广义约束反力. 展开方程(9)，可以求出所有广义加速度[11]，记作

$$\ddot{q}_{s}=h_{s}(t,q_{s},\dot{q}_{s},\mu_{k},\dot{\mu}_{k})\quad(s=1,\cdots,n).\tag{10}$$

3. 系统的 Mei 对称性

引入无限小单参数群变换

$$t^{*}=t+\Delta t,q_{s}^{*}(t^{*})=q_{s}(t)+\Delta q_{s},\tag{11}$$

在一级近似下,其展开式为

$$t^{*}=t+\varepsilon\xi_{0}(t,q_{s},\dot{q}_{s}),$$

$$q_{s}^{*}(t^{*})=q_{s}(t)+\varepsilon\xi_{s}(t,q_{s},\dot{q}_{s}),\tag{12}$$

式中 ε 为无限小参数，ξ_0,ξ_s 为无限小生成元.

取无限小生成元向量(此后省略爱因斯坦求和号)

$$X^{(0)}=\xi_{0}\frac{\partial}{\partial t}+\xi_{s}\frac{\partial}{\partial q_{s}},\tag{13}$$

它的一次扩展

$$X^{(1)}=X^{(0)}+(\dot{\xi}_{s}-\dot{q}_{s}\dot{\xi}_{0})\frac{\partial}{\partial\dot{q}_{s}},\tag{14}$$

二次扩展为

$$X^{(2)}=X^{(1)}+(\ddot{\xi}_{s}-2\ddot{q}_{s}\dot{\xi}_{0}-\dot{q}_{s}\ddot{\xi}_{s})\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_{s}}.\tag{15}$$

假设在无限小变换(12)下,函数 $L_{\mathrm{r}}^{*}=L_{\mathrm{r}}^{*}(t,q_{s},\dot{q}_{s})$ 变成为 $\tilde{L}_{\mathrm{r}}^{*}=L_{\mathrm{r}}^{*}(\tilde{t},\tilde{q}_{s},\dot{\tilde{q}}_{s})$，$G_{s}^{*}=G_{s}^{*}(t,q_{s},\dot{q}_{s})$ 变成为 $\tilde{G}_{s}^{*}=G_{s}^{*}(\tilde{t},\tilde{q}_{s},\dot{\tilde{q}}_{s})$，$G''_{s}=G''_{s}(t,q_{s},\dot{q}_{s})$ 变成为 $\tilde{G}''_{s}=G''_{s}(\tilde{t},\tilde{q}_{s},\dot{\tilde{q}}_{s})$，$\Lambda_{s}=\Lambda_{s}(t,q_{s},\dot{q}_{s},\mu_{k},\dot{\mu}_{k})$ 变成为 $\tilde{\Lambda}_{s}=\Lambda_{s}(\tilde{t},\tilde{q}_{s},\dot{\tilde{q}}_{s},\tilde{\mu}_{k},\dot{\tilde{\mu}}_{k})$，可得

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{\mathrm{r}}^{*}&=L_{\mathrm{r}}^{*}(\tilde{t},\tilde{q}_{s},\dot{\tilde{q}}_{s})\\&=L_{\mathrm{r}}^{*}(t,q_{s},\dot{q}_{s})+\varepsilon X^{(1)}(L_{\mathrm{r}}^{*})+O(\varepsilon^{2}),\end{aligned}\tag{16}$$

$$\tilde{G}''_{s}=G''_{s}(\tilde{t},\tilde{q}_{s},\dot{\tilde{q}}_{s})$$

$$= G''_s(t, q_s, \dot{q}_s) + \varepsilon X^{(1)}(G''_s) + O(\varepsilon^2), \tag{17}$$

$$\widetilde{G}_s^* = G_s^*(\tilde{t}, \tilde{q}_s, \dot{\tilde{q}}_s) = G_s^*(t, q_s, \dot{q}_s) + \varepsilon X^{(1)}(G_s^*) + O(\varepsilon^2), \tag{18}$$

$$\widetilde{\Lambda}_s = \Lambda_s(\tilde{t}, \tilde{q}_s, \dot{\tilde{q}}_s, \tilde{\mu}_k, \dot{\tilde{\mu}}_k) = \Lambda_s(t, q_s, \dot{q}_s, \mu_k, \dot{\mu}_k) + \varepsilon X^{(1)}(\Lambda_s) + O(\varepsilon^2). \tag{19}$$

