

原子质心运动对 Λ 型三能级原子 动力学行为的影响^{*}

胡孝平 郭 红[†]

(华中师范大学物理科学与技术学院, 武汉 430079)

(2008 年 4 月 23 日收到, 2008 年 6 月 20 日收到修改稿)

研究了由单模腔场驱动的质心做谐振运动的 Λ 型三能级原子系统, 考察了腔场、原子内态及其质心运动线性熵的演化特征. 结果表明原子质心运动不仅影响腔场与原子内态线性熵的演化规律而且能够有效地改变两者的关系.

关键词: 原子质心运动, Λ 型三能级原子, 线性熵

PACC: 4250

早在 1990 年 Gea-Banacloche^[1] 研究了 Jaynes-Cummings 模型中原子线性熵的演化规律, 发现由强相干场驱动的初始时刻处于纯态的二能级原子在其布居差崩塌区域的某一时刻接近纯态. 1992 年 Orszag 等^[2] 指出这一规律不依赖于原子的初态. Boukobza 和 Tannor^[3] 强调只有当原子和光场组成的二体系统的初态为纯态时, 原子和光场的熵才始终保持相等, 此时两者间存在正关联; 假若系统初态为混合态, 原子和光场的熵亦可呈现反关联. 我们曾详细讨论了原子与光场线性熵的演化规律及彼此关系对光场初态的依赖^[4]. 多能级原子^[5-7]、多模光场^[8,9] 以及多个原子^[10,11] 等广义 Jaynes-Cummings 模型中原子内态熵成为研究系统动力学演化特性的有力工具. Zhou^[12] 和 Fang 等^[13] 还将研究对象推广到存在损耗的系统.

量子纠缠是一种奇特纯量子现象, 广泛应用于量子通信和量子计算中. Phoenix 和 Knight^[14] 认为熵不仅可以灵敏地量度量子态的纯度, 还可用于描述原子与光场的关联程度. 通过对 Λ 型三能级原子与腔场相互作用系统中原子(场)熵的研究 Zhou 等^[15,16] 揭示了原子与腔场间纠缠与退纠缠的演化规律.

随着原子俘获技术的提高, 原子质心运动在光与原子相互作用过程中的重要性日显突出, 大量研究结果表明原子质心运动不仅改变原子的辐射性

质^[17-19], 而且影响原子内态的动力学行为特征^[20-23]. 以原子质心运动为中介, Morigi 等^[24] 实现了先后两个脉冲光的纠缠; 随后 Zheng^[25] 提出了实现 4-qubit 丛态的方案. 这些研究成果使人们认识到俘获粒子质心运动状态的相干操控在量子信息领域有着重要的应用价值, 进而激发人们研究原子质心运动的非经典态^[26] 的热情.

本文研究了质心作谐振运动的 Λ 型三能级原子与驻波腔场相互作用系统, 给出了腔场、原子内态以及原子质心运动线性熵的表达式, 在系统不同初始条件下讨论了原子质心运动对三者的演化规律及其相互关系的影响.

如图 1 所示, 质心作谐振运动的 Λ 型三能级原子与单模驻波腔场相互作用系统的哈密顿量为 ($\hbar = 1$)

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2, \quad (1)$$

$$\hat{H}_1 = \omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \omega_b \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2} \right) + \omega |1\rangle\langle 1|, \quad (2)$$

$$\hat{H}_2 = g \left[\alpha (\hat{\sigma}_1^\dagger + \hat{\sigma}_2^\dagger) + \hat{a}^\dagger (\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2) \right] \times \cos[\chi (\hat{b} + \hat{b}^\dagger)] + \Delta (|2\rangle\langle 2| - |3\rangle\langle 3|), \quad (3)$$

其中 \hat{a}^\dagger 和 \hat{a} 分别表示频率为 ω 的腔场产生和湮没算符, ω_b 为原子质心谐振频率, \hat{b}^\dagger 和 \hat{b} 分别表示原

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 310674052)和教育部新世纪优秀人才支持计划(批准号: NCET-06-0671)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: guohong@phy.ccnu.edu.cn

子质心运动的产生和湮没算符, $|i\rangle (i=1, 2, 3)$ 是原子的本征态矢, $\hat{\sigma}_1 = |2\rangle\langle 1|$, $\hat{\sigma}_2 = |3\rangle\langle 1|$ 为原子的降算符, g 为原子和腔场的耦合常数, η 为 Lamb-Dicke 参数, 2Δ 表示原子两下能态的能级间距.

