

色噪声间关联的周期调制对单模 激光随机共振的影响

陈德彝 王忠龙

(三峡大学理学院物理系,宜昌 443002)

(2008 年 5 月 7 日收到,2008 年 7 月 7 日收到修改稿)

讨论色噪声驱动的单模激光系统在噪声间关联程度受时间周期调制情况下的随机共振.用线性化近似的方法计算了光强功率谱及信噪比.具体讨论色噪声情况下信噪比 R 受噪声强度 D, Q , 时间周期调制频率 Ω_λ 以及噪声自关联时间 τ_1, τ_2 和噪声间关联程度 λ 的影响.发现信噪比随噪声强度的变化呈单峰共振,信噪比随时间周期调制频率的变化呈周期性共振,而信噪比随噪声自关联时间的变化呈单调增长.

关键词:色噪声,时间周期调制,噪声间关联程度,周期性随机共振

PACC: 0540, 4260K

1. 引 言

激光通讯中的激光系统,要输入信号才能作为传递信息的工具.当输入信号为单一频率的谐波时,传递的信息量实际为零.只有当此谐波的振幅或频率受到调制时,即输入信号成为调幅波或调频波时,所传递的信息量才不为零.因此,考虑到激光通信的需要,激光系统中随机共振的研究必须输入调幅或调频的信号.张良英等研究了输入振幅调制信号和频率调制信号的情况下,激光系统的随机共振^[1,2].曹力、韩立波、程庆华等研究了信号对噪声调制情况下的激光系统的随机共振^[3-6].随着研究范围的扩展,我们考虑另一方面的调制,即对噪声间关联程度进行时间周期调制^[7],研究在受此调制的噪声驱动下的随机共振.

我们前段工作研究了关联程度受到周期调制的白噪声对激光系统随机共振的影响^[8].但白噪声仍属理想情况.为了更接近实际情况,本文进一步研究具有关联程度周期调制的色噪声对激光系统随机共振的影响.

本文首先推导色噪声驱动的具有噪声间关联程度时间周期调制的单模激光的光强关联函数和信噪比.然后讨论当 $\Omega_\lambda \neq n\Omega$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 时噪声参数 Q, D, λ 对信噪比的影响,以及噪声自关联时间 τ_1, τ_2 和时间周期调制频率 Ω_λ 对信噪比的影响.

2. 光强关联函数和信噪比

受信号调制的单模激光增益模型的光强朗之万方程为

$$\frac{dI}{dt} = -2KI + \frac{2\Gamma I}{1 + \beta I} + D + \frac{2I}{1 + \beta I} \xi(t) + 2\sqrt{I} \gamma(t) + A \cos(\Omega t), \quad (1)$$

方程(1)中噪声 $\xi(t)$ 和 $\gamma(t)$ 的统计性质为

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \gamma(t) = 0, \\ \xi(t)\xi(t') &= \frac{Q}{2\tau_1} \exp\left[-\frac{|t-t'|}{\tau_1}\right], \\ \gamma(t)\gamma(t') &= \frac{D}{2\tau_2} \exp\left[-\frac{|t-t'|}{\tau_2}\right], \\ \xi(t)\gamma(t') &= \langle \gamma(t)\xi(t') \rangle = 2\lambda \sqrt{QD} \\ &\quad \times \cos(\Omega_\lambda t) \delta(t-t'), \\ &\quad -1 \leq \lambda \leq 1. \end{aligned} \quad (2)$$

方程(1)中, I 表示光强, K 为损失系数, Γ 是增益系数, $\beta = \frac{\bar{A}}{\Gamma}$, 式中 \bar{A} 为自饱和系数, D 是量子噪声强度, Ω 为输入信号频率.(2)式中 Q 是抽运噪声强度, τ_1 是抽运噪声自关联时间, τ_2 是量子噪声自关联时间, λ 为噪声间关联程度, Ω_λ 是对 λ 的时间周期调制频率.

