

# T-C 模型中光场和原子以及原子与原子之间的纠缠演化\*

郭 亮 梁先庭†

(宁波大学近代物理研究所与物理系, 宁波 315211)

(2008 年 4 月 5 日收到 2008 年 7 月 7 日收到修改稿)

研究了 T-C 模型中的二能级原子与单模场以及两个二能级原子之间不同初态的纠缠演化. 发现, 它们之间的形成纠缠是周期演化的, 不同初态纠缠演化的周期不同. 在一类  $W$  初态下两原子之间还出现所谓的纠缠猝灭现象.

关键词: T-C 模型, 纠缠度, 纠缠猝死

PACC: 0365, 0367

## 1. 引 言

Tavis-Cummings 模型<sup>[1]</sup> (T-C 模型) 是原子与光场相互作用的一个经典模型. 从上个世纪六、七十年代开始, 该模型便获得广泛深入的研究, 并已是硕果累累<sup>[2-4]</sup>. 纠缠是量子系统独有的一种性质, 没有经典对应, 它描述的是量子系统各子系统之间的量子关联. 纠缠是量子信息与量子计算所依赖的基本性质之一. 量子系统的纠缠有诸多潜在的应用, 纠缠的产生与保持都不容易实现, 而且对混态与多体纠缠的度量也存在很多基本的困难. 因此, 近年来学术界对纠缠态的制备、纠缠态的演化做了广泛的研究. 这对量子信息与量子计算<sup>[5-13]</sup> 具有强有力的推动作用.

本文在不考虑原子与环境相互作用的情况下, 研究了 T-C 模型中原子与光场以及原子与原子之间的纠缠演化. 研究表明, 场模与原子、原子与原子之间的纠缠是周期演化的, 但是原子与原子之间出现了所谓的纠缠猝灭现象. 本文用 Wootters 的形成纠缠度做度量工具, 系统初态选为类  $W$  态.

## 2. 模 型

在 T-C 模型中两个全同原子和光场的相互作用哈密顿量为

$$H = \omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \omega \sum_{i=1}^2 |e_i\rangle \langle e_i| + \lambda \sum_{i=1}^2 (a \sigma_i^\dagger + \sigma_i a^\dagger), \quad (1)$$

这里  $a$  和  $a^\dagger$  为光场湮没和产生算符,  $\sigma_i^\dagger = |e_i\rangle \langle g_i|$  和  $\sigma_i = |g_i\rangle \langle e_i|$  为第  $i$  个原子上升与下降算符,  $\lambda$  是原子和光场的耦合系数.

### 2.1. 初态为类 $W$ 态 $|\psi_0^1\rangle$ 的情况

假定光场与两原子处在类  $W$  态  $|\psi_0^1\rangle$  下, 这里我们取  $|\psi_0^1\rangle$  为

$$|\psi_0^1\rangle = a |eg0\rangle + b |ge0\rangle + c |gg1\rangle, \quad (2)$$

其中

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1. \quad (3)$$

从这个初态出发, 由薛定谔方程可以得到任意时刻  $t$  的态矢量为

$$|\psi_t^1\rangle = x |eg0\rangle + y |ge0\rangle + z |gg1\rangle, \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} x &= \exp\left(-i \frac{3}{2} \omega t\right) \left[ \frac{1}{2} a (\cos\theta + 1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} b (\cos\theta - 1) - ic \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta \right], \\ y &= \exp\left(-i \frac{3}{2} \omega t\right) \left[ \frac{1}{2} a (\cos\theta - 1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} b (\cos\theta + 1) - ic \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta \right], \end{aligned}$$

\* 国家自然科学基金(批准号: 10675066) 宁波市自然科学基金(批准号: 2008A610098) 和王宽诚幸福基金资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: xliang@ustc.edu

$$z = \exp\left(-i \frac{3}{2} \omega t\right) \left[ -\frac{1}{\sqrt{2}} i a \sin \theta - i \frac{1}{\sqrt{2}} b \sin \theta + c \cos \theta \right]. \quad (5)$$

这里  $\theta = \sqrt{2} \lambda t$ .