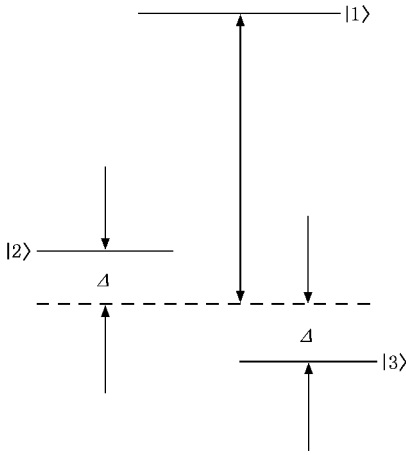


图 1 Λ 型三能级原子能级结构图

当 Lamb-Dicke 参数 η 为小量时,

$$\begin{aligned} & \cos[\eta(\hat{b}^\dagger + \hat{b})] \\ & \approx 1 - \frac{\eta^2}{2}(1 + 2\hat{m} + \hat{b}^{\dagger 2} + \hat{b}^2). \end{aligned}$$

在原子两下能态简并 ($\Delta = 0$) 的情况下, 在相互作用绘景中, 舍掉快速振荡项, 相互作用哈密顿量可写为

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= g[\alpha(\hat{\sigma}_1^\dagger + \hat{\sigma}_2^\dagger) + \hat{a}^\dagger(\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2)] \\ & \times \left[1 - \frac{\eta^2}{2}(1 + 2\hat{m}) \right], \quad (4) \end{aligned}$$

式中 $\hat{m} = \hat{b}^\dagger \hat{b}$ 为原子质心谐振运动的占有数. 系统相应的时间演化算符

$$\hat{U}_I(t) = \exp(-i\hat{H}_I t)$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{C}_1 & -i\frac{\hat{S}_1}{B_1}g\hat{A}\hat{a} & -i\frac{\hat{S}_1}{B_1}g\hat{A}\hat{a} \\ -i\frac{\hat{S}_2}{B_2}g\hat{A}\hat{a}^\dagger & \frac{1+\hat{C}_2}{2} & \frac{\hat{C}_2-1}{2} \\ -i\frac{\hat{S}_2}{B_2}g\hat{A}\hat{a}^\dagger & \frac{\hat{C}_2-1}{2} & \frac{1+\hat{C}_2}{2} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

其中

$$\hat{C}_1 = \cos\hat{B}_1 t, \quad \hat{C}_2 = \cos\hat{B}_2 t,$$

$$\hat{S}_1 = \sin\hat{B}_1 t, \quad \hat{S}_2 = \sin\hat{B}_2 t,$$

$$\hat{B}_1 = g\hat{A}\sqrt{2\hat{a}\hat{a}^\dagger}, \quad \hat{B}_2 = g\hat{A}\sqrt{2\hat{a}^\dagger\hat{a}},$$

$$\hat{A} = 1 - \frac{\eta^2}{2}(1 + 2\hat{m}).$$

假定初始时刻原子内态处于相干叠加态 $|\psi_a\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle + c_3|3\rangle$, 腔场和原子质心运动也处于数态的相干叠加态 $|\psi_f\rangle = \sum_n F_n|n\rangle$, $|\psi_c\rangle =$

