

# 离子温度梯度模湍流的带状流最小自由度模型<sup>\*</sup>

陆赫林<sup>‡</sup> 王顺金<sup>†</sup>

(四川大学物理科学与技术学院理论物理中心 成都 610064)

(2008 年 4 月 16 日收到 2008 年 5 月 14 日收到修改稿)

在离子温度梯度模(ITG)湍流背景中,通过最小自由度模型中模耦合方式产生带状流,对此模型做了动力学稳定性分析及数值求解.并在此基础上初步探讨了湍流中漂移波与带状流的能量转移,以及雷诺协强与带状流的关系.

关键词:等离子体,离子温度梯度模,湍流,带状流

PACC: 5235M, 5235K, 5235R

## 1. 引言

最近几年发现带状流能抑制湍流,改善托卡马克系统的磁约束.所以在磁约束和聚变热等离子体研究中受到广泛关注.

带状流是一种方位角对称的带状剪切流(在磁面是常数,在径向快速变化).其特征表现为  $n = 0$ ,  $m \leq 0$  的电场扰动、径向波数  $q_r$  有限( $m, n$  为极向和环向模数)以及其径向尺度与漂移波的径向尺度可比拟( $q_r$  和  $k_r$  分别为带状流和漂移波的径向波数).

关于带状流的产生机理<sup>[1]</sup>,Diamond 及其合作者提出,带状流在小尺度漂移波中自发产生.他们指出,有两个可能的区域和两种不稳定性相关:第一,当漂移波谱狭窄,不稳定性是调节类型的;第二,当漂移波谱宽、甚至几乎连续的时候,对所有的波数积分能导致共振不稳定性.对前一种模式,能用相对简单的四波模式<sup>[2,3]</sup>来描述抽运漂移波及它的两个边频带和大尺度波(带状流).带状流不能驱动径向输运,也不能释放通常的自由能.因此,带状流应该通过非线性相互作用来抽运,从有限  $n$  模漂移波转移能量到  $n = 0$  模流.既然带状流通过漂移波的非线性能量转移产生,因此它们本质上能减小漂移波湍流导致的输运水平和强度.所以,带状流能调制或

部分抑制漂移波湍流和输运.

近年,我国学者在带状流实验研究方面取得了可喜的成绩<sup>[4-8]</sup>,理论研究相对而言比较少<sup>[9]</sup>.

漂移波由等离子体密度、温度、磁场等的梯度来驱动,能产生湍流和反常输运.本文讨论的漂移波由离子温度梯度驱动产生.离子温度梯度模激发的带状流被一些文献广泛的研究过,如文献<sup>[10,11]</sup>,他们主要的方法是 Chen 等提出的四波相互作用模型<sup>[3]</sup>和波动力学.本文根据 Horton 的最小自由度近似<sup>[12]</sup>,选用少量相关特征模的方法得出带状流.彭晓东等人也把此方法用于产生基于电阻交换模湍流的带状流<sup>[13]</sup>.本文在产生带状流的基础上,还讨论了带状流对湍流的抑制,以及雷诺协强与 ITG 模湍流带状流的关系.

## 2. 描述离子温度梯度模湍流的基本方程

描述环型 ITG 模的涡旋和压力方程为<sup>[14-16]</sup>

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\nabla_{\perp}^2 \phi - \phi) + [\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi] \\ & = (1 - g + K_i \nabla_{\perp}^2) \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ & \quad - g \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla_{\perp}^2 \nabla_{\perp}^2 \phi, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + [\phi, p] = -K_i \frac{\partial \phi}{\partial y} + \kappa \nabla_{\perp}^2 p, \quad (2)$$

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(资助号 90503088, 10775100)和兰州重离子加速器国家实验室原子核理论中心基金资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人, E-mail: sjwang@home.swjtu.edu.cn

<sup>‡</sup> E-mail: luhelin@gmail.com

其中  $\nabla_{\perp}^2 = \partial_x \partial_x + \partial_y \partial_y$ , 泊松括号  $[f, g] = \partial_x f \partial_y g - \partial_x g \partial_y f$ ,  $x$  和  $y$  分别为径向和极向坐标,  $\phi$  是静电势,  $p$  是离子压强,  $g = 2L_n/R$  为磁场曲率的吸引力效应,  $K_i = (T_i/T_e)(\eta_i + 1)$  为离子压强梯度平衡参数,  $T_i$  和  $T_e$  为离子和电子温度,  $\eta_i = d \ln T_i / d \ln n$ ,  $n$  是等离子体密度,  $L_n$  为等离子体密度平衡标长,  $\mu$  是黏滞系数,  $\kappa$  是热导. 文中各方程参量均采用归一化单位, 详细可参考文献 [15].

