第 58 卷 第 1 期 2009 年 1 月
1000-3290/2009/58(01)/0139-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.58, No.1, January, 2009

时滞离散神经网络的同步控制*

吴然超†
(安徽大学数学科学学院,合肥 230039)
(2008 年 6 月 17 日收到;2008 年 7 月 11 日收到修改稿)

利用既有效又便于实施的时滞状态反馈控制器,根据所给定的条件构造相应的不等式,研究了带有时滞的离散神经网络模型的同步控制问题,给出了该离散系统指数同步的充分条件.在设计同步控制的时候,没有假设激励函数的有界性、可微性和单调性,给出的条件简便易实施.数值结果进一步证明了该控制方法的有效性.

关键词:离散神经网络,时滞,同步
PACC:0545

1. 引 言

在最近的数十年里,人们对神经网络模型的动力学行为进行了大量的研究,并成功应用于多个领域,发挥了重要作用.随着混沌控制与同步的提出[1,2],有关混沌神经网络的控制与同步吸引了很多研究人员的兴趣,如文献[3—6].

在连续神经网络的实际应用及其数值计算过程中,需要考虑相应的离散系统.不仅如此,离散神经网络自身也有独特的动力学性质与广泛的应用领域[7—10].因此,对于此类离散系统的动力学研究具有重要的理论与实际意义.

本文考虑了带有时滞的离散神经网络系统的同步问题.目前关于此方面问题的研究结果较少.利用既有效又便于实施的时滞状态反馈控制器,根据所给定的条件构造相应的不等式,给出了该离散系统指数同步的充分条件.这些充分条件没有要求激励函数的有界性、可微性和单调性,比较简便、容易验证,对于模型的设计与实际应用非常有意义.

2. 预备知识

设 Z 是整数集,Z^+ 是非负整数集.设 $N(a,b)$ 表示从 a 到 b 的所有整数的集合,其中 $a \leqslant b, a, b \in \boldsymbol{Z}$,即 $N(a,b) = \{a, a+1, \cdots, b\}$.

考虑带有时滞的离散神经网络模型

$$x_i(n+1) = x_i(n)\mathrm{e}^{-a_i h} + \theta_i(h) \times \Big[\sum_{j=1}^{m} b_{ij} f_j(x_j(n-k)) + I_i\Big], \quad (1)$$

其中 $i = 1, \cdots, m$,$h \in (0, +\infty)$ 是离散化步长,系统(1)的初值为 $x_i(l) = \phi_i(l)$,$l \in N(-k, 0)$,$k \in \boldsymbol{Z}^+$,$\phi_i(l)$ 在 $N(-k,0)$ 上有界,且

$$\theta_i(h) = \frac{1-\mathrm{e}^{-a_i h}}{a_i}, n \in \boldsymbol{Z}^+.$$

注意到 $\theta_i(h) > 0$,且 $\theta_i(h) \approx h + O(h^2)$ 对充分小 $h > 0$ 成立,即 $h \to 0$ 时离散模型(1)趋于对应的连续系统.事实上,利用文献[7]中类似的隐式格式,便可得到离散系统(1).同步通常是指在两个或多个系统相位间的协调一致现象.比较常用的同步方式是主动-被动(驱动-响应)型,即其中一个系统为主动(驱动)系统,另一个则为被动(响应)系统.利用控制器将两个系统耦合起来,于是被动(响应)系统的动力学行为就会受主动(驱动)系统支配.在合适的控制器下,两个系统的动力学性态会达到同步.

假设主动(驱动)系统为(1),被动(响应)系统设为如下形式:

$$y_i(n+1) = y_i(n)\mathrm{e}^{-a_i h} + \theta_i(h) \times \Big[\sum_{j=1}^{m} b_{ij} f_j(y_j(n-k)) + I_i + u_i(n)\Big], \quad (2)$$

其中 $h, k, \theta_i(h)$ 与系统(1)中的对应参数相同,初

* 国家自然科学基金(批准号:10471059),安徽省自然科学基金(批准号:070416225),安徽省高校省级自然科学基金重点项目(批准号:KJ2007A003,KJ2008A025)资助的课题.

† E-mail:wuranchao@yahoo.com.cn

值为 $y_i(l) = \psi_i(l), l \in N(-k,0), \psi_i(l)$ 在 $N(-k,0)$ 上有界，$u_i(n)$ 是控制器，$i = 1,\cdots,m$.