$\sum_m G_m|m\rangle$, 则系统的初态可表示为

$$\begin{aligned} |\psi(0)\rangle &= |\psi_f\rangle \otimes |\psi_a\rangle \otimes |\psi_c\rangle \\ &= \sum_{n,m} [c_{n,1,m}(0)|n,1,m\rangle \\ & \quad + c_{n,2,m}(0)|n,2,m\rangle \\ & \quad + c_{n,3,m}(0)|n,3,m\rangle], \quad (6) \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} c_{n,i,m}(0) &= c_i F_n G_m, \\ i &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

则 t 时刻系统在相互作用绘景的态矢为

$$\begin{aligned} |\psi'(t)\rangle &= U_I(t)|\psi(0)\rangle \\ &= \sum_{n,m} [c_{n,1,m}(t)|n,1,m\rangle \\ & \quad + c_{n,2,m}(t)|n,2,m\rangle \\ & \quad + c_{n,3,m}(t)|n,3,m\rangle], \quad (7) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} c_{n,1,m}(t) &= c_{n,1,m}(0)\cos(\Omega_{n+1,m}t) \\ & \quad - \frac{[c_{n+1,2,m}(0) + c_{n+1,3,m}(0)]}{\sqrt{2}} \\ & \quad \times \sin(\Omega_{n+1,m}t), \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{n,2,m}(t) &= -ic_{n-1,m}(0)\frac{\sin(\Omega_{n,m}t)}{\sqrt{2}} \\ & \quad + c_{n,2,m}(0)\frac{\cos(\Omega_{n,m}t) + 1}{2} \\ & \quad + c_{n,3,m}(0)\frac{\cos(\Omega_{n,m}t) - 1}{2}, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{n,3,m}(t) &= -ic_{n-1,m}(0)\frac{\sin(\Omega_{n,m}t)}{\sqrt{2}} \\ & \quad + c_{n,2,m}(0)\frac{\cos(\Omega_{n,m}t) - 1}{2} \\ & \quad + c_{n,3,m}(0)\frac{\cos(\Omega_{n,m}t) + 1}{2}, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\Omega_{n,m} = g\left[1 - \frac{\eta^2}{2}(1 + 2m)\right]\sqrt{2n}. \quad (11)$$

对应的系统密度矩阵为

$$\rho^I(t) = |\psi^I(t)\rangle\langle\psi^I(t)|. \quad (12)$$

腔场、原子内态及其质心运动的约化密度矩阵分别为

$$\hat{\rho}_i^{|}(t) = \sum_m \sum_{n, n'} [c_{n,1,m}(t)c_{n',1,m}^*(t) + c_{n,2,m}(t)c_{n',2,m}^*(t) + c_{n,3,m}(t)c_{n',3,m}^*(t)] |n - n'|, \quad (13)$$

$$\hat{\rho}_a^{|}(t) = \sum_{m, m'} \begin{pmatrix} |c_{n,1,m}(t)|^2 & c_{n,1,m}(t)c_{n,2,m}^*(t) & c_{n,1,m}(t)c_{n,3,m}^*(t) \\ c_{n,2,m}(t)c_{n,1,m}^*(t) & |c_{n,2,m}(t)|^2 & c_{n,2,m}(t)c_{n,3,m}^*(t) \\ c_{n,3,m}(t)c_{n,1,m}^*(t) & c_{n,3,m}(t)c_{n,2,m}^*(t) & |c_{n,3,m}(t)|^2 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$\hat{\rho}_c^{|}(t) = \sum_n \sum_{m, m'} [c_{n,1,m}(t)c_{n,1,m'}^*(t) + c_{n,2,m}(t)c_{n,2,m'}^*(t) + c_{n,3,m}(t)c_{n,3,m'}^*(t)] |m - m'|. \quad (15)$$