引入 Euler 算子

$$E_s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{20}$$

则方程（9）可表示为

$$E_s(L_r^*) = G''_s + G_s^* + \Lambda_s \quad (s = 1, \cdots, n). \tag{21}$$

定义 1　对与相对论性转动变质量非完整可控力学系统相应的完整系统，在无限小变换（12）下，若方程（21）保持形式不变，即

$$E_s(\widetilde{L}_r^*) = \widetilde{G}''_s + \widetilde{G}_s^* + \widetilde{\Lambda}_s \tag{22}$$

成立，则称此不变性为与相对论性转动变质量非完整可控力学系统（1），（4）相应的完整系统（21）的形式不变性.

判据 1　对与相对论性转动变质量非完整可控力学（1），（4）式相应的完整系统（21），如果无限小变换生成元 ξ_0, ξ_s 满足

$$E_s[X^{(1)}(L_r^*)] - X^{(1)}(G''_s) - X^{(1)}(G_s^*) - X^{(1)}(\Lambda_s) = 0, \tag{23}$$

则相应不变性是系统的 Mei 对称性.

证明　将 Euler 算子（20）作用于（16）式，忽略 ε^2 及以上高阶小项，可得

$$E_s(\widetilde{L}_r^*) = E_s(L_r^*) + \varepsilon E_s\{X^{(1)}(L_r^*)\}, \tag{24}$$

将（21）式代入到（24）式，考虑到（17）—（19）式，可得

$$\begin{aligned} E_s(\widetilde{L}_r^*) &= G''_s + G_s^* + \Lambda_s + \varepsilon E_s\{X^{(1)}(L_r^*)\} \\ &= \widetilde{G}''_s - \varepsilon X^{(1)}(G''_s) + \widetilde{G}_s^* - \varepsilon X^{(1)}(G_s^*) \\ &\quad + \widetilde{\Lambda}_s - \varepsilon X^{(1)}(\Lambda_s) + \varepsilon E_s\{X^{(1)}(L_r^*)\} \\ &= \widetilde{G}''_s + \widetilde{G}_s^* + \widetilde{\Lambda}_s + \varepsilon\{E_s[X^{(1)}(L_r^*)] \\ &\quad - X^{(1)}(G''_s) - X^{(1)}(G_s^*) \\ &\quad - X^{(1)}(\Lambda_s)\}. \end{aligned} \tag{25}$$

将（22）式代入（25）式，可得（23）式.

4. 系统的 Lie 对称性

（21）式可写为

$$F = E_s(L_r^*) - G''_s - G_s^* - \Lambda_s = 0. \tag{26}$$

定义 2　在无限小变换（12）下，系统的运动方程（21）保持形式不变，即

$$F(\tilde{t}, \tilde{q}_s, \dot{\tilde{q}}_s, \ddot{\tilde{q}}_s, \tilde{\mu}_k, \dot{\tilde{\mu}}_k, \ddot{\tilde{\mu}}_k) = 0 \tag{27}$$

成立，则这种不变性称为与相对论性转动变质量非完整可控力学系统（1），（4）相应的完整系统（21）的 Lie 对称性.

F 展开为

$$\begin{aligned} & F(\tilde{t}, \tilde{q}_s, \dot{\tilde{q}}_s, \ddot{\tilde{q}}_s, \tilde{\mu}_k, \dot{\tilde{\mu}}_k, \ddot{\tilde{\mu}}_k) \\ &= F(t, q_s, \dot{q}_s, \ddot{q}_s, \mu_k, \dot{\mu}_k, \ddot{\mu}_k) \\ &\quad + \varepsilon X^{(2)}(F) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{28}$$

判据 2　对与相对论性转动变质量非完整可控力学系统（1），（4）相应的完整系统（21），如果无限小变换生成元 ξ_0, ξ_s 满足

$$X^{(2)}\{E_s(L_r^*)\} - X^{(1)}(G''_s) - X^{(1)}(G_s^*) - X^{(1)}(\Lambda_s) = 0, \tag{29}$$

则相应对称性为系统的 Lie 对称性.