定义同步误差为 $e_i(n) = y_i(n) - x_i(n)$，于是，由(1)和(2)式得如下同步误差系统：

$$e_i(n+1) = e_i(n)e^{-a_ih} + \theta_i(h) \times \{\sum_{j=1}^{m} b_{ij}[f_j(y_j(n-k)) - f_j(x_j(n-k))] + u_i(n)\}, \quad (3)$$

其中 $i = 1,\cdots,m$.

为了使系统(1)和(2)达到同步状态，需要选取适当的控制器，使得系统(3)渐近稳定. 为此我们选取如下的时滞状态反馈控制器：

$$u_i(n) = \sum_{j=1}^{m}[c_{ij}e_j(n) + d_{ij}e_j(n-k)], \quad i = 1,\cdots,m. \quad (4)$$

为了研究系统(1)和(2)的同步性，进一步假设

(H1)假设 $a_i, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, I_i \in \boldsymbol{R}, a_i > 0, k$ 是正整数，$i,j = 1,\cdots,m$；

(H2)假设函数 f_j 满足全局 Lipschitz 条件，即存在常数 $F_j > 0$，使得

$$|f_j(\xi) - f_j(\eta)| < F_j|\xi - \eta|,$$

对任意 $\xi,\eta \in \boldsymbol{R}$；

($H3$)假设存在常数 $\lambda_i > 0$，使得($i = 1,\cdots,m$)

$$\lambda_i a_i - \sum_{j=1}^{m}\lambda_j(|b_{ij}|F_j + |d_{ij}|) - \sum_{j=1}^{m}\lambda_j|c_{ij}| > 0.$$

系统(1)的解是一个向量值函数 $x: Z^+ \to R^m$. 对 $n \in \boldsymbol{Z}^+, x(n)$ 满足系统(1)及其初值. 定义

$$\| x(n) \| = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\{\lambda_i^{-1}|x_i(n)|\},$$

$$\| \phi \| = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\sup_{l\in N(-k,0)}\{\lambda_i^{-1}|\phi_i(l)|\}.$$

3. 主要结果

引理 在假设($H3$)下，存在 $\eta > 1$ 使得

$$\lambda_i(1 - \eta e^{-a_ih}) - \theta_i(h)\sum_{j=1}^{m}\lambda_j \times [(|b_{ij}|F_j + |d_{ij}|)\eta^{k+1} + \eta|c_{ij}|] > 0, \quad i = 1,\cdots,m. \quad (5)$$

证明 定义函数 $Y_i^*: (0,+\infty) \to R$，其中 $i = 1,\cdots,m$，

$$Y_i^*(\eta_i) = \lambda_i(1 - \eta_i e^{-a_ih}) - \theta_i(h)\sum_{j=1}^{m}\lambda_j \times [(|b_{ij}|F_j + |d_{ij}|)\eta_i^{k+1} + |c_{ij}|\eta_i].$$

由($H3$)，我们有

$$Y_i^*(1) = \lambda_i(1 - e^{-a_ih}) - \theta_i(h)\sum_{j=1}^{m}\lambda_j \times [|b_{ij}|F_j + |d_{ij}| + |c_{ij}|]$$
$$= \theta_i(h)[\lambda_i a_i - \sum_{j=1}^{m}\lambda_j \times (|b_{ij}|F_j + |d_{ij}| + |c_{ij}|)] > 0. \quad (6)$$

由 Y_i^* 的连续性，必存在 $\eta > 1$，使得 $Y_i^*(\eta) > 0, i = 1,\cdots,m$，即(7)式成立. 证毕

有了以上的准备工作，可以得到以下主要结论.

定理 假设($H1$—$H3$)成立，则系统(3)在以下意义下是全局指数稳定的:存在常数 $\eta > 1, C > 0$，使得对任意初值 ϕ 和 ψ，有

$$\| e(n) \| \leqslant C\left(\frac{1}{\eta}\right)^n \| \phi - \psi \|,\text{对任意 } n \in \boldsymbol{Z}^+.$$

证明 由(3)，(4)式及($H2$)，有

$$|e_i(n+1)| \leqslant |e_i(n)|e^{-a_ih} + \theta_i(h) \times \sum_{j=1}^{m}[(|b_{ij}|F_j + |d_{ij}|) \times |e_j(n-k)| + |c_{ij}||e_j(n)|].$$