则它们的线性熵分别为

$$S_i(t) = 1 - \sum_{n, n'} \sum_{m, m'} [c_{n,1,m}(t)c_{n',1,m}^*(t) + c_{n,2,m}(t)c_{n',2,m}^*(t) + c_{n,3,m}(t)c_{n',3,m}^*(t)] \times [c_{n',1,m'}(t)c_{n,1,m}^*(t) + c_{n',2,m'}(t)c_{n,2,m}^*(t) + c_{n',3,m'}(t)c_{n,3,m}^*(t)], \quad (16)$$

$$S_a(t) = 1 - \sum_{n, n'} \sum_{m, m'} \{ |c_{n,1,m}(t)|^2 |c_{n',1,m'}(t)|^2 + |c_{n,2,m}(t)|^2 |c_{n',2,m'}(t)|^2 + |c_{n,3,m}(t)|^2 |c_{n',3,m'}(t)|^2 + 2\text{Re} [c_{n,1,m}(t)c_{n,2,m}^*(t)c_{n',2,m'}(t)c_{n',1,m'}^*(t) + c_{n,1,m}(t)c_{n,3,m}^*(t)c_{n',3,m'}(t)c_{n',1,m'}^*(t) + c_{n,2,m}(t)c_{n,3,m}^*(t)c_{n',3,m'}(t)c_{n',2,m'}^*(t)] \}, \quad (17)$$

$$S_c(t) = 1 - \sum_{n, n'} \sum_{m, m'} [c_{n,1,m}(t)c_{n,1,m'}^*(t) + c_{n,2,m}(t)c_{n,2,m'}^*(t) + c_{n,3,m}(t)c_{n,3,m'}^*(t)] \times [c_{n',1,m'}(t)c_{n,1,m}^*(t) + c_{n',2,m'}(t)c_{n,2,m}^*(t) + c_{n',3,m'}(t)c_{n,3,m}^*(t)]. \quad (18)$$

由此可见,即使系统的初态为纯态,由于原子质心运动的介入,原子内态的线性熵只有在特殊的初始条件下才会等于腔场的线性熵。

如果初始时刻原子内态处于上能态,原子质心运动处于占有数态 $|m\rangle$,且腔场处于光子数态 $|n\rangle$,由(16)式和(17)式可以推得,腔场和原子内态的线性熵为

$$S_i(t) = S_a(t) = \frac{1 - \cos(4\Omega_{n+1,m}t)}{4}.$$

由于原子质心运动的状态不随时间改变,因此原子质心运动的线性熵始终为零,而原子内态(腔场)线

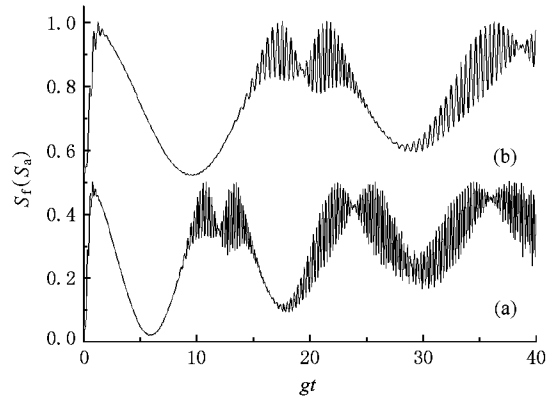


图2 腔场(原子内态)线性熵的时间演化(初始时刻原子内态处于上能态,原子质心运动状态处于占有数态,腔场处于相干态, $\langle n \rangle = 25, \eta = 0.2$) (a) $m = 1$ (b) $m = 10, S_i(S_a) + 0.5$

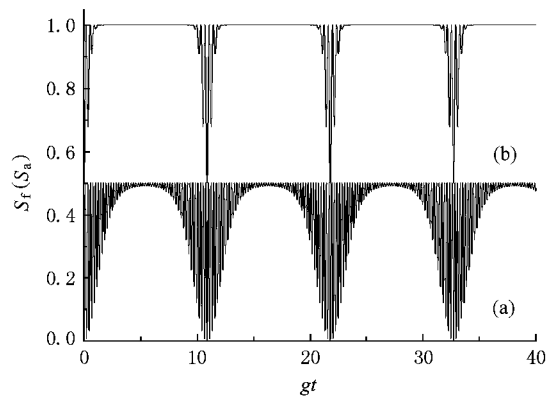


图3 腔场(原子内态)线性熵的时间演化(初始时刻原子内态处于上能态,原子质心运动状态处于相干态,腔场处于光子数态, $n = 25, \eta = 0.2$) (a) $\langle m \rangle = 1$ (b) $\langle m \rangle = 10, S_i(S_a) + 0.5$