可求出稳态光强为 $I_0 = (\Gamma - K)/\beta K$, 在稳态光强 I_0 附近把方程(1)线性化,令 $I = I_0 + \epsilon(t)$, 其

中 $\epsilon(t)$ 为微扰项,代入方程(1)可得线性化方程

$$\frac{d\epsilon(t)}{dt} = -\gamma\epsilon(t) + D + \frac{2I_0}{1+\beta I_0}\xi(t) + 2\sqrt{I_0}\eta(t) + A\cos(\Omega t), \quad (3)$$

式中 $\gamma = \frac{2K(\Gamma-K)}{\Gamma}$. 对(3)式直接积分可得

$\epsilon(t')$,进而可求出

$$\epsilon(t') = \frac{D}{\gamma} - \left(\frac{D}{\gamma} + \frac{A\gamma}{\gamma^2 + \Omega^2} \right) e^{-\gamma t'} + \frac{A[\gamma\cos(\Omega t') + \Omega\sin(\Omega t')]}{\gamma^2 + \Omega^2}. \quad (4)$$

可计算出平均光强关联函数为

$$\begin{aligned} \langle I(t) \rangle &= \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{\langle I(t')I(t+t') \rangle}{t'} \\ &= \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{\Omega}{2\pi} \int_{t'}^{t+t'} I(t')I(t+t') dt \\ &= \left(I_0 + \frac{D}{\gamma} \right)^2 + \left(\frac{I_0}{1+\beta I_0} \right)^2 \\ &\quad \times \frac{2Q \left[\gamma\tau_1 \exp\left(-\frac{|t|}{\tau_1}\right) - \exp(-\gamma|t|) \right]}{\gamma^3\tau_1^2 - \gamma} \\ &\quad + \frac{2I_0 D \left[\gamma\tau_2 \exp\left(-\frac{|t|}{\tau_2}\right) - \exp(-\gamma|t|) \right]}{\gamma^3\tau_2^2 - \gamma} \\ &\quad + \frac{A\cos(\Omega t)}{2(\gamma^2 + \Omega^2)} + \frac{8\lambda\Omega\sqrt{I_0^3 QD} \exp(-\gamma|t|)}{\pi\Omega_\lambda(1+\beta I_0)\sqrt{4\gamma^2 + \Omega_\lambda^2}} \\ &\quad \times \left[2\gamma\sin\left(\frac{\Omega_\lambda}{\Omega}2\pi\right) - \Omega_\lambda \left(\cos\left(\frac{\Omega_\lambda}{\Omega}2\pi\right) - 1 \right) \right] \quad (5) \end{aligned}$$

进而计算出输出功率谱

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{\langle I(t+t')I(t') \rangle}{t'} e^{-i\omega t} dt \\ &= S_1(\omega) + S_2(\omega) + S_3(\omega), \end{aligned}$$

其中 输出信号功率谱为

$$S_1(\omega) = \frac{A^2}{4(\gamma^2 + \Omega^2)} [2\pi\delta(\omega - \Omega) + 2\pi\delta(\omega + \Omega)],$$

输出噪声功率谱是

$$\begin{aligned} S_2(\omega) &= \left(\frac{I_0}{1+\beta I_0} \right)^2 \frac{4Q}{\gamma^2\tau_1^2 - 1} \left(\frac{1}{\tau_1^{-2} + \omega^2} - \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2} \right) \\ &\quad + \frac{4I_0 D}{\gamma^2\tau_2^2 - 1} \left(\frac{1}{\tau_2^{-2} + \omega^2} - \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2} \right) \\ &\quad + \left(I_0 + \frac{D}{\gamma} \right)^2 2\pi\delta(\omega), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3(\omega) &= \frac{16\gamma\lambda\Omega\sqrt{I_0^3 QD}}{\pi\Omega_\lambda(1+\beta I_0)\sqrt{4\gamma^2 + \Omega_\lambda^2}\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}} \\ &\quad \times \left[2\gamma\sin\left(\frac{\Omega_\lambda}{\Omega}2\pi\right) - \Omega_\lambda \left(\cos\left(\frac{\Omega_\lambda}{\Omega}2\pi\right) - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

输出信号总功率为

$$P_s = \int_0^\infty S_1(\omega) d\omega = \frac{A^2}{4(\gamma^2 + \Omega^2)}.$$