证明　将（26）式代入（28）式，忽略 ε^2 及高阶小项，可得

$$\begin{aligned} & F(\tilde{t}, \tilde{q}_s, \dot{\tilde{q}}_s, \ddot{\tilde{q}}_s, \tilde{\mu}_k, \dot{\tilde{\mu}}_k, \ddot{\tilde{\mu}}_k) \\ &= E_s(L_r^*) - G''_s - G_s^* - \Lambda_s \\ &\quad + \varepsilon X^{(2)}[E_s(L_r^*) - G''_s - G_s^* - \Lambda_s] \\ &= E_s(L_r^*) - G''_s - G_s^* - \Lambda_s \\ &\quad + \varepsilon X^{(2)}[E_s(L_r^*)] - \varepsilon X^{(1)}(G''_s) \\ &\quad - \varepsilon X^{(1)}(G_s^*) - \varepsilon X^{(1)}(\Lambda_s) \\ &= \varepsilon\{X^{(2)}[E_s(L_r^*)] - X^{(1)}(G''_s) \\ &\quad - X^{(1)}(G_s^*) - X^{(1)}(\Lambda_s)\}, \end{aligned}$$

考虑（27）式，易得（29）式.

5. Mei 对称性与 Lie 对称性的关系

比较（23）式和（29）式，很显然 Mei 对称性与 Lie 对称性是不同的两种对称性.

定理 1　对与相对论性转动变质量非完整可控力学系统（1），（4）相应的完整系统（21），如果系统在无限小变换式（12）下是 Mei 对称性的，且满足等式

$$E_s\{X^{(1)}(L_r^*)\}-X^{(2)}\{E_s(L_r^*)\}=0,\tag{30}$$

则系统也是 Lie 对称性的，反之亦然.

证明　由（30）式

$$E_s\{X^{(1)}(L_r^*)\}-X^{(2)}\{E_s(L_r^*)\}=0,$$

可得

$$\begin{aligned}&E_s\{X^{(1)}(L_r^*)\}-X^{(1)}(G''_s)-X^{(1)}(G_s^*)-X^{(1)}(\Lambda_s)\\&=X^{(2)}\{E_s(L_r^*)\}-X^{(1)}(G''_s)\\&\quad-X^{(1)}(G_s^*)-X^{(1)}(\Lambda_s).\end{aligned}\tag{31}$$

如果生成元 ξ_0,ξ_s 是 Mei 对称性的，有（23）式成立，则（23）式变形为

$$E_s\{X^{(1)}(L_r^*)\}=X^{(1)}(G''_s)+X^{(1)}(G_s^*)+X^{(1)}(\Lambda_s),\tag{32}$$

将（32）式代入（31）式，可得

$$X^{(2)}\{E_s(L)\}-X^{(1)}(G''_s)-X^{(1)}(G_s^*)-X^{(1)}(\Lambda_s)=0,\tag{33}$$

生成元 ξ_0,ξ_s 也是 Lie 对称性的.

如果生成元 ξ_0,ξ_s 是 Lie 对称性的，有（29）式成立，由（30）式可得（23）式，则生成元 ξ_0,ξ_s 也是 Mei 对称性的.

与相对论性转动变质量非完整可控力学系统（1），（4）相应的完整系统（21）的 Mei 对称性生成元是 Lie 对称性的充分必要条件是（30）式成立.

6.相应的完整系统的 Hojman 定理

对与相对论转动变质量非完整可控力学系统（1），（4）相应的完整系统（21），如果无限小变换生成元 ξ_0,ξ_s 满足（23）式，同时存在函数 $\bar\mu=\bar\mu(t,q_s,\dot q_s,\mu_k,\dot\mu_k)$ 满足

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial h_s}{\partial\dot q_s}+\frac{\bar{\mathrm d}}{\mathrm dt}\ln\bar\mu=0,\tag{34}$$

则系统的 Mei 对称性导致非 Noether 守恒量

$$I_{\mathrm H}=\frac{1}{\bar\mu}\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial q_s}(\bar\mu\xi_s)+\frac{\partial}{\partial\dot q_s}\left(\bar\mu\frac{\bar{\mathrm d}}{\mathrm dt}\xi_s\right)\right]=\mathrm{const.}.\tag{35}$$

证明　如果无限小变换生成元 ξ_0,ξ_s 是 Lie 对称性的，则存在如下 Lie 对称性确定方程：

$$\frac{\bar{\mathrm d}}{\mathrm dt}\frac{\bar{\mathrm d}}{\mathrm dt}\xi_s=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial q_k}\xi_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot q_k}\frac{\bar{\mathrm d}}{\mathrm dt}\xi_k.\tag{36}$$

由关系式（34）和（36）式，根据 Hojman 证明方法，可得到守恒量(35).