首先,我们来计算光场和原子之间的纠缠演化. 根据量子力学密度矩阵的定义,由(4)式和标准基矢  $\{|e0\rangle, |e1\rangle, |g0\rangle, |g1\rangle\}$ , 我们得到 T-C 模型中光场和原子的相互作用的密度矩阵为

$$\rho_{13} = \begin{pmatrix} |x|^2 & 0 & 0 & zx^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |y|^2 & 0 \\ xz^* & 0 & 0 & |z|^2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

下面我们采用 Wootters 意义的形成纠缠度  $\alpha(\rho_{13})$  来度量纠缠. 根据 Wootters 在 1997 年给出的定义<sup>[14]</sup>

$$\alpha(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (7)$$

由(7)我们可以得到 T-C 模型中原子与光场在任意时刻的纠缠度为

$$\alpha(\rho_{13}) = 2 \max\{0, |xz^*|\}. \quad (8)$$

由(5)和(8)式,得到如下三种情况下态  $\rho_{13}$  的纠缠度:

1) 当  $a = b = c = \sqrt{3}/3$  或  $c = \sqrt{6}/3, a = b = 1/\sqrt{6}$  时,

$$\alpha(\rho_{13}) = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 1 \right)^{1/2}; \quad (9a)$$

2) 当  $a = \sqrt{6}/3, b = c = 1/\sqrt{6}$  时,

$$\alpha(\rho_{13}) = \frac{1}{12} (98 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 84 \sin^2 \theta \cos \theta + 14 \sin^2 \theta + 24 \cos \theta + 40)^{1/2}; \quad (9b)$$

3) 当  $b = \sqrt{6}/3, a = c = 1/\sqrt{6}$  时,

$$\alpha(\rho_{13}) = \frac{1}{12} (98 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 84 \sin^2 \theta \cos \theta + 14 \sin^2 \theta - 24 \cos \theta + 40)^{1/2}. \quad (9c)$$

由(9)式我们可以作出光场和原子的纠缠度  $\alpha(\rho_{13})$  关于  $\theta$  的图像,横坐标为  $\theta$ ,纵坐标为  $\alpha(\rho_{13})$  (如图 1).

图 1 中纠缠度都是周期演化的.但是(9b)与(9c)式演化的周期的是(9a)式演化的周期的 4 倍.(9b)与(9c)式即  $a = \sqrt{6}/3, b = c = 1/\sqrt{6}$ , 与  $b = \sqrt{6}/3, a = c = 1/\sqrt{6}$  时,纠缠在某些时候会出现很小

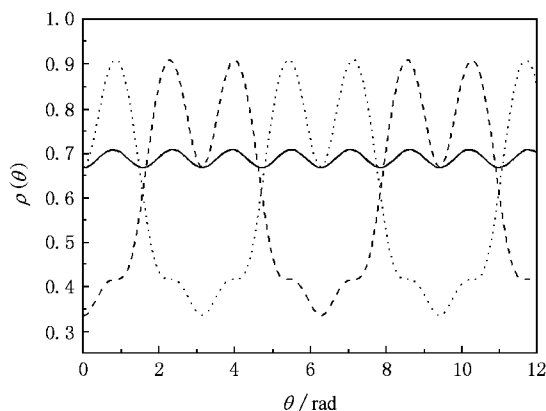


图 1 初态为  $|\phi_0^1\rangle$  时光场和原子的纠缠度  $\alpha(\rho_{13})$  的演化图(实线、点线、虚线分别代表(9a)(9b)(9c)式的纠缠度关于  $\theta$  的图像)

的值,但是这些值并不等于零,因此原子与光场之间的纠缠没有所谓的猝死现象<sup>[2]</sup>.

其次,我们来计算两个原子之间纠缠演化.由(4)式和标准基矢  $\{|ee\rangle, |eg\rangle, |ge\rangle, |gg\rangle\}$  可以得到原子和原子相互作用的密度矩阵为

$$\rho_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |x|^2 & xy^* & 0 \\ 0 & yx^* & |y|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |z|^2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

由(7)我们可以得到 T-C 模型中原子与原子在任意时刻的纠缠度为

$$\alpha(\rho_{12}) = 2 \max\{0, |xy^*|\}. \quad (11)$$

由(5)和(11)式,得

当  $a = b = c = \sqrt{3}/3$  时,

$$\alpha(\rho_{12}) = 1/3 + (\cos^2 \theta)/3; \quad (12a)$$

当  $a = \sqrt{6}/3, b = c = 1/\sqrt{6}$  或  $b = \sqrt{6}/3, a = c = 1/\sqrt{6}$  时,

$$\alpha(\rho_{12}) = (49 \cos^4 \theta + 6 \cos^2 \theta + 9)^{1/2}/12; \quad (12b)$$

当  $a = b = 1/\sqrt{6}, c = \sqrt{6}/3$  时,

$$\alpha(\rho_{12}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta. \quad (12c)$$

由(12)式我们可以作出原子和原子的纠缠度  $\alpha(\rho_{12})$  关于  $\theta$  的图像,横坐标为  $\theta$ ,纵坐标为  $\alpha(\rho_{12})$  (如图 2).