$\omega = \Omega$ 处单位噪声谱的平均功率是

$$\begin{aligned} S_2(\omega = \Omega) &= \left(\frac{I_0}{1+\beta I_0} \right)^2 \frac{4Q}{\gamma^2\tau_1^2 - 1} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\tau_1^{-2} + \Omega^2} - \frac{1}{\gamma^2 + \Omega^2} \right) + \frac{4I_0 D}{\gamma^2\tau_2^2 - 1} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\tau_2^{-2} + \Omega^2} - \frac{1}{\gamma^2 + \Omega^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3(\omega = \Omega) &= \frac{16\gamma\lambda\Omega\sqrt{I_0^3 QD}}{\pi\Omega_\lambda(1+\beta I_0)\sqrt{4\gamma^2 + \Omega_\lambda^2}\sqrt{\gamma^2 + \Omega^2}} \\ &\quad \times \left[2\gamma\sin\left(\frac{\Omega_\lambda}{\Omega}2\pi\right) \right. \\ &\quad \left. - \Omega_\lambda \left(\cos\left(\frac{\Omega_\lambda}{\Omega}2\pi\right) - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

最后计算出输出信噪比

$$\begin{aligned} R &= \frac{P_s}{S_2(\omega = \Omega) + S_3(\omega = \Omega)} \\ &= \frac{A^2}{4(\gamma^2 + \Omega^2)} \left\{ \left(\frac{I_0}{1+\beta I_0} \right)^2 \frac{4Q}{\gamma^2\tau_1^2 - 1} \right. \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\tau_1^{-2} + \Omega^2} - \frac{1}{\gamma^2 + \Omega^2} \right) \\ &\quad + \frac{4I_0 D}{\gamma^2\tau_2^2 - 1} \left(\frac{1}{\tau_2^{-2} + \Omega^2} - \frac{1}{\gamma^2 + \Omega^2} \right) \\ &\quad + \frac{16\gamma\lambda\Omega\sqrt{I_0^3 QD}}{\pi\Omega_\lambda(1+\beta I_0)\sqrt{4\gamma^2 + \Omega_\lambda^2}\sqrt{\gamma^2 + \Omega^2}} \\ &\quad \left. \times \left[2\gamma\sin\left(\frac{\Omega_\lambda}{\Omega}2\pi\right) - \Omega_\lambda \left(\cos\left(\frac{\Omega_\lambda}{\Omega}2\pi\right) - 1 \right) \right] \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

3. 讨 论

3.1. τ_1 为参数时的 R - D 曲线分析

图1是 τ_1 为参数的 R - D 曲线. R - D 曲线出现极大值,即出现随机共振现象.且随着抽运噪声自关联时间 τ_1 的增大,共振峰幅度增大,极值位置不变.共振峰幅度随 τ_1 的增长呈非线性增长.从图1还可以看出,当量子噪声强度 D 很小时就出现了共振.

3.2. τ_2 为参数时的 R - D 曲线分析

τ_2 为参数的 R - D 曲线(图2)也出现极大值,即出现随机共振现象.与 τ_1 为参数的 R - D 曲线相同,随着量子噪声自关联时间 τ_2 的增大,共振峰幅度增

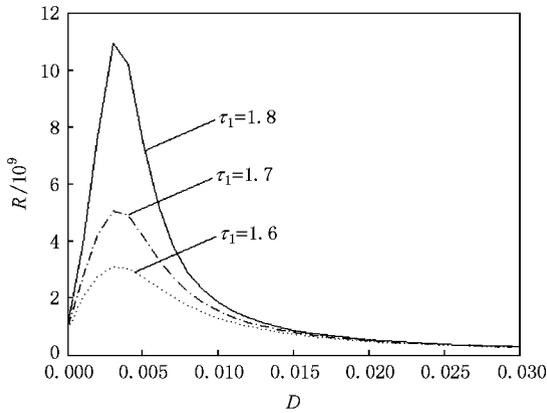


图 1 τ_1 为参数的 R - D 曲线 ($A = 8000, k = 2000, \Gamma = 6000, \lambda = -0.6, J_0 = 1, \Omega = 3, Q = 0.6, \tau_2 = 0.01, \Omega_\lambda = 2.3$)