7.算　　例

设相对论性转动变质量非完整可控力学系统的 Lagrange 函数为

$$L_r^*=K\exp(-\alpha t)\Gamma^2\left(1-\sqrt{1-\frac{\dot\theta^2}{\Gamma^2}}\right)-V,\tag{37}$$

系统受到的非完整可控约束

$$\varphi=\mu\dot\theta+\theta=0,\tag{38}$$

非势广义力

$$G''_\theta=\frac{-K\exp(-\alpha t)(\Gamma^2-\dot\theta^2)\alpha\dot\theta}{\Gamma^2\left(1-\frac{\dot\theta^2}{\Gamma^2}\right)^{\frac32}},\tag{39}$$

系统势能 V 是常量，$\Omega=0$. 其中 μ 为控制参数，是不可积分的. 研究系统的 Mei 对称性和 Lie 对称性.

取 θ 为广义变量，由(9)式，可得

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\frac{\partial L_r^*}{\partial\dot\theta}=\frac{K\exp(-\alpha t)[\Gamma^2(-\alpha\dot\theta+\ddot\theta)-\dot\theta^2(-\alpha\dot\theta+\ddot\theta)+\dot\theta^2\ddot\theta]}{\Gamma^2\left(1-\frac{\dot\theta^2}{\Gamma^2}\right)^{3/2}},\tag{40}$$

和

$$\frac{K\exp(-\alpha t)\Gamma^2\ddot\theta}{\mu\Gamma^2\left(1-\frac{\dot\theta^2}{\Gamma^2}\right)^{3/2}}=\lambda.\tag{41}$$

将（38）式对 t 求一次导数，可得

$$\dot\mu\dot\theta+\mu\ddot\theta+\dot\theta=0.\tag{42}$$

进而可得

$$h_s=-\frac{1+\dot\mu}{\mu}\dot\theta.\tag{43}$$

取无限小生成元

$$\xi_0=0,\xi_s=\frac12(\mu\dot\theta+\theta)^2,\tag{44}$$

易得生成元(44)满足（23）式和（30）式，则与相对论转动变质量非完整可控力学系统（1），（4）相应的完整系统（21）既是 Mei 对称性的又是 Lie 对称性的.

由（34）式，可得

$$\bar{\mu} = \mu \cdot \exp\int \frac{1}{\mu}\mathrm{d}t. \tag{45}$$

则可得 Hojman 守恒量

$$I_{\mathrm{H}} = \mu\dot{\theta} + \theta = \text{const.}. \tag{46}$$

8. 结 论

本文在一般无限小变换下，研究相对论性转动变质量非完整可控力系统的非 Noether 守恒量. 主要结果是（23），（29），（30）和（35）式. 本文具有普遍意义，对相对论情况和经典情况都适用. 当 $|\dot{\boldsymbol{r}}_i| \ll c$ 时，相对论广义动能 T^* 化为 $T = \frac{1}{2}m_{0i}\dot{\boldsymbol{r}}_i^2$，本文主要结果和经典情况下的结果相同；本文也适应于常质量系统和变质量系统，如果 $m_{0i} = \text{const.}$，本文主要结果和相对论性转动非完整可控力学系统的结果相同. 如果用[33]

$$m_i = \frac{m_{0i}}{\sqrt{1 - \dot{\boldsymbol{r}}_i^2/c^2}} \quad (i = 1,2,\cdots,N), \tag{47}$$

$$T_{\mathrm{r}}^* = m_{0i}c^2\left(1 - \sqrt{1 - \dot{\boldsymbol{r}}_i^2/c^2}\right), \tag{48}$$

分别代替 $I_i = I_{0i}/\sqrt{1 - \dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}$ 和（2）式，则本文主要结果和相对论性变质量非完整可控力学系统的非 Noether 守恒量的结果相同. 控制参数 $\mu_k = 0$，本文主要结果和相对论性变质量非完整系统的非 Noether 守恒量的.