从图 2 可以看出,当初态为  $|\phi_0^1\rangle$  时, T-C 模型中原子之间的纠缠度  $\alpha(\rho)$  是  $\theta$  的正弦函数或余弦函数,而且周期是相同的,只是振幅稍有不同,也没出现  $\alpha(\rho) = 0$  的情况.也就是说在这种情况下,没有出现量子纠缠猝死的现象.

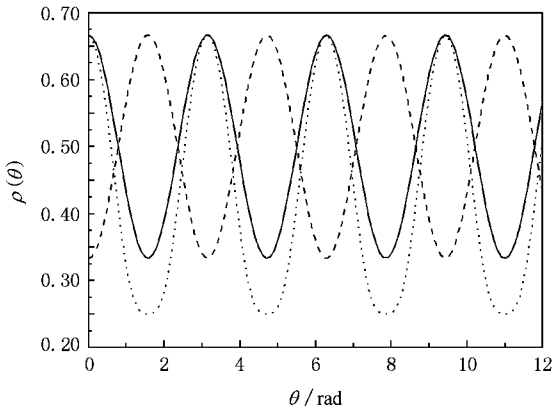


图2 初态为  $|\psi_0^1\rangle$  时原子和原子的纠缠度  $\alpha(\rho_{12})$  关于时间的演化图(实线、点线和虚线分别表示(12a)(12b)(12c)式的纠缠度关于  $\theta$  的图像)

## 2.2. 初态为类 W 态 $|\psi_0^2\rangle$ 的情况

若我们选取初态为另一种类 W 态  $|\psi_0^2\rangle$ , 这里  $|\psi_0^2\rangle$  定义为

$$|\psi_0^2\rangle = a|ge1\rangle + b|eg1\rangle + c|ee0\rangle, \quad (13)$$

其中

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1.$$

由这个初态可以得到系统任意  $t$  时刻的态矢量为

$$|\psi_t^2\rangle = x_1|ee0\rangle + x_2|eg1\rangle + x_3|ge1\rangle + x_4|gg2\rangle. \quad (14)$$

由薛定谔方程得

$$\begin{aligned} x_1 &= \exp\left(-i\frac{5}{2}\omega t\right) \left[ \frac{2}{3}\alpha(\cos\phi + 2) - i\frac{(a+b)}{\sqrt{6}}\sin\phi \right], \\ x_2 &= \exp\left(-i\frac{5}{2}\omega t\right) \left[ \frac{1}{2}\alpha(\cos\phi - 1) + \frac{1}{2}b(\cos\phi + 1) - ic\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\phi \right], \\ x_3 &= \exp\left(-i\frac{3}{2}\omega t\right) \left[ \frac{1}{2}a(\cos\phi + 1) + \frac{1}{2}b(\cos\phi - 1) - ic\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\phi \right], \\ x_4 &= \exp\left(-i\frac{5}{2}\omega t\right) \left[ \frac{\sqrt{2}}{3}\alpha(\cos\phi - 1) - i\frac{(a+b)}{\sqrt{3}}\sin\phi \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $\phi = \sqrt{2}\lambda t$ .

这里我们首先先看光场和原子之间的相互作用

用.由(14)式和标准基矢  $\{|e0\rangle, |e1\rangle, |g1\rangle, |g2\rangle\}$  得到一个原子和光场相互作用的密度矩阵为

$$\rho_{13} = \begin{pmatrix} |x_1|^2 & 0 & x_3x_1^* & 0 \\ 0 & |x_2|^2 & 0 & x_4x_2^* \\ x_1x_3^* & 0 & |x_3|^2 & 0 \\ 0 & x_2x_4^* & 0 & |x_4|^2 \end{pmatrix} \quad (16)$$

由(7)我们可以得到 T-C 模型中光场与原子在任意时刻的纠缠度为

$$\begin{aligned} \alpha(\rho_{13}) &= \{0, \alpha(|x_3|^2|x_2|^2 + |x_1|^2|x_4|^2 \\ &\quad - |x_3x_1^*x_2x_4^*| \\ &\quad - |x_4x_2^*x_1x_3^*|)^{0.5}\}. \end{aligned} \quad (17)$$

由(15)式和(17)式可以作出初态为  $|\psi_0^2\rangle$  时光场和原子的纠缠度  $\alpha(\rho_{13})$  关于  $\phi$  的图像(如图3),这里横坐标为  $\phi$ ,纵坐标为  $\alpha(\rho_{13})$ .

