

有 leader 的二阶动态多智能体网络的 L_2-L_∞ 控制

李 慧[†] 林 鹏 张春熹

(北京航空航天大学, 仪器科学与光电工程学院, 北京 100083)

(2008 年 8 月 7 日收到, 2008 年 10 月 15 日收到修改稿)

考虑系统噪声和时滞, 利用 L_2-L_∞ 控制理论研究了有 leader 的二阶定拓扑多智能体系统的协调一致问题. 工程应用中控制输出的极大值经常需控制在一定范围内, 并且考虑系统对位置变量和速度变量限制的范围不同, 分别针对位置和速度的控制输出设计了加权系数, 进而建立了多智能体系统的数学模型. 对有时滞和有时滞的两种网络拓扑, 利用李亚普诺夫函数, 分析了多智能体系统在满足 L_2-L_∞ 性能指标要求下, followers 和 leader 的位置与速度的一致问题. 并且以双线性矩阵不等式的形式, 分别给出了有时滞和有时滞网络系统能够达到一致的条件. 最后仿真结果验证了所获结果的有效性.

关键词: L_2-L_∞ 控制, 多智能体系统, 一致问题, 时滞

PACC: 0565, 8710

1. 引 言

多智能体系统是由多个可计算的智能体组成的集合, 其中每个智能体是一个物理的或抽象的实体, 能作用于自身和环境, 并与其他智能体通讯. 由于具有自主性、分布性及协调性等特点和自组织、学习及推理等能力, 多智能体技术广泛应用于无人飞行器联合控制, 编队控制, 交通控制, 智能机器人, 分布式传感器网络及通信网络拥塞控制等领域. 在多智能体系统的这些应用中, 单个智能体经常要在某些量(位置, 速度等)上与其余智能体趋于一致, 这就是所谓的一致问题. 一致问题是多智能体系统协调控制中需要解决的重要问题之一.

近几十年来, 多智能体的协调运动问题引起了研究人员的极大关注, 并做了大量的研究工作^[1-9]. 特别是, 有 leader 的多智能体的一致问题的研究非常活跃, 并获得了一系列相当好的研究成果^[10-13]. 这些研究主要通过引入 leader, 提出了一个分散控制策略, 使得多移动智能体跟随 leader 逐步地取得相对距离紧凑, 并且和 leader 逐步地取得相同的速度, 也就是 leader-following 一致问题.

在实际应用中噪声和时滞, 降低系统的性能指

标甚至导致系统振荡. 因此解决噪声和时滞对系统性能的影响具有非常重要的工程意义^[3-16]. 在文献 [9] 中, Lin 分别针对定拓扑以及变拓扑网络情况研究了存在噪声和时滞的多智能体的鲁棒 H_∞ 控制问题. Hong 等针对 leader 的速度未知的多智能体系统, 给出了 leader-following 稳定性准则^[10]. 文献 [11] 考虑时滞对多智能体系统的影响, 研究了多智能体网络的平均一致稳定问题.

在工程实践中, 由于控制输出需控制在一定范围内, 所以在研究噪声和时滞对系统性能影响的同时, 控制输出的极值问题也是非常重要的. 在控制理论和工程应用中, L_2-L_∞ 控制之所以具有非常重要的意义就在于其性能指标能使控制的输出值最小化^[17]. 因此在研究控制输出的极值问题时, L_2-L_∞ 控制在多智能体系统中具有非常重要的意义. 但是, 目前对于空间多智能体系统的 L_2-L_∞ 控制却还很少有文献提及. 本文的主要工作是利用 L_2-L_∞ 控制研究有 leader 的二阶多智能体网络的协调一致问题. 并根据实际工程中对位置和速度的控制输出要求的极值范围不同, 分别针对位置和速度设计了加权系数. 考虑系统存在的噪声, 针对带时滞和不带时滞的情况, 利用双线性矩阵不等式, 在保证闭环系统满足一定的 L_2-L_∞ 性能指标要求下, 分别给出

[†] E-mail: lihuibuaa@gmail.com

了鲁棒稳定的充分条件.

本文在第 2 部分,介绍了一些文中用到的图论知识,并定义了有 leader 的二阶多智能体网络的协调一致问题.在第 3 部分中,分别给出了无时滞网络和有时滞网络的稳定性分析.第 4 部分给出了仿真结果.最后在第 5 部分给出了结论.

