第 58 卷 第 1 期 2009 年 1 月
1000-3290/2009/58(01)/0690-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.58,No.1,January,2009

计算光在引力场中偏折的新方法*

任继荣 朱 辉†

(兰州大学理论物理研究所,兰州 730000)

(2008 年 3 月 20 日收到;2008 年 7 月 4 日收到修改稿)

利用光的量子论,能量守恒及弱等效原理得出电磁波传播在几何近似下,光线在引力场中的偏转角和波矢的关系. 利用引力场中电磁波方程,在弱场近似下给出了一般的计算光线偏转角度的方法. 具体计算了 Schwarzchild 引力场中光线的偏折及 Kerr-Newman 引力场中光线的偏折.

关键词:引力场, 电磁波方程, 能量守恒, 弱场近似

PACC:9690

1. 引　　言

在计算光线的引力偏折时,有多种方法. 第一种是求解测地线方程来得到偏转角. 这种方法的缺点是对不同形式的度规进行计算时,运算量太大,不具有清晰的物理图像,即在求解光的测地线方程时因光的间隔为零而利用其他参数求解不能给出有力的物理解释. 第二种方法是把光看作电磁波,文献[1]中利用电磁波在引力场中的波前方程,在弱引力近似下得到了光线偏转角的公式. 第三种方法仍然把光看作电磁波,在文献[2]中把引力场的作用利用等效折射率体现出来. 把经典的费马光学定理推广到引力场中,利用变分原理求得光线偏转角. 本文利用光的量子论,光既是电磁波,也是光子的集合. 光子在引力场中满足能量守恒. 利用能量守恒可得对应的总波矢在不同的引力场点间满足的关系. 然后利用光在引力场中的方程,在弱引力近似下求解光在特定方向(最开始的传播方向)上的波动方程,得到此方向上波矢随距离变化的关系. 然后利用总波矢,特定方向的波矢求出光线偏转角. 最终分别计算了弱引力近似下 Schwarzchild 引力场,Kerr-Newman 引力场中光线的偏折.

2. 引力场中的能量守恒原理及几何光学近似下光线偏转角和波矢改变的关系

在一个稳恒引力场中($g_{\mu\nu}$ 与 t 无关)光经过引力势不同的两点时会发生引力频移. 利用光的量子论,能量守恒及弱等效原理,光子在引力场中的总能量为

$$h\nu\sqrt{1+\frac{2\chi}{c^2}}, \tag{1}$$

χ 为引力势,ν 为光的频率. 由引力场中两点能量守恒,可得

$$h\nu_1\sqrt{1+\frac{2\chi_1}{c^2}} = h\nu_2\sqrt{1+\frac{2\chi_2}{c^2}}. \tag{2}$$

由(2)式可得到光的引力频移公式

$$\frac{\nu_1}{\nu_2}=\frac{\sqrt{1+\frac{2\chi_2}{c^2}}}{\sqrt{1+\frac{2\chi_1}{c^2}}}, \tag{3}$$

这和由不同引力势两点固有时 $\mathrm{d}\tau$ 不同而推得的公式相同. 当 $\frac{\chi}{c^2}\leqslant 1$ 时,把光子在引力场中的能量展开

---

* 国家自然科学基金和兰州大学萃英人才建设计划资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail:zhuhui2007@lzu.cn

$$h\nu\sqrt{1+\frac{2\chi}{c^2}}=h\nu+\frac{h\nu\chi}{c^2}+\cdots \tag{4}$$

等式右边第一项为光子自身量子化能量，第二项是光子引力势能的一部分．在弱引力近似下，$\frac{h\nu\chi}{c^2}$可认为是光子的势能．如果在推导光的频移公式时，只取(4)式的前两项，可得

$$\frac{\nu_1}{\nu_2}=\frac{1+\frac{\chi_2}{c^2}}{1+\frac{\chi_1}{c^2}}, \tag{5}$$

上式是 Weinberg[3] 给出的引力频移公式的另一推导．在强引力作用下，引力势能不再是$\frac{h\nu\chi}{c^2}$，它只是引力势能的一部分，(5)式不再适用．