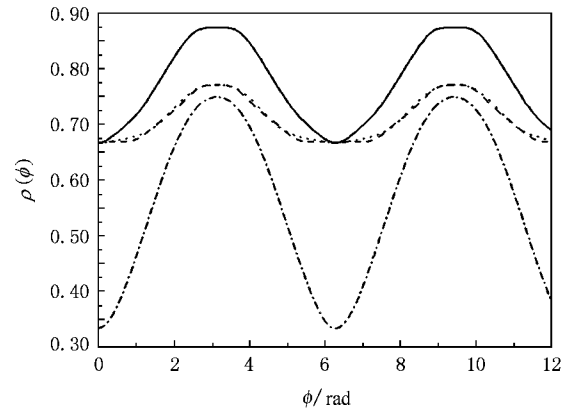


图3 初态为  $|\psi_0^2\rangle$  时光场和原子的纠缠度  $\alpha(\rho_{13})$  演化图(实线、点线、虚线、点线交错线分别代表  $a = b = c = \sqrt{3}/3$ ;  $a = \sqrt{6}/3, b = c = 1/\sqrt{6}$ ;  $b = \sqrt{6}/3, a = c = 1/\sqrt{6}$  和  $c = \sqrt{6}/3, a = b = 1/\sqrt{6}$  时,  $\alpha(\rho_{13})$  关于  $\phi$  的图像)

由图3可以看出,这些曲线的周期同为  $2\pi$  时,在  $a = \sqrt{6}/3, b = c = 1/\sqrt{6}$  和  $b = \sqrt{6}/3, a = c = 1/\sqrt{6}$  情况下的曲线几乎重合,四条曲线的变化趋势几乎相同,而且都在  $2n\pi$  处出现了很小的值,也就是说在有些点上光场和原子纠缠度最小,但仍然不是纠缠猝死点.

其次,我们来看一下初态为  $|\psi_0^2\rangle$  时 T-C 模型两原子之间的相互作用情况.由(14)式和标准基矢  $\{|ee\rangle, |eg\rangle, |ge\rangle, |gg\rangle\}$  可以得到一个原子和光场相互作用的密度矩阵为

$$\rho_{12} = \begin{pmatrix} |x_1|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |x_2|^2 & x_2 x_3^* & 0 \\ 0 & x_3 x_2^* & |x_3|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |x_4|^2 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

根据(7)式可以得到任意时刻的纠缠度为

$$\alpha(\rho_{12}) = 2\max\{0, |x_2 x_3^*| - |x_1 x_4^*|\}. \quad (19)$$

由(15)式和(19)式可以作出原子与原子的纠缠度 $\alpha(\rho_{12})$ 关于 $\phi$ 的图像,横坐标为 $\phi$ ,纵坐标为 $\alpha(\rho_{12})$ ,如图4所示.

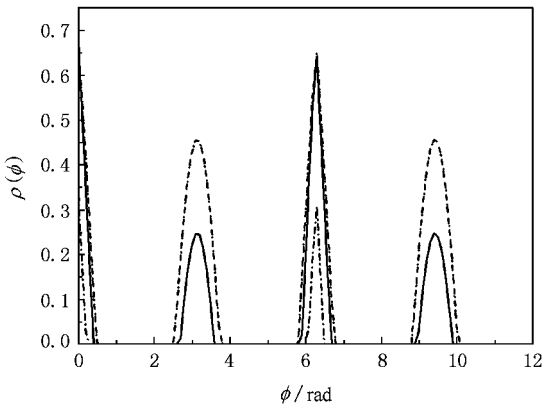


图4 初态为 $|\psi_0^2\rangle$ 时原子与原子的纠缠度 $\alpha(\rho_{12})$ 的演化图(实线、点线、虚线、点线交错线分别代表 $a = b = c = \sqrt{3}/3$ ;  $a = \sqrt{6}/3, b = c = 1/\sqrt{6}$ ;  $b = \sqrt{6}/3, a = c = 1/\sqrt{6}$ 和 $c = \sqrt{6}/3, a = b = 1/\sqrt{6}$ 时 $\alpha(\rho_{12})$ 关于 $\phi$ 的图像)

由图4不难看出这四条曲线中有三条是重合的,有一条的振幅是其他三条的一半,而且这四条曲线的周期是一样的.在这个图上出现了前三个图没出现的情况,就是出现 $\alpha(\rho_{12}) = 0$ 的情况,也就是说

原子与原子纠缠消失现象,并且是周期性出现的.在这些 $\alpha(\rho_{12}) = 0$ 的地方,原子处于非纠缠状态,这就是说在这种情况下出现了所谓的纠缠猝死现象.