性熵随时间演化的周期为 $t = \frac{\pi}{\Omega_{n+1,m}}$,它仅为原子布居差演化周期的一半(原子布居差 $W(t) = \cos(2\Omega_{n+1,m}t)$).当 $t = \frac{(2l+1)\pi}{4\Omega_{n+1,m}}$ ($l = 0, 1, 2, \dots$)时,原子内态和腔场线性熵均达到最大值 0.5,此时系统

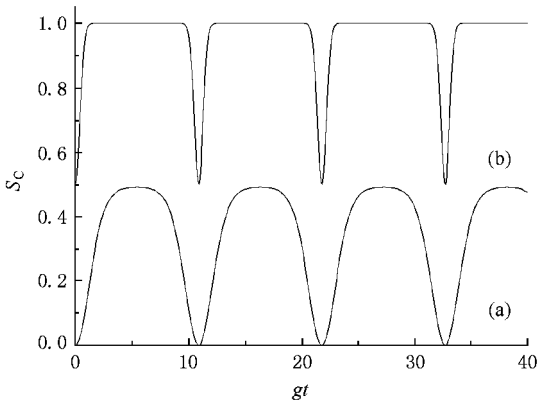


图4 原子质心运动线性熵的时间演化(其他同图3)

的态矢为 $\frac{\sqrt{2}}{2} [|n, l\rangle + (-1)^{l+1} |n+1, \varphi\rangle] |m\rangle$, 其中 $|\varphi\rangle = (|2\rangle + |3\rangle) / \sqrt{2}$, 显然此时原子内态与腔场处于最大纠缠 Bell 态. 由系统的相互作用哈密顿量, 不难看出, 当原子内态处于 $(|2\rangle - |3\rangle) / \sqrt{2}$ 时, 原子与腔场退耦合. 原子内态只能在 $|1\rangle$ 和 $(|2\rangle + |3\rangle) / \sqrt{2}$ 之间跃迁, 因此原子内态线性熵可达到的最大值为 0.5, 与二能级原子一样. 当 $t = \frac{l\pi}{2\Omega_{n+1,m}}$ ($l=1, 2, 3, \dots$) 时, 原子内态(腔场)线性熵等于零, 原子内态和腔场退纠缠, 各自回到纯态.