2 预备知识

2.1. 图论基础

无向图 G 是一个三元组 $(\mathcal{V}, \varepsilon, \mathcal{A})$, 其中 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 称为 G 的节点集, 其元素称为 G 的节点; G 中节点在集合 $I = \{1, 2, \dots, n\}$ 中取值. 节点 v_i 的邻集表示为 $N_i = \{v_j \in \mathcal{V} | (v_i, v_j) \in \varepsilon\}$. $\varepsilon \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 称为 G 的边集, 其元素称为 G 的边; 边表示为 $e_{ij} = (v_i, v_j)$. 无向图是指如果当 e_{ij} 是图 G 的边时, e_{ji} 也是图 G 的边. a_{ij} 为边 e_{ij} 的权值, a_{ji} 为边 e_{ji} 的权值; 无向图 $a_{ij} = a_{ji}$. $\mathcal{A} = [a_{ij}]$ 称为邻接矩阵, \mathcal{A} 中的元素 $a_{ii} = 0$ 并且

$$\begin{aligned} a_{ij} &> 0, (v_i, v_j) \in \mathcal{A}(\mathcal{V}, \varepsilon, \mathcal{A}), \\ a_{ij} &= 0, (v_i, v_j) \notin \mathcal{A}(\mathcal{V}, \varepsilon, \mathcal{A}). \end{aligned}$$

簇指图中节点的子集 $J \subseteq \mathcal{V}$, 簇的邻集定义为

$$N_J = \bigcup_{v_i \in J} N_i,$$

节点 v_i 的出度定义为 $\deg_{\text{out}}(v_i) = \sum_j a_{ji}$, 节点 v_i 的入度定义为 $\deg_{\text{in}}(v_i) = \sum_j a_{ij}$. 无向图节点 v_i 的出度与入度相等. 节点的出度矩阵定义为

$$\Delta = \text{diag}\{\deg_{\text{out}}(v_1), \deg_{\text{out}}(v_2), \dots, \deg_{\text{out}}(v_n)\},$$

图 G 的拉普拉斯矩阵定义为 $L = \Delta - \mathcal{A}$.

有 leader 的多智能体网络系统, 通常定义无向图 \tilde{G} 含有 $n+1$ 个节点, 其中 0 节点为 leader, 其他的 $1, \dots, n$ 为 follower-agents. 同样定义一个对角矩阵 $D \in R^{n \times n}$ 为 \tilde{G} 中 leader 的邻接矩阵, 其对角元素为 d_i , $d_i = a_{i0}$. 如果 0 节点是 i 节点的邻节点, 则 $a_{i0} > 0$, 否则 $a_{i0} = 0$.

2.2. 控制协议与网络动态

通常多智能体网络系统中, 有 leader 的情况是很多研究人员感兴趣的问题. 假设图 \tilde{G} 中节点为二阶系统, 并考虑噪声对系统性能的影响. 各个 follower 节点 v_i 的状态描述为

$$\dot{x}_i(t) = v_i(t),$$

$$\dot{v}_i(t) = u_i(t) + w_i(t), i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

其中 $x_i(t)$ 为节点 v_i 的位置, $v_i(t)$ 为节点 v_i 的速度, $[x_i(t), v_i(t)]^T$ 描述节点 v_i 的状态, 其初始条件为 $[x_i(0), v_i(0)]^T$; $u_i(t)$ 为控制输入, $w_i(t) \in L_2[0, \infty)$ 为系统噪声.

leader 的速度为恒定值, leader 的运动是独立的, 不受其他节点的影响; 而 follower 节点是受 leader 和其他 follower 节点影响的. leader 的状态描述为

$$\dot{x}_0(t) = v_0, \quad (2)$$

其中 $x_0(t)$ 为 leader 的位置, v_0 为 leader 的速度并且为恒定值.

在本文中考虑系统噪声, 利用 L_2-L_∞ 控制研究有 leader 的二阶定拓扑多智能体网络的协调一致问题. 分别针对无时滞和有时滞的情况提出如下线性控制协议.

1) 无时滞定拓扑网络

$$\begin{aligned} u_i(t) &= k_1 \left(\sum_{v_j \in N_i} a_{ij} (x_j(t) - x_i(t)) + a_{i0} (x_i(t) \right. \\ &\quad \left. - x_0(t)) \right) + k_2 \left(\sum_{v_j \in N_i} a_{ij} (v_j(t) - v_i(t)) \right. \\ &\quad \left. + a_{i0} (v_i(t) - v_0(t)) \right), \quad (3) \end{aligned}$$

其中 $k_1 > 0, k_2 > 0$.