假设有平面光波(频率 ν_0)从无限远出发，在星体(球对称，质量为 M，半径为 R)引力作用下，擦着星体的边缘传至无穷远处．其波矢大小和方向都会改变．以星体中心为原点，光子在此引力场中运动，动量为 $\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}$，在无限远处 $\boldsymbol{k}$ 沿 z 方向，大小为 k_0，无引力作用．当光到达星体边缘时，其波矢用 k_r 表示．z 方向上的波矢用k_z 表示．在几何光学近似下，光线传到星球边缘偏转的角度和波矢 k_r 与波矢 k_z 所夹的角一致．设这个角为 δ．由光路可逆和引力场的球对称性知，当光线再传到无限远处，偏折的总角度为 2δ．则光线的偏转角度和波矢有如下关系：

$$\tan\delta=\sqrt{\frac{k_r^2-k_z^2}{k_z^2}}, \tag{6}$$

利用(2)式求出 $k_r=\frac{k_0}{\sqrt{1+\frac{2\chi_r}{c^2}}}$，$\chi_r$ 为星体表面引力势．只要知道 k_z，就可计算总偏转角．

3．电磁波方程在弱引力场的近似求解

利用引力场中的电磁波方程来求解 k_z，对于随时间恒定的引力场，电磁场的方程为[4]

$$\nabla\times(\sqrt{g_{00}}\boldsymbol{B})=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}+\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0,$$

$$\nabla\cdot B=0,$$

$$\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{E}}{\sqrt{g_{00}}}\right)=4\pi\rho, \tag{7}$$

其中 g_{00}是坐标时上的度规．它是一个空间函数，实际上起着折射率的作用．令 $g_{00}=\exp 2\psi(r)$，$R_S=\frac{2GM}{c^2}$(Schwarzchild 半径)引力场中的等值介电常数与磁导率为 $\varepsilon=\mu=\exp(-\psi(r))$．由此得等值折射率 $n=\sqrt{\varepsilon\mu}=g_{00}^{-\frac{1}{2}}$．根据(7)式 Maxwell 方程变为

$$\nabla\times(\exp(\psi)\nabla\times\boldsymbol{E})+\frac{1}{c^2}\exp(-\psi)\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0,$$

$$\nabla\times(\exp(\psi)\nabla\times\boldsymbol{H})+\frac{1}{c^2}\exp(-\psi)\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=0. \tag{8}$$

在以下讨论中 $r\geqslant R_S$，设 $\boldsymbol{E}(r,t)=\boldsymbol{E}(r)\exp(\mathrm{i}\omega t)$的形式．其中 ω 为频率，$E(r)$满足

$$\nabla\times(\exp\psi\nabla\times\boldsymbol{E}(r))-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\exp(-\psi)\boldsymbol{E}(r)=0. \tag{9}$$

当考察的球面很小时，可作为平面波处理．现取传播方向为 z 方向，场量 E 则位于垂直 z 轴的平面．此时，体现引力影响的度规分量在光线偏转很小的情况下 $r\doteq z$，$g_{00}(r)\doteq g_{00}(z)$．

设电场方向为 x，$E_z(x,y)=0$，$E_x=E_x(z)$．把矢量方程化为标量方程．

$$\frac{\mathrm{d}^2E_x}{\mathrm{d}z^2}+\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}z}\right)\frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}z}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\exp(-2\psi(z))E_x=0, \tag{10}$$

令 $E_x(z)\equiv P(z)\exp\left(-\frac{1}{2}\psi\right)$则 $P(z)$方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}z^2}+\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\exp(-2\psi)-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}z^2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]P(z)=0. \tag{11}$$

在弱引力近似下，ψ 随距离变化的非常缓慢．$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}z}\to 0$，$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}z^2}\to 0$，波动方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2P(z)}{\mathrm{d}z^2}+\left(\frac{k_0^2}{g_{00}}\right)P(z)=0\quad(z\geqslant R_s). \tag{12}$$

由于 $z\geqslant R_s$，可用 WKB 方法求解．

$$P(z)=P_0\exp(\mathrm{i}k_0s(z)), \tag{13}$$

代入(12)式得

$$\left[\frac{\mathrm{i}}{k_0}\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}z^2}-\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z}\right)^2+\frac{1}{g_{00}}\right]P_0\exp(\mathrm{i}k_0s(z))=0. \tag{14}$$