[1] Li Z P 1981 *Acta Phys. Sin.* **30** 1659 (in Chinese) [李子平 1981 物理学报 **30** 1659]

[2] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijng Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京 北京理工大学出版社)]

[3] Mei F X 1999 *Appl. Math. Mech.* **20** 629

[4] Mei F X 1999 *Applications of Lie groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京：科学出版社)]

[5] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[6] Wang S Y, Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 373

[7] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]

[8] Carmeli M 1985 *Foundations of Physics* **15** 175, 889, 1019

[9] Carmeli M 1986 *Intern. J. Theor. Phys.* **25** 89

[10] Luo S K 1996 *J. Beijing Inst. Technol.* **16** (SI) 154 (in Chinese) [罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16** (SI) 154]

[11] Luo S K 1998 *Appl. Math. Meth.* **19** 45

[12] Fu J L, Chen X W, Luo S K 1999 *Appl. Math. Mech.* **20** 1266

[13] Fang J H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1028 (in Chinese) [方建会 2000 物理学报 **49** 1028]

[14] Fang J H, Zhao S Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 390 (in Chinese) [方建会、赵嵩卿 2001 物理学报 **50** 390]

[15] Luo S K, Fu J L, Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 383 (in Chinese) [罗绍凯、傅景礼、陈向炜 2001 物理学报 **50** 383]

[16] Luo S K, Guo Y X, Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2053 (in Chinese) [罗绍凯、郭永新、陈向炜 2001 物理学报 **50** 2053]

[17] Fang J H, Zhao S Q 2002 *Chin. Phys.* **11** 445

[18] Luo S K 2003 *Chin. Phys.* **12** 140

[19] Luo S K, Cai J L 2003 *Chin. Phys.* **12** 357

[20] Luo S K, Cai J L, Jia L Q 2005 *Chin. Phys.* **14** 656

[21] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]

[22] Fang J H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1001 (in Chinese) [方建会 2001 物理学报 **50** 1001]

[23] Mei F X, Liu D, Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing: Beijng Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、刘 端、罗 勇 1991 高等分析力学 (北京：北京理工大学出版社)]

[24] Kirgetov V I 1964 *Appl. Math. Meth.* **28** 232 (in Russian)

[25] Rumjantsev V V 1976 *Appl. Math. Meth.* **40** 771 (in Russian)

[26] Mei F X 1988 *J. Beijing Inst. Technol.* **8** 17

[27] Mei F X 1992 *Appl. Math. Mech.* **13** 165

[28] Qiao Y F 1991 *Acta Mech. Solida Sin.* **4** 231 (in Chinese) [乔永芬 1991 固体力学学报 **4** 231]

[29] Fu J L, Chen L Q, Bai J H, Yang X D 2003 *Chin. Phys.* **12** 695

[30] Xia L L, Li Y C, Wang J, Hou Q B 2006 *Commun. Theor. Phys.* **46** 415

[31] Xia L L, Li Y C, Wang J, Hou Q B 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4995 (in Chinese) [夏丽莉、李元成、王 静、后其宝 2006 物理学报 **55** 4995]

[32] Xia L L, Li Y C 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 23

[33] Luo S K 1990 *Proc. ICDVC* (Beijing: Peking University Press) p645

Non-Noether conserved quantities for nonholonomic controllable mechanical systems with relativistic rotational variable mass*

Xia Li-Li[1)†]　Li Yuan-Cheng[2)]　Wang Xian-Jun[1)]

1)(*Department of Physics*, *Henan Institute of Education*, *Zhengzhou* 450014, *China*)

2)(*College of Physics Science and Technology*, *China University of Petroleum*, *Dongying* 257061, *China*)

(Received 19 March 2008; revised manuscript received 6 June 2008)

Abstract

The non-Noether conserved quantities (the Hojman conserved quantity) for nonholonomic controllable mechanical systems with relativistic rotational variable mass are discussed. The differential equations of motion of the systems are established. The definition and criterion of the Mei symmetries and the Lie symmetries of the system are discussed respectively. The necessary and sufficient condition under which the Mei symmetry is Lie symmetry is presented. The condition under which a non-Noether conserved quantity can be induced by the Mei symmetries and the form of the conserved quantity are obtained. An example is presented to illustrate the application of the result.

Keywords: relativity rotation, nonholonomic controllable mechanical system, variable mass, non-Noether conserved quantity

PACC: 0320, 0330

* Project supported by the Key Disciplines' building foundation of Henan Institute of Education.

† E-mail: xialilixialili@yahoo.com.cn