2) 有时滞定拓扑网络

$$\begin{aligned} u_i(t) &= k_1 \left(\sum_{v_j \in N_i} a_{ij} (x_j(t - \tau) - x_i(t - \tau)) \right. \\ &\quad \left. + a_{i0} (x_i(t - \tau) - x_0(t - \tau)) \right) \\ &\quad + k_2 \left(\sum_{v_j \in N_i} a_{ij} (v_j(t - \tau) - v_i(t - \tau)) \right. \\ &\quad \left. + a_{i0} (v_i(t - \tau) - v_0(t - \tau)) \right), \quad (4) \end{aligned}$$

其中 τ 表示信息传输的时滞.

在控制协议中, k_1 和 k_2 分别为位置和速度控制的权值. k_1 和 k_2 的存在, 增加了控制协议 $u_i(t)$ 对位置和速度控制的有效性. 如图论 2.1 所述, a_{ij} 为各个 follower 节点的邻接矩阵 \mathcal{A} 中的元素, a_{i0} 为 leader 的邻接矩阵 D 中的元素.

本文目的为设计控制协议 $u_i(t)$ 中的 a_{ij}, a_{i0} 以及 k_1, k_2 , 使得任意一个 follower 节点与 leader 节点的相对位置和相对速度逐步趋于 0, 二阶多智能体网络能达到协调一致, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i = x_0, \lim_{t \rightarrow \infty} v_i = v_0, i = 1, \dots, n.$$

因此, 定义

$$\xi_i(t) = x_i(t) - x_0(t), \eta_i(t) = v_i(t) - v_0,$$

可得

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \eta_i, \\ \dot{\eta}_i &= u_i + w_i, i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5)$$

定义

$$\begin{aligned} \delta &= [\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots, \xi_n, \eta_n]^T, \\ w &= [w_1, w_2, \dots, w_n]^T, \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ B_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}, \\ B_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

利用协议(3),网络动态可表示为

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) &= (I_n \otimes A)\delta(t) - ((L + D) \otimes B_1) \\ &\quad \times \delta(t) + (I_n \otimes B_2)u(t), \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $L \in R^{n \times n}$ 为信息传输拓扑结构图 \tilde{G} 的 Laplacian 阵; $D \in R^{n \times n}$ 为 \tilde{G} 中 leader 的邻接矩阵.

利用协议(4),网络动态描述如下:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) &= (I_n \otimes A)\delta(t) - ((L + D) \otimes B_1) \\ &\quad \times \delta(t - \tau) + (I_n \otimes B_2)u(t). \end{aligned} \quad (7)$$

$\delta(t)$ 为各个 follower 智能体与 leader 智能体的相对位置和相对速度变量的组合.在实际工程中,不但要求 $\delta(t)$ 逐步趋于 0,而且要求控制过程中 $\delta(t)$ 需控制在一定的范围内,并且系统对相对速度和相对位置变量的限制范围不同.分别针对相对速度和相对位置变量,定义加权系数 a, b ,并定义加权矩阵

$$C = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix},$$

其中, a, b 为正数, $C \in R^{2 \times 2}$ 为正定矩阵.

定义系统的输出

$$z(t) = (I_n \otimes C)\delta(t),$$

其中, $z(t) \in R^{2n}$ 描述了系统对各个 follower 智能体与 leader 智能体的相对位置和相对速度的控制输出. $z(t)$ 中包含的加权矩阵 C 是对相对位置和相对速度的误差范围的约束.加权系数 a, b 的取值可根据系统中对各个 follower 智能体与 leader 智能体的相对位置和相对速度的控制范围要求不同而取不同的值.其控制范围要求越小,相应的加权值越大.因此,可通过改变加权系数 a, b 的值,而控制 $z(t)$ 的极大值 $\|z(t)\|_\infty$ 在一定范围内;即可把各个 follower 智能体与 leader 智能体的相对位置和相对速度分别控制在系统要求的范围内.

定义 $\tilde{L} = L + D$, 则无时滞和有时滞的二阶多智能体网络系统的动态方程可重写为

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) &= (I_n \otimes A)\delta(t) - (\tilde{L} \otimes B_1)\delta(t) \\ &\quad + (I_n \otimes B_2)u(t), \\ z(t) &= (I_n \otimes C)\delta(t) \end{aligned} \quad (8)$$

和

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) &= (I_n \otimes A)\delta(t) - (\tilde{L} \otimes B_1)\delta(t - \tau) \\ &\quad + (I_n \otimes B_2)u(t), \\ z(t) &= (I_n \otimes C)\delta(t). \end{aligned} \quad (9)$$