略去$\frac{\mathrm{i}}{k_0}\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}z^2}$项，进行一次近似．

$$s(z) = \pm \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{g_{00}}}. \tag{15}$$

将上式迭代到(14)式中得

$$\frac{\mathrm{d}s(z)}{\mathrm{d}z} = \pm \left[\frac{1}{g_{00}} \mp \frac{\mathrm{i}}{2k_0} \left(g_{00}^{\frac{-3}{2}} \frac{\mathrm{d}g_{00}}{\mathrm{d}z} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

利用二项式展开,近似得

$$\frac{\mathrm{d}s(z)}{\mathrm{d}z} \doteq \pm \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} - \frac{\mathrm{i}}{4k_0} \frac{1}{g_{00}} \frac{\mathrm{d}g_{00}}{\mathrm{d}z}, \tag{17}$$

其中正负号表示不同传播方向,正号表示由星体向外沿 z 方向,负号表示由外向星球传播逆着 z 方向. 从波矢的大小相同而方向相反反映了光路的可逆性. 右边第一项反映 z 方向上波矢的变化,后面带有复数的一项与电场强度随 z 值的变化有关. 在弱场近似下,z 方向(沿 z 方向和逆 z 方向)上的电磁波波矢为随 z 值缓慢变化的函数 $k_z(z)$,$P(z)$ 的解进一步可以写成如下形式:

$$P(z) = P'(z)\mathrm{e}^{(\pm \mathrm{i}k_z(z)z)}, \tag{18}$$

其中 $P'(z)$ 反映电场强度的变化. 把(17)式积分代入(13)式和上式比较,可得

$$k_z(z) = \frac{k_0}{z} \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{g_{00}}}, \tag{19}$$

故在弱场近似下,星体表面 z 方向光波波矢为 $k_z(R)$(R 为星体半径).

4. Schwarzchild 引力场中光线的偏折

现在利用上面的理论来详细计算 Schwarzchild 度规下光线的引力偏折. 在 Schwarzchild 度规下

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 - \frac{2GM}{rc^2}, \\ g_{11} &= -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}, \\ g_{22} &= -r^2, \\ g_{33} &= -r^2 \sin^2(\theta), \end{aligned} \tag{20}$$

其余度规均为零. 令 $g_{00} = \exp(2\psi(r))$,星体表面的引力势 $\chi_r = -\frac{GM}{R}$(G 为引力常量)在 $\exp(2\psi) \doteq 1 - \frac{R_\mathrm{S}}{z}$. 波动方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2 P(z)}{\mathrm{d}z^2} + \left(\frac{k_0^2}{1 - \frac{R_\mathrm{S}}{z}} \right) \left[1 + \frac{R_\mathrm{S}}{2k_0^2 z^3} + \frac{3R_\mathrm{S}^2}{16k_0^2 z^4 \left(1 - \frac{R_\mathrm{S}}{z}\right)} \right] P(z) = 0. \tag{21}$$

对于一般星体,R_S 远小于星体的半径,(21)式后两项是 z^{-3} 的量级. 这和前面的理论是相一致的. 故略去. 方程简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}z^2} + \frac{k_0^2}{1 - \frac{R_\mathrm{S}}{z}} P(z) = 0 \quad (z > R_\mathrm{S}), \tag{22}$$

由于 $z \gg R_\mathrm{S}$,故 $\frac{k_0^2}{1 - \frac{R_\mathrm{S}}{z}}$ 变化很缓慢,可用 WKB 方法求解. 具体的求解就不重复了,只给出主要步骤.

$$\frac{\mathrm{d}s(z)}{\mathrm{d}z} = \mp \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_\mathrm{S}}{z}}} + \frac{\mathrm{i}}{4k_0} \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{R_\mathrm{S}}{z}} \right), \tag{23}$$

代入 $E_x(z)$ 的表达式中,得

$$E_x(z) = P(z) \exp \left(\mp \mathrm{i}k_0 \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1 - \frac{R_\mathrm{S}}{z}}} \right), \tag{24}$$