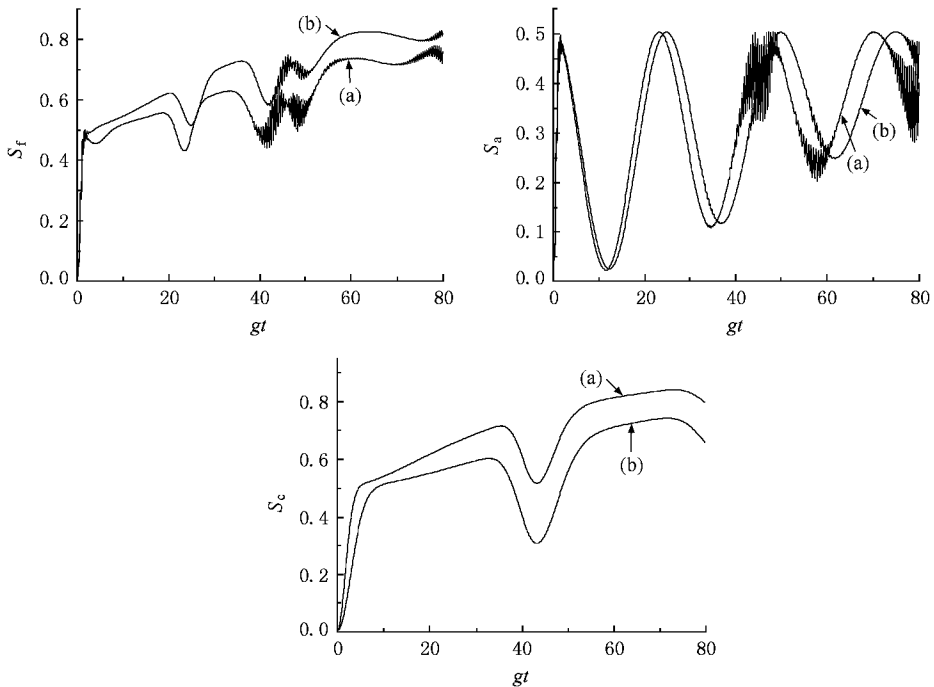


图5 腔场、原子内态和原子质心运动的线性熵的时间演化(初始时刻原子内态处于上能态, 原子质心运动状态处于相干态, 腔场处于相干态, $\langle n \rangle = 25, \eta = 0.1$) (a) $\langle m \rangle = 3$ (b) $\langle m \rangle = 9$

当原子的初态保持不变, 而腔场的初态处于相干态时, 原子内态的线性熵仍保持与腔场的线性熵相等, 原子质心运动的线性熵仍始终为零. 这是因为原子与腔场的相互作用不改变原子质心运动的占有数. 在强腔场驱动下, 原子内态(腔场)的线性熵呈现崩塌与回复现象(如图2), 与不考虑原子质心运动的情形类似, 所不同的是原子质心运动通过改变原子与腔场的等效耦合常数 $g [1 - \frac{\eta^2}{2} (1 + 2m)]$ 而影响原子内态线性熵的崩塌与回复时间.

若腔场处于光子数态, 处于上能态的原子的质心运动处于相干态, 腔场和原子内态及原子质心运动的线性熵分别为

$$S_c(t) = S_a(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp\{-4\bar{m} \sin^2[g\eta^2 \sqrt{\chi(n+1)}t]\} \times \cos^2\left[2g\left(1 - \frac{\eta^2}{2}\right) \sqrt{\chi(n+1)}t \right] - \bar{m} \sin[2g\eta^2 \sqrt{\chi(n+1)}t], \quad (19)$$

$$S_c(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp\{-4\bar{m} \sin^2[g\eta^2 \sqrt{\chi(n+1)}t]\}. \quad (20)$$

显然腔场、原子内态和原子质心运动的线性熵满足如下关系式 $S_a = S_f \geq S_c$, 原子质心运动线性熵的演

化曲线正好是原子内态(腔场)线性熵演化曲线的包络线(见图3、图4)。原子内态(腔场)线性熵出现崩塌和回复现象,而且能够完全回复,即使原子质心运动的平均占有数较小,崩塌与回复现象也十分明显。

原子内态(腔场)的线性熵的崩塌时间与 $\sqrt{(n+1)\bar{m}}$ 成反比,但其回复时间 $t_R \propto \frac{1}{\sqrt{(n+1)g\eta^2}}$,与原子质心运动的强度无关,导致这一现象的物理根源是原子与腔场的等效耦合常数与原子质心运动占有数间的线性关系。

如果初始时刻原子内态仍处于上能态,腔场与原子质心运动都处于相干态,如图5所示,不仅原子

质心运动的线性熵不再始终为零,而且原子内态和腔场的线性熵不再相等。

综上所述,原子质心运动不仅能改变原子内态和腔场的线性熵的演化规律,而且可改变两者的关系。若原子质心运动处于占有数态时,原子质心运动的线性熵始终为零,此时腔场与原子内态线性熵始终相等,这与不考虑原子质心运动的情形相似,原子质心运动的强度会影响原子内态(腔场)线性熵的演化节奏。当原子质心运动处于相干态时,原子质心运动的线性熵不再始终等于零,腔场和原子内态线性熵的关系则依赖于系统的初态。