本文研究的目标为考虑噪声和时滞设计控制协议,使得 $z(t)$ 控制在一定范围内并且逐步趋于 0.即使得二阶多智能体网络系统达到协调一致同时满足 L_2-L_∞ 性能指标.考虑系统(8)和(9)在零初始条件下,从外部噪声 $w(t)$ 到系统输出 $z(t)$ 的闭环传递函数 T_{zw} 满足以下性能指标:

$$\|T_{zw}(s)\|_{L_2-L_\infty} = \sup_{0 \neq u(t) \in L_2[0, \infty)} \frac{\|z(t)\|_\infty}{\|u(t)\|_2} < \gamma,$$

其中, γ 为给定的正常数,

$$\|z(t)\|_\infty = \sup_t \|z(t)\|,$$

$\|z(t)\|$ 是向量的欧氏范数,

$$\|u(t)\|_2 = \left(\int_0^\infty w^T(t)u(t)dt \right)^{1/2}.$$

3. 智能体网络稳定性分析

在这一部分,分别将分以下二种情况来分析控制协议的有效性:1)无时滞网络结构;2)有时滞网络结构.为了分析二阶多智能体网络系统的稳定性,介绍以下引理.

引理 1 对给定的对称矩阵 $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$, 其

中 S_{11} 是 $r \times r$ 维的,假定 S_{11} 是非奇异的.以下三个条件是等价的^[18]:

- 1) $S < 0$;
- 2) $S_{11} < 0$; $S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$;
- 3) $S_{22} < 0$; $S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$.

引理 2 任意向量 $x, y \in R^n$, 对任意的对称正定矩阵 $Q \in R^{n \times n}$, 有 $2x^T y \leq x^T Q^{-1} x + y^T Q y$.

下面将讨论定拓扑情况下(即智能体之间信息传输结构图保持不变),无向智能体网络系统 L_2-L_∞ 鲁棒稳定的条件.首先分析无时滞网络.

3.1. 无时滞网络

定理 1 对二阶多智能体网络系统(8)和给定常数 $\gamma > 0$, 如果存在对称正定矩阵 $P, Q, R \in R^{2n \times 2n}$ 使得

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix} < 0, \\ \begin{bmatrix} -P & (I_n \otimes C) \\ (I_n \otimes C) & -\gamma I_{2n} \end{bmatrix} \leq 0$$

成立, 则系统(8)是鲁棒稳定的且满足性能指标 $\|T_{zw}(s)\|_{L_2-L_\infty} < \gamma$. 其中,

$$M_{11} = P(I_n \otimes A) + (I_n \otimes A)^T P - P(\tilde{L} \otimes B_1) - (\tilde{L} \otimes B_1)^T P, \\ M_{12} = P(I_n \otimes B_2), \\ M_{22} = -\gamma I_n.$$

证明 分析系统(8)的稳定性, 定义李亚普诺夫函数为

$$V(t) = \delta^T(t) P \delta(t).$$

在零初始条件下, 对任意非零的外部扰动 $u(t) \in L_2[0, \infty)$, 定义以下性能指标:

$$J_t = V(t) - \gamma \int_0^t w^T(s) u(s) ds. \quad (10)$$

沿系统(8)的任意轨线, 计算 $V(t)$ 关于时间的导数, 可得

$$\dot{V}(t) = 2\delta^T(t) P \dot{\delta}(t) \\ = 2\delta^T(t) P(I_n \otimes A) \delta(t) \\ - 2\delta^T(t) P(\tilde{L} \otimes B_1) \delta(t) \\ + 2\delta^T(t) P(I_n \otimes B_2) u(t).$$

因为零初始条件, 所以

$$J_t = V(t) - V(0) - \gamma \int_0^t w^T(s) u(s) ds \\ = \int_0^t [\dot{V}(s) - \gamma w^T(s) u(s)] ds \\ = \int_0^t \begin{pmatrix} \delta(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} \delta(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt,$$

其中, M 如定理 1 所示.

$$M < 0 \text{ 等价于 } V(t) < \gamma \int_0^t w^T(s) u(s) ds.$$

因为 $\begin{bmatrix} -P & (I_n \otimes C) \\ (I_n \otimes C) & -\gamma I_{2n} \end{bmatrix} \leq 0$, 所以

$$z^T(t) \delta(t) \leq \gamma V(t) < \gamma^2 \int_0^t w^T(s) u(s) ds.$$

因此, 对任意的 $0 \neq w(t) \in L_2[0, \infty)$,

$$\|z(t)\|_\infty^2 \leq \gamma^2 \|u(t)\|_2^2, \text{ 即 } \frac{\|z(t)\|_\infty^2}{\|u(t)\|_2^2} \leq \gamma^2.$$

证毕.