其中正负号表示不同传播方向. 求出上式指数里边的积分

$$E_x(z) = P(z) \exp \left(\pm \mathrm{i}k_0 z \left[\sqrt{1 - \frac{R_\mathrm{S}}{z}} + \frac{R_\mathrm{S}}{2z} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{R_\mathrm{S}}{z}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{R_\mathrm{S}}{z}}} \right) \right] \right), \tag{25}$$

故在弱场近似下,星体表面的光波波矢在 z 方向上大小为

$$k_z = k_0 \left[\sqrt{1 - \frac{R_\mathrm{S}}{R}} + \frac{R_\mathrm{S}}{2R} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{R_\mathrm{S}}{R}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{R_\mathrm{S}}{R}}} \right) \right], \tag{26}$$

R 为星体半径. 利用公式

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots \tag{27}$$

在弱引力近似下

$$k_z \doteq k_0 \left(1 + \frac{R_\mathrm{S}}{R}\right) \sqrt{1 - \frac{R_\mathrm{S}}{R}}, \tag{28}$$

$$k_r = \frac{k_0}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}} = \frac{k_0}{\sqrt{1 - \frac{R_\mathrm{S}}{R}}}. \tag{29}$$

把(28),(29)式代入(6)式得

$$\tan\delta = \sqrt{\frac{\dfrac{k_0^2}{1-\dfrac{R_S}{R}} - k_0^2\left(1+\dfrac{R_S}{R}\right)^2\left(1-\dfrac{R_S}{R}\right)}{k_0^2\left(1+\dfrac{R_S}{R}\right)^2\left(1-\dfrac{R_S}{R}\right)}}. \tag{30}$$

在忽略 R^{-3} 以上的量级，得

$$\tan\delta \doteq \frac{R_S}{R}\left(1+\frac{1}{2}\frac{R_S^2}{R^2}\right). \tag{31}$$

为了和用经典方法即测地线运动方程所得结果比较，进一步取近似．

$$\tan\delta = \frac{R_S}{R}\left(1+\frac{1}{2}\frac{R_s^2}{R^2}\right) \doteq \frac{R_S}{R}. \tag{32}$$

利用当 $\delta \ll 1$ 时，$\tan\delta \to \delta$，

$$2\delta = 2\frac{R_S}{R} = \frac{4GM}{c^2 R}. \tag{33}$$

上式即为经典总偏转角度．由近似的过程发现，经典的结果[4]要比实际的偏转角要小，上式计算的结果会更准确一些．

5．Kerr-Newman 引力场中光线的偏折

一个匀速转动的带电球体（电量 Q，质量为 M，角动量为 J）外部引力场由 Kerr 度规给出．假设球体的转速远小于光速，转轴在 z 方向上．光依然从无穷远处沿 z 方向传播，在 Kerr-Newman 引力场中发生偏转，传至无穷远．（以下的讨论还是在弱引力近似下）球体半径 $R \gg R_S$ 由于光线偏转角较小，变量 $r \doteq z$．由第 3 节的理论知道，偏转只和 g_{00} 有关．Kerr-Newman 度规的 g_{00} 分量为[4]

$$g_{00} = 1 - \frac{2mr - Q^2}{r^2 + a^2\cos^2(\theta)}, \tag{34}$$

其中 $m = \frac{GM}{c^2}$，$ac = \frac{J}{M}$．现在，假设 $Q=0$，$a \neq 0$ 既星体不带电但转动（绕 z 轴转动）．要求这里的转动速度远小于光速．有 $\frac{a}{r} \leqslant 1$ 且 $r \gg R_S$ 弱场情况下用 z 代替 r，可把 g_{00} 写为

$$g_{00} = 1 - \frac{R_S}{z} + \frac{a^2 R_S}{z^3}. \tag{35}$$

由上式可知在弱引力情况下，当 $z \gg R_S$ 时，$\frac{a^2 R_S}{z^3}$ 是三级小量．在从无穷远传至星球表面的过程中，变化幅度不大．

$$s(z) = \pm\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-\dfrac{R_S}{z}+\dfrac{ka^2 R_S}{R^3}}}, \tag{36}$$