- [1] Gea-Banacloche J 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 3385
- [2] Orszag M, Retamal J C, Saavedra C 1992 *Phys. Rev. A* **45** 2118
- [3] Boukobza E, Tannor D J 2005 *Phys. Rev. A* **71** 063821
- [4] Zhao J, Guo H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2647 (in Chinese) [赵杰、郭红 2007 物理学报 **56** 2647]
- [5] Liu X 2000 *Physica A* **286** 588
- [6] Liu X, Fang M F, Liu A L 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1707 (in Chinese) [刘翔、方卯发、刘安玲 2000 物理学报 **49** 1707]
- [7] Huang C J, He H Y, Kong F Z, Fang J Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2539 (in Chinese) [黄春佳、贺慧勇、孔凡志、方家元 2004 物理学报 **53** 2539]
- [8] Ao S M, Zhou S L, Zeng G J 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 0052 (in Chinese) [敖胜美、周石伦、曾高坚 2001 物理学报 **50** 0052]
- [9] Zhang L H, Li G X, Gan Z W 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1168 (in Chinese) [张立辉、李高翔、甘仲惟 2003 物理学报 **52** 1168]
- [10] Huang C J, He H Y, Zhou M, Fang J Y, Huang Z H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1764 (in Chinese) [黄春佳、贺慧勇、周明、方家元、黄祖洪 2006 物理学报 **55** 1764]
- [11] Yang X, Tong C Y, Xiang S H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2148 (in Chinese) [杨雄、童朝阳、向少华 2007 物理学报 **56** 2148]
- [12] Zhou Q C 2006 *Physica A* **366** 212
- [13] Fang M F, Zhu S Y 2006 *Physica A* **369** 475
- [14] Phoenix S J D, Knight P L 1991 *Phys. Rev. A* **44** 6023
- [15] Zhou Q C, Zhu S N 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2043 (in Chinese) [周青春、祝世宁 2005 物理学报 **54** 2043]
- [16] Zhou Q C, Zhu S N 2005 *Opti. Commu.* **248** 437
- [17] Bienert M, Merkel W, Morigi G 2004 *Phys. Rev. A* **69** 013405
- [18] Bienert M, Merkel W, Morigi G 2006 *Phys. Rev. A* **73** 033402
- [19] Guo H, Zhao L Y 2006 *Phys. Rev. A* **73** 053822
- [20] Fang M F 1998 *Physica A* **259** 193
- [21] Joshi A, Xiao M 2004 *Opti. Commu.* **232** 273
- [22] Ray A 2004 *Phys. Rev. A* **69** 033806
- [23] Prants S V, Uleysky M Y, Argonov V Y 2006 *Phys. Rev. A* **73** 023807
- [24] Morigi G, Eschner J, Mancini S, Vitali D 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 023601
- [25] Zheng S B 2006 *Phys. Rev. A* **73** 065802
- [26] Wang Z J 2007 *Phys. Rev. A* **76** 043403

The influence of mass center motion on Λ -type three-level atom dynamics^{*}

Hu Xiao-Ping Guo Hong[†]

(*College of Physical Science And Technology , Central China Normal University , Wuhan 430079 , China*)

(Received 23 April 2008 ; revised manuscript received 20 June 2008)

Abstract

The system of a single-mode field interacting with a Λ -type three-level atom in a harmonic trap is investigated. The linear entropy of the field , the atomic internal states and the atomic mass center motion are explored. It is shown that the atomic mass center motion not only can affect the linear entropy of the field and the atomic internal states , but also effectively changes their relationship.

Keywords : atomic center mass motion , Λ -type three-level atom , linear entropy

PACC : 4250

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10674052) and the Ministry of Education under Project NCEI(Grant No. NCET-06-0671).

[†] Corresponding author. E-mail : guohong @phy. ccnu. edu. cn