3.2. 有时滞网络

定理 2 给定常数 $\gamma > 0$ 和时滞 $\tau > 0$, 对二阶多智能体网络系统(9), 如果存在对称正定矩阵 $P, Q, R \in R^{2n \times 2n}$ 使得

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} & \eta_{14} \\ \eta_{12}^T & \eta_{22} & \eta_{23} & 0 \\ \eta_{13}^T & \eta_{23}^T & \eta_{33} & 0 \\ \eta_{14}^T & 0 & 0 & \eta_{44} \end{bmatrix} < 0, \\ \begin{bmatrix} -P & (I_n \otimes C) \\ (I_n \otimes C) & -\gamma I_{2n} \end{bmatrix} \leq 0$$

成立, 则系统(9)是鲁棒稳定的且满足性能指标 $\|T_{zw}(s)\|_{L_2-L_\infty} < \gamma$. 其中,

$$\eta_{11} = P(I_n \otimes A) + (I_n \otimes A)^T P - P(\tilde{L} \otimes B_1) - (\tilde{L} \otimes B_1)^T P + \tau(I_n \otimes A)^T R(I_n \otimes A) + Q, \\ \eta_{12} = -\tau(I_n \otimes A)^T R(\tilde{L} \otimes B_1), \\ \eta_{13} = P(I_n \otimes B_2) + \tau(I_n \otimes A)^T R(I_n \otimes B_2), \\ \eta_{14} = P(\tilde{L} \otimes B_1), \\ \eta_{22} = -Q + \tau(\tilde{L} \otimes B_1)^T R(\tilde{L} \otimes B_1), \\ \eta_{23} = -\tau(\tilde{L} \otimes B_1)^T R(I_n \otimes B_2), \\ \eta_{33} = \tau(I_n \otimes B_2)^T R(I_n \otimes B_2) - \gamma I_n, \\ \eta_{44} = -\frac{R}{\tau}.$$

证明 类似于定理 1, 取性能指标(10). 分析系统(9)的 L_2-L_∞ 鲁棒稳定性条件. 在此, 定义李亚普诺夫函数为

$$V(t) = \delta^T(t) P \delta(t) + \int_{t-\tau}^t \delta^T(s) Q \delta(s) ds \\ + \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \delta^T(s) R \delta(s) ds d\theta.$$

计算 $V(t)$ 关于时间的导数, 可得

$$\dot{V}(t) = 2\delta^T(t) P \dot{\delta}(t) + \delta^T(t) Q \delta(t) \\ - \delta^T(t - \tau) Q \delta(t - \tau) \\ + \tau \delta^T(t) R \dot{\delta}(t) \\ - \int_{t-\tau}^t \delta^T(s) R \dot{\delta}(s) ds.$$

根据系统(9), 可知

$$2\delta^T(t) P \dot{\delta}(t)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\delta^T(t)P(I_n \otimes A)\delta(t) \\
 &\quad - 2\delta^T(t)P(\tilde{L} \otimes B_1)\delta(t - \tau) \\
 &\quad + 2\delta^T(t)P(I_n \otimes B_2)u(t).
 \end{aligned}$$

因为 $\delta(t - \tau) = \delta(t) - \int_{t-\tau}^t \delta(s)ds$, 并利用引理 2 , 可知

$$\begin{aligned}
 &- 2\delta^T(t)P(\tilde{L} \otimes B_1)\delta(t - \tau) \\
 \leq &- 2\delta^T(t)P(\tilde{L} \otimes B_1)\delta(t) \\
 &+ \int_{t-\tau}^t \delta^T(s)R\delta(s)ds \\
 &+ \tau\delta^T(t)P(\tilde{L} \otimes B_1)R^{-1}(\tilde{L} \otimes B_1)^T P\delta(t),
 \end{aligned}$$

根据系统 (9) 的状态方程 , 得到

$$\begin{aligned}
 &\delta^T(t)R\delta(t) \\
 = &\delta^T(t)\Psi(I_n \otimes A)^T R(I_n \otimes A)\delta(t) \\
 &- 2\delta^T(t)\Psi(I_n \otimes A)^T R(\tilde{L} \otimes B_1)\delta(t - \tau) \\
 &+ 2\delta^T(t)\Psi(I_n \otimes A)^T R(I_n \otimes B_2)u(t) \\
 &- 2\delta^T(t - \tau)\Psi(\tilde{L} \otimes B_1)^T R(I_n \otimes B_2)u(t) \\
 &+ \delta^T(t - \tau)\Psi(\tilde{L} \otimes B_1)^T R(\tilde{L} \otimes B_1)\delta(t - \tau) \\
 &+ w^T(t)\Psi(I_n \otimes B_2)^T R(I_n \otimes B_2)u(t). \quad (11)
 \end{aligned}$$