引入参数 k 简化 $s(z)$ 的计算，其中 $k \in (0, 1)$

$$s(z) = \pm\frac{z}{1+\dfrac{ka^2R_S}{R^3}}\sqrt{1+\frac{ka^2R_S}{R^3}-\frac{R_S}{z}}, \tag{37}$$

$$s(z) = \pm\frac{R_S}{2\left(1+\dfrac{ka^2R_S}{R^3}\right)} \times \ln\frac{\sqrt{1+\dfrac{ka^2R_S}{R^3}}+\sqrt{1+\dfrac{ka^2R_S}{R^3}-\dfrac{R_S}{z}}}{\sqrt{1+\dfrac{ka^2R_S}{R^3}}-\sqrt{1+\dfrac{ka^2R_S}{R^3}-\dfrac{R_S}{z}}}. \tag{38}$$

由上式计算星体表面 k_z 及偏转角，公式将很复杂．为了得到星体低速旋转（表面速度远小于光速）对光线偏折的影响，取 $k=1$，星体表面 k_z 为下式：

$$k_z \doteq k_0\sqrt{1+\frac{a^2R_S}{R^3}-\frac{R_S}{R}}\left(1-\frac{a^2R_S}{R^3}+\frac{R_S}{R}\right), \tag{39}$$

$$k_r = \frac{k_0}{\sqrt{1+\dfrac{a^2R_S}{R^3}-\dfrac{R_S}{R}}}. \tag{40}$$

把 k_z，k_r 代入(6)式，取近似得

$$\tan\delta = \left(\frac{R_S}{R}-\frac{a^2R_S}{R^3}\right)\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{R_S}{R}-\frac{a^2R_S}{R^3}\right)^2\right), \tag{41}$$

在弱场近似下，有 $\tan\delta \doteq \delta$，则

$$\delta = \left(\frac{R_S}{R}-\frac{a^2R_S}{R^3}\right)\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{R_S}{R}-\frac{a^2R_S}{R^3}\right)^2\right). \tag{42}$$

现在对所得结果进行分析，发现低速转动对光线的影响 ε，其作用是让光线远离星体．其作用大小近似为

$$\varepsilon = \frac{a^2R_S}{R^3}. \tag{43}$$

由于转动速度远小于光速，a 值非常小．在弱引力近似下由于星体的转动对光线偏转的影响是 R^{-3} 级小量，在这种情况下转动对光线偏折的作用可以完全忽略．

6．结　　论

本文尝试了一种不同于利用经典的测地线方程来求解光在引力场中的偏转问题，即利用引力场中能量守恒，把光线看作电磁波传播的几何近似，利用求解引力场中的电磁波方程最终获得和经典方法一

致的结果. 同时发现在弱场近似下,影响光线变化(波矢)的主要因素是 g_{00}. 其物理意义是明显的, g_{00}反映了引力场势能的大小,也反映了引力场使光子(波矢)方向改变的能力大小和等效折射率的大小. 证实了光的波粒二象性质在引力场中也是成立的,进一步可以把这种弱引力近似方法推广到其他引力度规中.

[1] Jerzy Plebanski 1960 *Phys. Rev.* **118** 1396
[2] Xing-hao Ye, http://arxiv:07043.3485vl[gr-qc] 26 Apr 2007.
[3] Weinberg S 1972 *Gravitation and Cosmology* J. Wiley, New York
[4] Moller C 1952 *The Theory of Relativity*
[5] Liu Liao, Zhao Zheng 2004 *General Relativity* (Advanced Education Press)

A new method of calculating the deflection of light by gravitational field*

Ren Ji-Rong Zhu Hui†
(*Institute of Theoretical Physics, Lanzhou University, Lanzhou* 730000, *China*)

(Received 20 March 2008; revised manuscript received 4 July 2008)

Abstract

In this paper, we tried to find the relation between the deflection angle of light in the geometrical optic approximation of electromagnetic wave and wave vector according to the quantum theory of light, the energy conservation principle, and the weak equivalence principle. Using the electromagnetic wave equation in gravitational field, we give a general method of calculating the deflection of light by gravitational field under the condition of weak field approximation. Finally, the deflection angles in Schwarzchild metric and Kerr-Newman metric are calculated.

Keywords: gravitational field, electromagnetic wave equation, energy conservation principle, weak field approximation
PACC: 9690

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China.

† Corresponding author. E-mail: zhuhui2007@lzu.cn