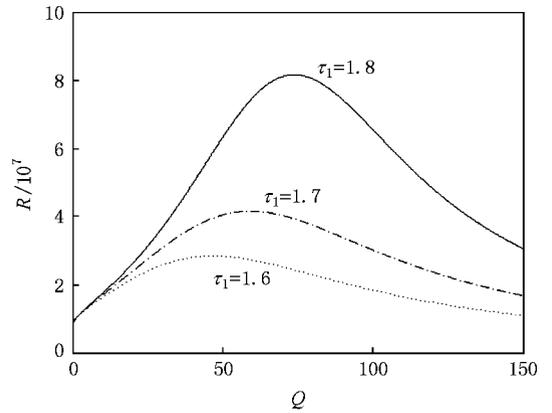


图 3 τ_1 为参数的 R - Q 曲线 ($A = 8000, k = 2000, \Gamma = 6000, \lambda = -0.6, J_0 = 1, \Omega = 3, D = 0.5, \tau_2 = 0.01, \Omega_\lambda = 2.3$)

大,共振峰幅度随 τ_2 的增长呈非线性增长.与 τ_1 为参数的 R - D 曲线不同的是极值位置随着量子噪声自关联时间 τ_2 的增大而向右移动,当 τ_2 很小,甚至 $\tau_2 = 0$ 时就开始出现共振.

似,但共振峰的幅度下降了,极值位置向右移动,共振峰在 Q 轴上的位置增加了二个数量级,表明抽运噪声引起的随机共振相比于量子噪声引起的随机共振强度较弱,且只有在抽运噪声较强的情况下,才会出现随机共振现象.

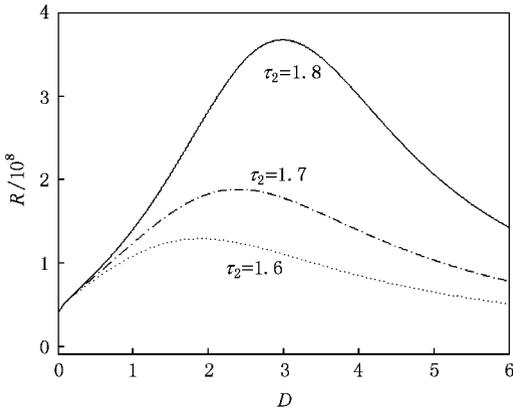


图 2 τ_2 为参数的 R - D 曲线 ($A = 8000, k = 2000, \Gamma = 6000, \lambda = -0.6, J_0 = 1, \Omega = 3, Q = 0.6, \tau_1 = 0.003, \Omega_\lambda = 2.3$)

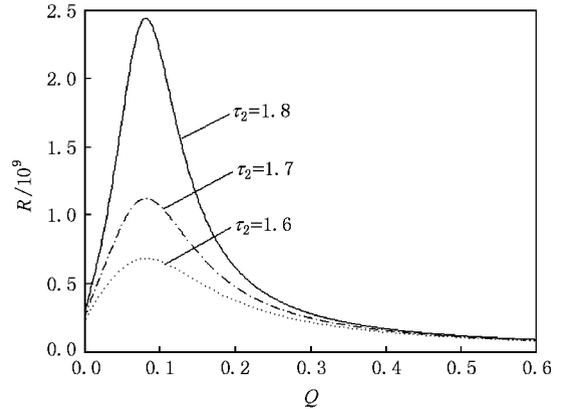


图 4 τ_2 为参数的 R - Q 曲线 ($A = 8000, k = 2000, \Gamma = 6000, \lambda = -0.6, J_0 = 1, \Omega = 3, D = 0.5, \tau_1 = 0.003, \Omega_\lambda = 2.3$)

3.3. τ_1 为参数时的 R - Q 曲线分析

图 3 是以 τ_1 为参数的 R - Q 曲线,有趣的是其曲线形状却与以 τ_2 为参数的 R - D 曲线图 2 基本相似,但共振峰的幅度下降了一个数量级,共振峰在 Q 轴上的位置增加了一个数量级,表明只有在抽运噪声较强的情况下,才会出现随机共振现象.

3.4. τ_2 为参数时的 R - Q 曲线分析

图 4 是以 τ_2 为参数的 R - Q 曲线.从图可见,其曲线形状却与以 τ_1 为参数的 R - D 曲线图 1 基本相

3.5. τ_1, τ_2 为参数时的 R - Ω_λ 曲线分析

噪声间关联程度 $\lambda > 0$ 时以 τ_1 为参数的 R - Ω_λ 曲线如图 5 所示.当 $\Omega_\lambda = 0$ 时,信噪比最小,随着 Ω_λ 的增大, R - Ω_λ 曲线开始时呈上升趋势,然后信噪比随 Ω_λ 的变化出现周期性共振.在抽运噪声为白噪声 ($\tau_1 = 0$) 和色噪声 ($\tau_1 \neq 0$) 情况下 R - Ω_λ 曲线形状不变,即共振周期不变,共振幅度随 Ω_λ 的增大而减小,最后共振幅度为零,信噪比趋于一稳定值.随着抽运噪声自关联时间 τ_1 的增大,整条曲线位置

上移,形状不变,但共振峰幅度增大.