由以上分析可知

$$\begin{aligned}
 &\dot{V}(t) \\
 = &\begin{pmatrix} \delta(t) \\ \delta(t - \tau) \\ u(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{12}^T & X_{22} & X_{23} \\ X_{13}^T & X_{23}^T & X_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta(t) \\ \delta(t - \tau) \\ u(t) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 X_{11} &= \eta_{11} + \tau P(\tilde{L} \otimes B_1)R^{-1}(\tilde{L} \otimes B_1)^T P, \\
 X_{12} &= \eta_{12}, X_{13} = \eta_{13}, X_{22} = \eta_{22}, X_{23} = \eta_{23}, \\
 X_{33} &= \tau(I_n \otimes B_2)^T R(I_n \otimes B_2).
 \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
 J_i &= V(t) - \gamma \int_0^t w^T(s)u(s)ds \\
 &= \int_0^t [\dot{V}(s) - \gamma w^T(s)u(s)] ds \\
 &= \int_0^t \begin{pmatrix} \delta(t) \\ \delta(t - \tau) \\ u(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{12}^T & X_{22} & X_{23} \\ X_{13}^T & X_{23}^T & X_{33} - \gamma I_n \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} \delta(t) \\ \delta(t - \tau) \\ u(t) \end{pmatrix} dt,
 \end{aligned}$$

$$\text{记 } \zeta = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{12}^T & X_{22} & X_{23} \\ X_{13}^T & X_{23}^T & X_{33} - \gamma I_n \end{pmatrix}.$$

由引理 1 可知 $\zeta < 0$ 等价于 $\eta < 0$. 类似以上证明 , $\eta < 0$ 即 $V(t) < \gamma \int_0^t w^T(s)u(s)ds$.

$$\text{因为 } \begin{bmatrix} -P & (I_n \otimes C) \\ (I_n \otimes C) & -\gamma I_{2n} \end{bmatrix} \leq 0, \text{ 所以}$$

$$z^T(t)z(t) \leq \gamma V(t) < \gamma^2 \int_0^t w^T(s)u(s)ds.$$

因此 , 对系统 (9) , 任意的 $0 \neq w(t) \in L_2[0, \infty)$,

$$\|z(t)\|_\infty^2 \leq \gamma^2 \|u(t)\|_2^2, \text{ 即 } \frac{\|z(t)\|_\infty^2}{\|u(t)\|_2^2} \leq \gamma^2.$$

证毕 .

针对有 leader 的二阶多智能体网络系统 , 定理 1 和定理 2 分别给无时滞和有时滞的智能体网络提供了控制协议设计的理论依据 ; 使得系统在满足 L_2-L_∞ 性能指标的的要求下 , 同时达到协调一致 .

4. 仿 真

以一个含有 4 个节点和 1 个 leader 的二阶多智能体系统为例 , 仿真验证以上得到的理论结果 . 各节点的连接关系如图 1 所示 . 假定各个节点都为零初始条件 . 考虑噪声和时滞 , 利用计算机仿真有一个 leader 的二阶定拓扑多智能体系统的协调一致问题 . 设定性能指标 $\gamma = 1$, 时滞 $\tau = 0.1s$. 并给定速度和位置控制值的加权系数 $a = 1, b = 1$.

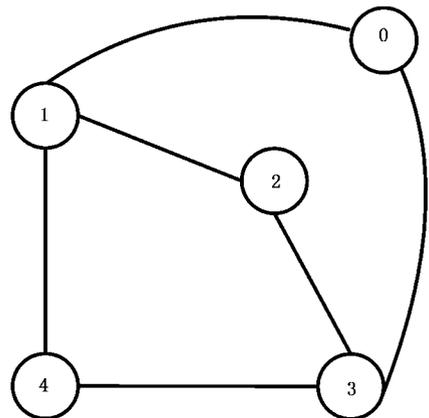


图 1 节点连接图

为了验证系统 L_2-L_∞ 的性能指标是否满足设计要求,取噪声 $w(t)$ 的模型为有限能量的脉冲函数.

$$u(t) = [1 \quad 1.5 \quad 2 \quad -1] \bar{w}(t),$$

其中,

$$\bar{w}(t) = \begin{cases} 5, & 0 \leq t \leq 1.25\text{s}; \\ 0, & \text{其余}. \end{cases}$$

$\bar{w}(t)$ 为脉冲函数,描述有限能量的噪声 $u(t)$. 矩阵 $[1 \quad 1.5 \quad 2 \quad -1]$ 的值可任意给定,描述噪声 $w_1(t)$, $w_2(t)$, $w_3(t)$ 以及 $w_4(t)$ 的幅值.