采用小自由度截断近似来表示  $\phi$  和  $p$  ( $q, 0$ ) 代表带状流即长波大尺度低频扰动 ( $k_x, k_y$ ) 为漂移波即短波小尺度高频扰动 ( $k_x + q, k_y$ ) 为边频带, 它们组成三波相互作用系统. 带状流扰动与有限幅度的抽运波相互作用产生漂移波边频带, 边频与抽运波作用增强带状流扰动, 这样形成一个封闭的反馈环. 此三个模式的波, 能反映漂移波湍流与带状流相互耦合的主要的物理特征, 如文献 [13, 17] 所述. 在上述三波近似下, 所有的高阶波部分如 ( $k_x + q, 2k_y$ ) ( $2k_x + q, 0$ ) 等都可以被忽略. 如 Horton 论证 [17] 这种最小自由度近似是合理的. 所以产生带状流的最小自由度基矢可表示为如下形式:

$$\phi = \phi_q \sin(qx) + \phi_1 \sin(k_x x) \sin(k_y y) + \phi_2 \sin[(q + k_x)x] \cos(k_y y), \quad (3)$$

$$p = p_0 \sin(2k_x x) + p_1 \sin(k_x x) \cos(k_y y) + p_2 \sin[(q + k_x)x] \sin(k_y y), \quad (4)$$

其中  $\phi_q$  为带状流项, 由涡旋  $\phi_i$  和压力  $p_i$  驱动,  $p_0 \sin(2k_x x)$  是背景压力梯度整平,  $\phi_i$  和  $p_i$  均是时间函数. ( $\phi_1, p_1$ ) 为漂移波部分, ( $\phi_2, p_2$ ) 是边频带.

带状流的时间演化方程, 由 Hasegawa-Mima-type 方程描述 [10, 11, 17] 经扩展后为如下形式:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\perp}^2 \phi + \mu \nabla_{\perp}^4 \phi = [\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi]. \quad (5)$$

漂移波及边频带部分由方程 (1) (2) 描述. 把 (3) 和 (4) 式代入方程 (1) (2) 和 (5) 中, 采用模数匹配可得傅里叶系数非线性动力学演化方程:

$$\frac{d\phi_q}{dt} = -\frac{1}{4} k_y (2k_x + q) \phi_1 \phi_2 - q^2 \mu \phi_q \quad (6)$$

$$(1 + k_1^2) \frac{d\phi_1}{dt} = -g k_y p_1 - k_1^4 \mu \phi_1 + \frac{1}{2} k_y q (k_1^2 + 2k_x q) \phi_2 \phi_q, \quad (7)$$

$$(1 + k_2^2) \frac{d\phi_2}{dt} = g k_y p_2 - k_2^4 \mu \phi_2 - \frac{1}{2} k_y q (k_1^2 - q^2) \phi_1 \phi_q, \quad (8)$$

$$\frac{dp_0}{dt} = -4k_x^2 \kappa p_0 + \frac{1}{2} k_x k_y p_1 \phi_1, \quad (9)$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -k_1^2 \kappa p_1 - k_y K_i \phi_1 - k_x k_y p_0 \phi_1 - \frac{1}{2} k_y q p_2 \phi_q, \quad (10)$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -k_2^2 \kappa p_2 + k_y K_i \phi_2 + \frac{1}{2} k_y q p_1 \phi_q, \quad (11)$$

其中

$$k_1^2 = k_x^2 + k_y^2, k_2^2 = (k_x + q)^2 + k_y^2.$$

为了后面讨论的方便, 定义系统动能 [15-17]

$$K = \frac{1}{2} \frac{1}{V} \int [\phi^2 + (\nabla_{\perp} \phi)^2] dV, \quad (12)$$

按此定义, 把 (3) 式代入 (12) 式中, 经计算后可得如下各分量:

带状流动能

$$K_q = \frac{1}{4} (1 + q^2) \phi_q^2, \quad (13)$$

漂移波动能

$$K_1 = \frac{1}{8} (1 + k_x^2 + k_y^2) \phi_1^2, \quad (14)$$

边频带动能

$$K_2 = \frac{1}{8} [1 + (k_x + q)^2 + k_y^2] \phi_2^2, \quad (15)$$

系统总动能

$$K_{\text{total}} = \frac{1}{4} (1 + q^2) \phi_q^2 + \frac{1}{8} (1 + k_x^2 + k_y^2) \phi_1^2 + \frac{1}{8} [1 + (k_x + q)^2 + k_y^2] \phi_2^2 - \frac{2k_x k_y (k_x + q)}{\pi(2k_x + q)} \phi_1 \phi_2, \quad (16)$$

其中 (16) 式右边最后一项表示为漂移波与边频带的偶合能.