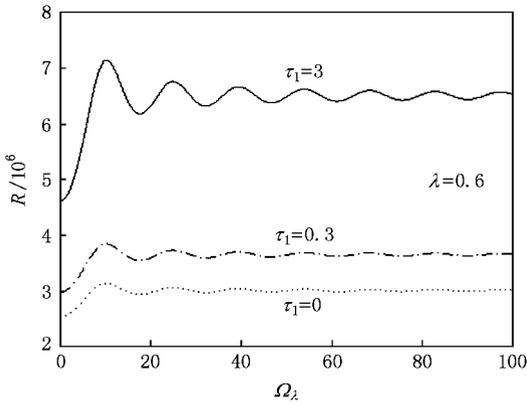


图5 τ_1 为参数的 $R-\Omega_\lambda$ 曲线 ($A = 8000, k = 2000, \Gamma = 6000, \lambda = 0.6, J_0 = 1, \Omega = 2.3, D = 0.6, \tau_2 = 0.01, Q = 4$)

图6是噪声间关联程度 $\lambda < 0$ 时以 τ_1 为参数的 $R-\Omega_\lambda$ 曲线,与噪声间关联程度 $\lambda > 0$ 值时以 τ_1 为参数的 $R-\Omega_\lambda$ 曲线(图5)基本上是对称的.与 $\lambda > 0$ 正好相反,当 $\lambda < 0, \Omega_\lambda = 0$ 时,信噪比最大,随着 Ω_λ 的增大, $R-\Omega_\lambda$ 曲线开始时呈下降趋势,然后信噪比随 Ω_λ 的变化出现周期性共振.其他特性与 $\lambda > 0$ 的情况相同.

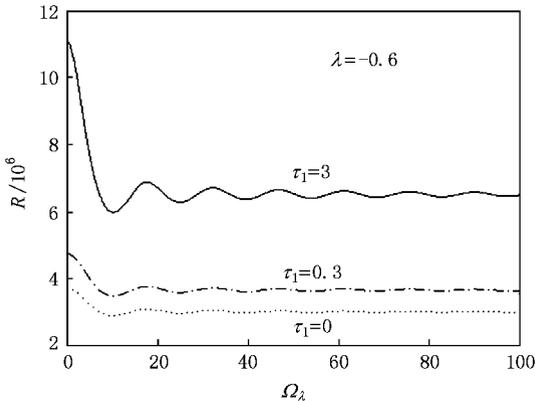


图6 τ_1 为参数的 $R-\Omega_\lambda$ 曲线 ($A = 8000, k = 2000, \Gamma = 6000, \lambda = -0.6, J_0 = 1, \Omega = 2.3, D = 0.6, \tau_2 = 0.01, Q = 4$)

以 τ_2 为参数的 $R-\Omega_\lambda$ 曲线与以 τ_1 为参数的 $R-\Omega_\lambda$ 曲线相似,仅曲线在纵轴的位置有所降低, $R-\Omega_\lambda$ 曲线对量子噪声自关联时间 τ_2 的变化不如

$R-\Omega_\lambda$ 曲线对抽运噪声自关联时间 τ_1 的变化敏感.

3.6. λ 为参数时的 $R-\tau_1, R-\tau_2$ 曲线分析

图7是以 λ 为参数的 $R-\tau_1$ 曲线. $R-\tau_1$ 曲线呈单调上升趋势,最后趋于饱和.且随着噪声间关联程度 λ 的增加,曲线斜率降低.以 λ 为参数的 $R-\tau_2$ 曲线,与 $R-\tau_1$ 曲线类似(图略).