利用定理 2 求解双线性矩阵不等式,解得一个可行解: $P = Q = R = I_{2n}$. 控制协议中的参数 $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ 以及拓扑结构的边 $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(1,$

$4)$, $(1, 0)$ 和 $(3, 0)$ 的权值都为 1.3. 则可得图 \tilde{G} 的拉普拉斯矩阵

$$L = \begin{bmatrix} 2.6 & -1.3 & 0 & -1.3 \\ -1.3 & 2.6 & -1.3 & 0 \\ 0 & -1.3 & 2.6 & -1.3 \\ -1.3 & 0 & -1.3 & 2.6 \end{bmatrix},$$

以及描述 leader 和各个 follower 智能体连接关系的对角阵

$$D = \text{diag}\{1.3, 0, 1.3, 0\} \in R^{4 \times 4}.$$

图 2 描述了二阶多智能体系统各个 follower 智能体和 leader 的相对位置 $\xi(t)$ 和相对速度 $\eta(t)$ 的状态轨迹. 图 3 描述了 $\xi(t)$ 和 $u(t)$ 的范数轨迹.

从仿真的图中可见,图 2 表明各个 follower 和

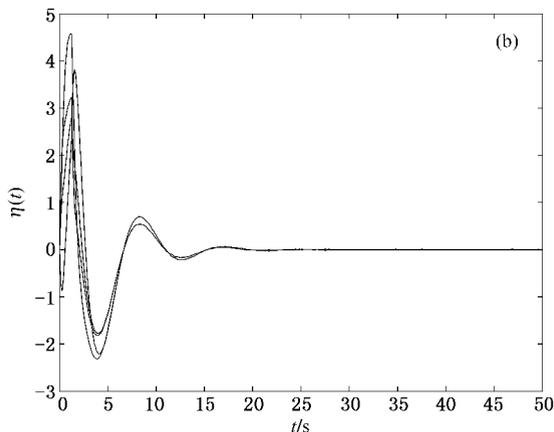
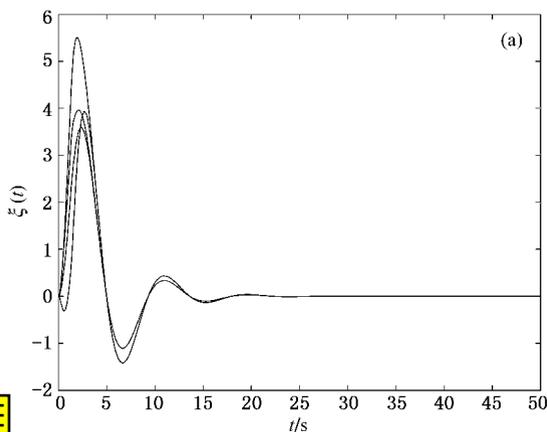


图 2 存在时滞和外部噪声的二阶多智能体系统的状态轨迹 (a) 相对位置 $\xi(t)$ 的轨迹 (b) 相对速度 $\eta(t)$ 的轨迹

leader 的相对位置 $\xi(t)$ 和相对速度 $\eta(t)$ 趋进于零,即通过 leader 的导航各个 follower 智能体跟随 leader 正确的运动,达到协调一致. 图 3 表明 $\|\xi(t)\|_\infty^2$ 小于 $\|u(t)\|_2^2$, 即 $\frac{\|\xi(t)\|_\infty^2}{\|u(t)\|_2^2} \leq \gamma^2$; 并且表明系统的控制输出 $\xi(t)$ 的极大值 $\|\xi(t)\|_\infty$ 被控制在一定范围内且 $\|\xi(t)\|$ 逐步趋于 0. 由图 2 和图 3 表明二阶多智能体系统达到协调一致,且满足 L_2-L_∞ 性能指标 $\|T_{zw}(s)\|_{L_2-L_\infty} < \gamma$.