令 $V_i(n) = \eta^n\lambda_i^{-1}|e_i(n)|$，其中 η 满足(5)，则有

$$V_i(n+1) \leqslant \eta V_i(n)e^{-a_ih} + \theta_i(h)\lambda_i^{-1} \times \sum_{j=1}^{m}[(|b_{ij}|F_j + |d_{ij}|) \times \eta^{1+k}V_j(n-k) + |c_{ij}|\eta V_j(n)]\lambda_j, \quad (7)$$

其中 $n \in \boldsymbol{Z}^+$. 令 $M = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\{\sup_{l\in N(-k,0)}\lambda_i^{-1}|e_i(l)|\}$. 显然 $V_i(l) \leqslant M$，对 $l \in \boldsymbol{N}(-k,0), i = 1,\cdots,m$ 成立. 我们断言

$$V_i(n) \leqslant M, \text{对 } i = 1,\cdots,m, n \in \boldsymbol{Z}^+ \text{ 成立}. \quad (8)$$

否则，必存在某一个指标 $r(1 \leqslant r \leqslant m)$ 和正整数 n_1，使得

$$V_r(n_1) > M, V_r(n) \leqslant M,$$

对 $n \in \boldsymbol{N}(-k, n_1 - 1)$，且

$$V_i(n) \leqslant M,$$

对 $i = 1,\cdots,m, i \neq r$，$n \in \boldsymbol{N}(-k, n_1 - 1)$. 其中 n_1 是使不等式(8)不成立的第一个正整数. 然而，由(7)和(5)式，有

$$M < V_r(n_1) \leqslant \eta V_r(n_1 - 1)e^{-a_rh} + \theta_r(h)\lambda_r^{-1} \times \sum_{j=1}^{m}(|b_{rj}|F_j + |d_{rj}|)$$

$$
\begin{aligned}
&\quad \times \lambda_j \eta^{1+k} V_j(n_1 - 1 - k) \\
&\quad + \theta_r(h) \lambda_r^{-1} \sum_{j=1}^{m} |c_{rj}| \lambda_j \eta V_j(n_1 - 1) \\
&\leqslant \{\eta e^{-a_r h} + \lambda_r^{-1} \theta_r(h) \\
&\quad \times \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [(|b_{rj}| F_j + | d_{rj} |) \eta^{1+k} \\
&\quad + |c_{rj}| \eta]\} M < M,
\end{aligned} \tag{9}
$$

显然矛盾．因此断言(8)成立．因此，

$$
|e_i(n)| \leqslant \lambda_i \left(\frac{1}{\eta}\right)^n M, i = 1, \cdots, m, n \in \mathbf{Z}^+ .
$$

这意味着系统(3)是全局指数稳定的，即

$$
\| e(n) \| \leqslant \left(\frac{1}{\eta}\right)^n \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \{ \sup_{l \in \mathrm{N}(-k,0)} \lambda_i^{-1} | \phi_i(l) - \psi_i(l) | \}.
$$

证毕

注　激励函数 f_j 通常假设为有界的，如文献[7—10]．但是，本文没有有界性、单调性和可微性的限制，而且指数同步的条件相对比较简便、容易实施．

由以上所得定理和引理，可以得到以下推论．

推论　假设($H1$—$H3$)成立，且成立

$$
a_i - \sum_{j=1}^{m} (| b_{ij} | F_j + | d_{ij} |) - \sum_{j=1}^{m} |c_{ij}| > 0, \quad i = 1, \cdots, m, \tag{10}
$$

则系统(3)全局指数稳定的，从而系统(1)和(2)指数同步的．

4. 数值模拟

考虑如下时滞离散神经网络系统：

$$
\begin{aligned}
x_1(n+1) &= x_1(n) e^{-3h} + \frac{1 - e^{-3h}}{3} \\
&\quad \times [f_1(x_1(n-1)) \\
&\quad - 0.5 f_2(x_2(n-1))] + I_1, \\
x_2(n+1) &= x_2(n) e^{-5h} + \frac{1 - e^{-5h}}{5} \\
&\quad \times [-0.5 f_1(x_1(n-1)) \\
&\quad + f_2(x_2(n-1))] + I_2,
\end{aligned} \tag{11}
$$

其中 $f_1(\xi) = f_2(\xi) = \tanh(\xi), h = \dfrac{1}{15}$．取

$$
\begin{aligned}
u_1(n) &= 0.25 e_1(n) - 0.25 e_2(n) \\
&\quad + e_1(n-1) + 0.5 e_2(n-1), \\
u_2(n) &= 0.5 e_1(n) + 0.5 e_2(n-1).
\end{aligned}
$$