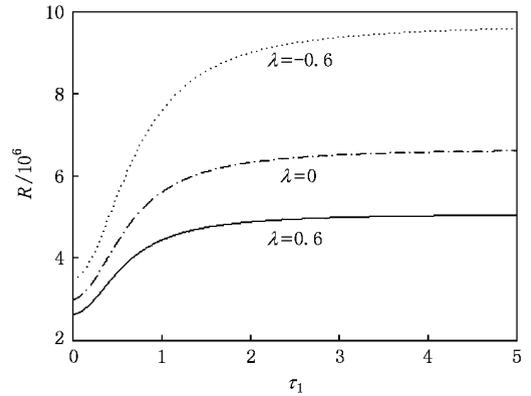


图7 λ 为参数的 $R-\tau_1$ 曲线 ($A = 8000, k = 2000, \Gamma = 6000, \Omega_\lambda = 3, J_0 = 1, \Omega = 2.3, D = 0.6, \tau_2 = 0.01, Q = 4$)

4. 结 论

根据以上讨论,可以归纳出,由于考虑色噪声 (τ_1, τ_2 不为零),出现了共振的多样性:

1. $R-D$ 和 $R-Q$ 曲线呈单峰共振,即通常的共振.发现以 τ_2 为参数的 $R-D$ 曲线(图2)与以 τ_1 为参数的 $R-Q$ 曲线(图3)相似,同时以 τ_1 为参数的 $R-D$ 曲线(图1)与以 τ_2 为参数的 $R-Q$ 曲线(图4)相似.特别当 $\tau_1 = \tau_2 = 0$ 时, $R-D$ 和 $R-Q$ 曲线均出现共振峰.

2. 从 $R-\Omega_\lambda$ 曲线(图5、图6)可以看出,出现了周期性随机共振,这是个新现象.之所以出现周期性随机共振,原因就在噪声间关联程度受到时间周期调制.

3. 但 τ_1, τ_2 这两个重要量则未发现随机共振(图7),而是随着 τ_1, τ_2 增大而单调增大,最后趋于饱和.发现不论 $\lambda > 0, \lambda < 0$ 还是 $\lambda = 0, R-\tau_1$ 和 $R-\tau_2$ 均按同样规律变化.



- [1] Zhang L Y , Cao L , Jin G X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6238(in Chinese)[张良英、曹 力、金国祥 2006 物理学报 **55** 6238]
- [2] Zhang L Y , Cao L , Jin G X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5093(in Chinese)[张良英、曹 力、金国祥 2007 物理学报 **56** 5093]
- [3] Cao L , Wu D J 2003 *Europhys. Lett.* **61** 593
- [4] Han L B , Cao L , Wu D J , Wang J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2127 (in Chinese) [韩立波、曹 力、吴大进、王 俊 2004 物理学报 **53** 2127]
- [5] Han L B , Cao L , Wu D J , Wang J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3363 (in Chinese)[韩立波、曹 力、吴大进、王 俊 2004 物理学报 **53** 3363]
- [6] Cheng Q H , Cao L , Wu D J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2556(in Chinese) [程庆华、曹 力、吴大进 2004 物理学报 **53** 2556]
- [7] Tessone C J , Wio H S , Hanggi P 2000 *Phys. Rev. E* **62** 4623
- [8] Chen D Y , Wang Z L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3333(in Chinese) [陈德彝、王忠龙 2008 物理学报 **57** 3333]

Effect of the time period modulation of color noise correlation intensity on the stochastic resonance of the single-mode laser

Chen De-Yi Wang Zhong-Long

(Department of Physics , College of Science , China Three Gorges University , Yichang 443002 , China)

(Received 7 May 2008 ; revised manuscript received 7 July 2008)

Abstract

Stochastic resonance is studied in single-mode laser driven by colored noise with time period modulation of the noise correlation intensity. By means of the linear approximation method , we calculate the power spectrum and signal-to-noise ratio of the laser intensity. Effects of the noise intensity D and Q , the time period modulation frequency Ω_λ , the noise self-correlation-time τ_1 and τ_2 , and the noise correlation intensity λ on the signal-to-noise ratio R are discussed. The results reveal that the evolution of the signal-to-noise ratio with the noise intensity shows the single-peak resonance , the evolution of the signal-to-noise ratio with the time period modulation frequency shows periodic resonance and the evolution of the signal-to-noise ratio with the noise self-correlation-time shows monotonic increase.

Keywords : color noise , time period modulation , noise correlation intensity , periodic stochastic resonance

PACC : 0540 , 4260K