5. 结 论

本文讨论了有 leader 的二阶多智能体网络系统的 L_2-L_∞ 鲁棒稳定问题. 由于工程应用中控制输出的极值受限制且限制的范围不同,针对位置和速度的控制输出分别设计了加权系数. 并且以双线性矩阵不等式的形式,分别给出了无时滞和有时滞的网络系统达到协调一致的充分条件,为控制协议的

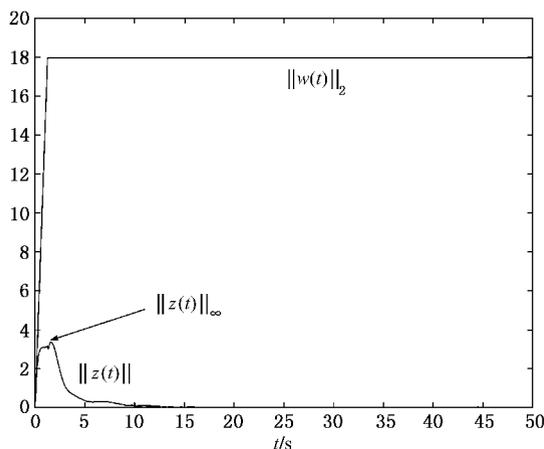


图 3 $\xi(t)$ 和 $u(t)$ 的范数轨迹

设计提供了理论依据. 根据本文控制协议的设计方法,可使得有 leader 的二阶多智能体网络系统在满足 L_2-L_∞ 系统性能指标的要求下,通过 leader 的导航各个 follower 智能体跟随 leader 正确的运动. 最后,仿真结果证明了所提方法的有效性.

- [1] Vicsek T , Cziroók A , Ben-Jacob E , Cohen O , Shochet I 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1226
- [2] Jadbabaie A , Lin J , Morse A S 2003 *Automat. Control* **48** 988
- [3] Lin P , Jia Y , Du J , Yuan S 2008 *Asian Journal of Control* **10** 254
- [4] Tanner H , Jadbabaie A , Pappas G 2003 *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control* 2016
- [5] Olfati-Saber R , Murray R M 2004 *Automat. Control* **49** 1520
- [6] Ren W , Beard R W 2005 *Automat. Control* **50** 655
- [7] Li Z 2008 *Physica A* **387** 1369
- [8] Lin P , Jia Y 2008 *Physica A* **387** 303
- [9] Lin P , Jia Y 2008 *Systems and Control Letters* **10** 1016
- [10] Hong Y G , Chen G R , Linda B 2008 *Automatica* **44** 846
- [11] Pierre-Alexandre Bliman , Giancarlo Ferrari-Trecate 2005 *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control* 7066
- [12] Zhang C X , Li H , Lin P 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4458
- [13] Chen F , Chen Z Q , Yuan Z Z 2007 *Chin. Phys. B* **16** 287
- [14] Pei W D , Chen Z Q , Yuan Z Z 2008 *Chin. Phys. B* **17** 373
- [15] Chen D L , Zhang W D 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1506
- [16] Liu T L , Huang H J 2007 *Acta. Phys. Sin.* **56** 6321(in Chinese) [刘天亮、黄海军 2007 物理学报 **56** 6321]
- [17] Mahmoud M S 2007 *IET Control Theory and Application* **1** 141
- [18] Jia Y 2007 Robust H_∞ control (China : Science Press) p145(in Chinese) 贾英民 2007 鲁棒 H_∞ 控制(北京 : 科学出版社) 第 145 页]

L_2 — L_∞ control for leader-following coordination of second-order multi-agent systems

Li Hui[†] Lin Peng Zhang Chun-Xi

(School of Instrument Science and Opto-electronics Engineering , Beijing University of Aeronautics and Astronautics , Beijing 100083 , China)

(Received 7 August 2008 ; revised manuscript received 15 October 2008)

Abstract

This paper deals with L_2 — L_∞ control for leader-following coordination of second-order multi-agent systems with external disturbance and time-delay on fixed topology. In practical applications , the peak value of the controlled output is often required to be within a certain range and the ranges of the position and the velocity are different , so we introduce the weighted coefficients for the controlled outputs of the position and the velocity separately. Then we obtain a multi-agent system of the model. Based on the Lyapunov-Krasovskii theory , both networks with and without time-delay are analyzed for leader-following coordination of the position vector and the velocity vector with the desired L_2 — L_∞ performance. Furthermore , sufficient conditions in terms of bilinear matrix inequality are given to guarantee the consensus problems for the multi-agent systems with and without time-delay separately. Finally numerical simulations are provided to show the effectiveness of our strategies.

Keywords : L_2 — L_∞ control , multi-agent system , consensus problem , time-delay

PACC : 0565 , 8710

[†] E-mail : lihuibuaa@gmail.com