### 3. 结 论

本文研究了 T-C 模型中光场和原子以及原子与原子的纠缠演化问题,通过作图提供了光场和原子以及原子与原子之间形成纠缠度随时间演化的直观图像.结果表明, T-C 模型中光场和原子之间纠缠的演化呈现周期性,即在某一时刻光场和原子处于纠缠的最大值.同时本文还讨论了 T-C 模型中两个原子之间纠缠演化问题,研究表明原子之间纠缠度也是随时间呈现周期性变化的,但是不同初态其演化的周期也不同.在 T-C 模型的初态为 $|\psi_0^2\rangle = a|ge1\rangle + b|eg1\rangle + c|ee0\rangle$ 时,得到了一个有趣的现象,即在某些时刻原子与原子之间的纠缠突然消失,一段时间后又突然出现,这就是所谓的纠缠猝死现象.实际上,这个现象是合理的.因为在 $|\psi_0^2\rangle$ 中,若只发生 $b|eg1\rangle \rightarrow b|ee0\rangle$ 这样的物理过程,原子与原子之间就不存在纠缠了.这样,便出现纠缠突然消失,即所谓的纠缠猝死现象.而这样的过程在该系统中是有一定的概率发生的.初态为 $|\psi_0^1\rangle$ 时不会出现这种现象.值得注意的是,本文没有考虑原子与环境的相互作用,事实上环境与原子之间的相互作用是不可避免的<sup>[15]</sup>.环境与原子之间的相互作用必将使得系统的纠缠减小,这方面的进一步研究仍在进行之中.

[1] Tavis M, Cummings F W 1968 *Phys. Rev.* **170** 379  
 [2] Wang C Z, Fang M F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1989 (in Chinese)  
 [王诚志、方卯发 2002 物理学报 **51** 1989]  
 [3] Yu T, Eberly 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 140404  
 [4] Huang C J, Zhou M, Li J F, He H Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 805  
 (in Chinese) [黄春佳、周明、厉江帆、贺慧勇 2002 物理学报 **51** 805]  
 [5] Zhang Q, Zhang E Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1684 (in Chinese)  
 [张权、张尔扬 2002 物理学报 **51** 1684]  
 [6] Wu H J, Xia Y J 1997 *Chin. Phys. Lett.* **14** 808  
 [7] Xia Y J, Kong X H, Yan K Z 1996 *J. Optoelectronics. Laser* **7** 244  
 (in Chinese) [夏云杰、孔祥珂柱 1996 光电子·激光 **7** 244]

[8] Zheng S B, Guo G C 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2392  
 [9] Vedral V 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2275  
 [10] Vedral V 1997 *Phys. Rev. A* **56** 4452  
 [11] Vedral V, Plenio M B 1998 *Phys. Rev. A* **57** 1619  
 [12] Li Ch Z 2000 *The quantum communication and quantum computation.* (Changsha: National University of Defense Technology Publishing House) 135 (in Chinese) [李承祖 2000 量子通信和量子计算(长沙:国防科技大学出版社) 135]  
 [13] Yan K Zh, Kong X H, Xia Y J 1998 *Acta. Optica. Sinica* **18** 717  
 (in Chinese) [闫珂柱、孔祥和、夏云杰 1998 光学学报 **18** 717]  
 [14] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245  
 [15] Liang X T 2006 *Phys. Rev. Lett.* **A 349** 98

# Entanglement evolution of field-atom and atom-atom in Tavis-Cummings model<sup>\*</sup>

Guo Liang Liang Xian-Ting<sup>†</sup>

( *Department of Physics and Institute of Modern Physics , Ningbo University , Ningbo 315211 , China* )

( Received 5 April 2008 ; revised manuscript received 7 July 2008 )

## Abstract

In this paper we have investigated the entanglement evolutions between a two-level atom and a single-mode field as well as two two-level atoms in different W-like initial states in T-C model. It is shown that the evolutions of the formation entanglement between them are periodical , and the periods of the entanglement evolutions are different according to the difference of the initial states. The so-called sudden death of entanglement occurs between two atoms as the initial states is some W-like initial state.

**Keywords** : Tavis-Cummings model , entanglement , sudden death of entanglement

**PACC** : 0365 , 0367

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10675066 ) , Natural Science Foundation of Ningbo City ( Grant No. 2008A610098 ) and K C Wong Magna Foundation in Ningbo University.

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : xliang@ustc.edu