于是，$F_1 = F_2 = 1$．当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时，条件(10)成立，因此，由以上所得结论，系统(11)与其响应系统具有指数同步性．见图1，2．

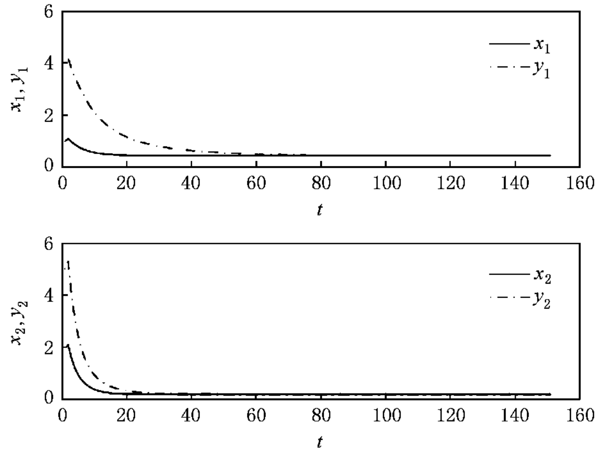

图 1　同步轨迹

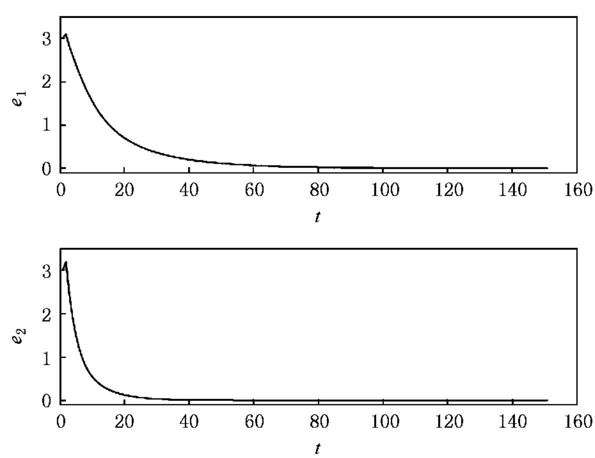

图 2　同步误差

5. 结　　论

利用既有效又便于实施的时滞状态反馈控制器，根据所给定的条件构造相应的不等式，在没有假设激励函数有界性、可微性、单调性的情况下，给出了时滞离散神经网络指数同步的充分条件，并且数值模拟结果进一步证明了该同步方法的有效性．此同步方法可以推广运用于其他类似的离散系统．

[1] Ott E, Grebogi C, Yorke J 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
[2] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
[3] Cao J, Li P, Wang W 2006 *Phys. Lett.* A **353** 318
[4] Lu H, Chen G R 2006 *Int. J. Bifurc. Chaos* **16** 3357
[5] He G G, Zhu P, Chen H P *et al* 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1040 (in Chinese) [何国光、朱萍、陈宏平等 2006 物理学报 55 1040]
[6] Tang Y, Fan J A, Zhang H H 2008 *Chin. Phys.* B **17** 4080
[7] Mohamad S, Gopalsamy K 2000 *Math. Comput. Simulation* **53** 1
[8] Liang J, Cao J, Ho D 2005 *Phys. Lett.* A **335** 226
[9] Liu X, Tang M L, Martin R *et al* 2007 *Phys. Lett.* A **367** 322
[10] Zhao H, Sun L, Wang G 2007 *Neurocomputing* **70** 2924

Synchronization of delayed discrete-time neural networks*

Wu Ran-Chao†

(*School of Mathematics, Anhui University, Hefei* 230039, *China*)

(Received 17 June 2008; revised manuscript received 11 July 2008)

Abstract

Using delayed state-feedback controller and analytic technique, the synchronization control of discrete-time neural network with delay is investigated. Sufficient conditions guaranteeing the synchronized behavior are obtained without assuming the boundedness and differentiability of activation functions. Numerical simulations show the effectiveness of the control scheme.

Keywords: discrete-time neural networks, delay, synchronization
PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10471059), the Natural Science Foundation of Anhui Province, China (Grant No. 070416225) and the Anhui Higher Education Institutions of China (Grant Nos. KJ2007A003, KJ2008A025).

† E-mail: wuranchao@yahoo.com.cn