Nusselt 数代表热对流运输 [15, 16], 描述系统的湍流态, 其定义如下:

$$Nu(t) = \frac{1}{\kappa K_i} \frac{1}{V} \int (\kappa K_i + p v_x) dV = 1 + \frac{p v_x}{\kappa K_i}, \quad (17)$$

代入 (3) (4) 式后积分得到

$$Nu(t) = 1 + \frac{1}{\kappa K_i} \frac{1}{4} k_y (p_1 \phi_1 - p_2 \phi_2). \quad (18)$$

雷诺协强定义为 [15, 16]

$$\begin{aligned} Sr &= v_x v_y v \\ &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} v \\ &= \frac{2k_x k_y (k_x + q)}{\pi(2k_x + q)} \phi_1 \phi_2. \end{aligned} \quad (19)$$

在以上表达式中,  $\dots_v$  表示对体积  $V$  平均,  $v$  为漂移速度, 形式如下:

$$v = z \times \nabla \phi, \quad (20)$$

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial y}, v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (21)$$

### 3. 动力学方程的稳定性讨论

从非线性动力学方程组(6)–(11)可以看出, 当带状流为零时 ( $\phi_q = 0$ ) ( $\phi_1, p_0, p_1$ ) 形成漂移波的稳定子系统, 在相空间构成一个不变子流形. 由

$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_1, p_0, p_1) = 0$ , 即方程(7)(9)和(10)的右边等于零, 得一代数方程组, 其零解 ( $\phi_1, p_0, p_1$ ) = 0 构成系统的一个稳定态. 上述零解的稳定性分析可以通过(7)(9)和(10)方程组在零解附近的雅可比矩阵入手, 它为

$$\begin{aligned} J_0 &= \begin{bmatrix} -\frac{\mu k_1^4}{1+k_1^2} & 0 & -\frac{gk_y}{1+k_1^2} \\ \frac{1}{2}k_x k_y p_1 & -4\kappa k_x^2 & \frac{1}{2}k_x k_y \phi_1 \\ -k_x k_y p_0 - k_y K_i & -k_x k_y \phi_1 & -\kappa k_1^2 \end{bmatrix}_{(\phi_1, p_0, p_1)=0} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\mu k_1^4}{1+k_1^2} & 0 & -\frac{gk_y}{1+k_1^2} \\ 0 & -4\kappa k_x^2 & 0 \\ -k_y K_i & 0 & -\kappa k_1^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (22)$$

相应的特征值为

$$\lambda_1 = -4\kappa k_x^2, \quad (23)$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-(\kappa k_1^2 + \kappa k_1^4 + \mu k_1^4) \pm \sqrt{(\kappa k_1^2 + \kappa k_1^4 + \mu k_1^4)^2 - 4(1+k_1^2)(\mu \kappa k_1^6 - gk_y^2 K_i)}}{2(1+k_1^2)}. \quad (24)$$

当有条件(即一次不稳定性条件)

$$gK_i > \frac{\mu \kappa k_1^6}{k_y^2} \quad (25)$$

成立时, 则存在大于 0 的特征值, 方程组的平衡态 ( $\phi_1, p_0, p_1$  均为 0) 不稳定, 产生一次分岔, 导致漂移波迅速增长起来, 系统进入一个新的稳定态, 其解 ( $\phi_1, p_0, p_1$ ) 满足如下方程:

$$-gk_y p_1 - k_1^4 \mu \phi_1 = 0, \quad (26)$$

$$-4k_x^2 \kappa p_0 + \frac{1}{2}k_x k_y p_1 \phi_1 = 0, \quad (27)$$

$$-k_1^2 \kappa p_1 - k_y K_i \phi_1 - k_x k_y p_0 \phi_1 = 0. \quad (28)$$

解代数方程组(26)–(28), 得

$$p_1 = -\frac{\mu k_1^4}{gk_y} \phi_1, \quad (29)$$

$$p_0 = -\frac{\mu k_1^4}{8g\kappa k_x} \phi_1^2, \quad (30)$$

$$\phi_1^2 = \frac{8(gk_y^2 \kappa K_i - \kappa^2 k_1^6 \mu)}{k_y^2 k_1^4 \mu}. \quad (31)$$

令  $s_1 = \frac{\kappa k_1^6 \mu}{k_y^2}$ ,  $s = gK_i$ , 则(31)式可以表示为

$$\phi_1^2 = \frac{8\kappa(s - s_1)}{k_1^4 \mu}. \quad (32)$$

现在, 在漂移波一次分岔稳定解(29–32)的基础上, 分析带状流和边频带的稳定性问题, 以及它们的失稳导致的二次分岔. 设 ( $\phi_q(t), \phi_2(t), p_2(t)$ ) 的时间有关的指数函数解为 ( $\phi_q, \phi_2, p_2$ )  $e^{st}$ , 并代入(6)(8)和(11)式, 可得到如下三次方的色散方程:

$$A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda + D = 0, \quad (33)$$

其中系数为

$$A = \mu k_1^4 (1 + k_2^2), \quad (34)$$

$$B = \mu k_1^4 [(1 + k_2^2)(\kappa k_2^2 + \mu q^2) + \mu k_2^4],$$

$$C = k_y^2 q \kappa (2k_x + q)(-k_1^2 + q^2)(s - s_{c1})$$

$$- \mu k_1^4 k_y^2 \left[ s - \frac{k_2^2}{k_1} (k_2^2 + q^2 + k_2^2 q^2) s_{c1} \right] + k_1^4 k_2^4 q^2 \mu^3, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} D &= (-s + s_{c1})(2k_x + q) \\ &\times [\kappa^2 k_2^2 k_y^2 (k_1^2 - q^2) + k_1^4 k_y^2 q \mu \kappa] \\ &+ k_1^4 k_y^2 \mu^2 q^2 (s_{c2} - s), \end{aligned} \quad (36)$$

$$s_{c1} = \frac{\mu \kappa k_1^6}{k_y^2},$$

$$s_{c2} = \frac{\mu \kappa k_2^6}{k_y^2}. \quad (37)$$

当三次方程存在  $\lambda > 0$  的解时,系统将出现二次不稳定性.由参数的数量级分析可知系统的稳定条件为

$$s > s_2 = \frac{(\kappa^2 k_2^2 (k_1^2 - q^2) + k_1^4 \mu \kappa) s_{c1} + k_1^4 \mu^2 q s_{c2}}{\kappa^2 k_2^2 (k_1^2 - q^2) + k_1^4 \mu \kappa + k_1^4 \mu^2 q}. \quad (38)$$

当  $s = gK_i > s_2$ ,系统再次分岔,导致带状流和边频带的产生.

从上述非线性系统的稳定性分析可见,随着驱动力  $s = gK_i$  的增加,首先发生漂移波子系统的失稳,通过第一次分岔,产生出稳定的漂移波.在这个基础上,随着驱动力的进一步增加,发生带状流和边频带子系统的失稳,发生第二次分岔,产生出稳定的带状流和边频带.

## 4. 数值计算结果与分析

数值计算参数选用  $\mu = 0.5$ ,  $\kappa = 0.1$ ,  $k_x = 0.6$ ,  $k_y = 0.6$ ,  $q = 0.06$ .由这些参数及(25)式计算得到一次不稳定性的域值  $s_1 = s_{c1} = 0.0518$ ,二次不稳定性的域值由(38)式计算得  $s_2 = 0.0554$ .为了计算方便, $g$  和  $K_i$  的取值为  $g = K_i = \sqrt{s}$ .数值计算采用的四组参数取值,是依照系统的稳定性状态,由  $g$  与  $K_i$  的乘积与稳定性域值的关系来决定,对于不同的态,而选取不同的值.

**4.1. 驱动力小于一次不稳定性域值( $s < s_1$ ),**漂移波、带状流和边频带均处于衰减模式,不能发展

从图 1 到图 4 的参数为  $K_i = g = 0.2272$ ,  $s = 0.0516$  时,即  $s < s_1$  (小于一次稳定性域值).从图 1 可以看到,由于小于一次稳定性域值,漂移波、带状流及边频带都没有被激发出来,与上节的稳定性分析一致.所以,图 2 的三支波的初始动能很快趋于零.图 3 的 Nusselt 数很快趋于 1,此时系统没有对流热运输,只有热耗散.图 4 的雷诺协强为零.由于驱动力  $gK_i$  过小,即使开始赋予漂移波和带状流一个初始能量,两者由于黏滞阻尼而很快衰减下去.

**4.2. 驱动力大于一次不稳定性域值、小于二次不稳定性域值( $s_2 > s > s_1$ ),**系统激发出漂移波,带状流和边频带仍不能发展

从图 5 到图 8 参数选取为  $K_i = g = 0.228$ ,  $s =$

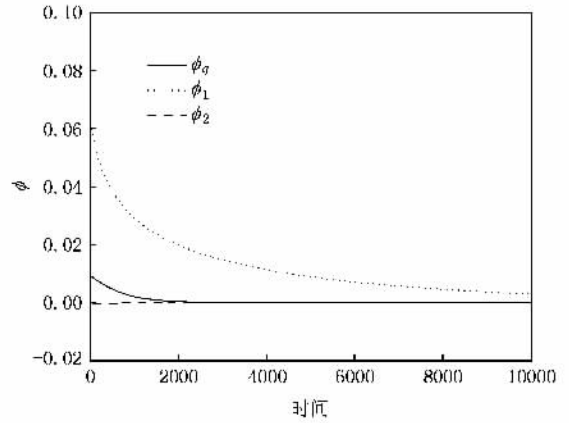


图 1 电势  $\phi$  时间演化曲线

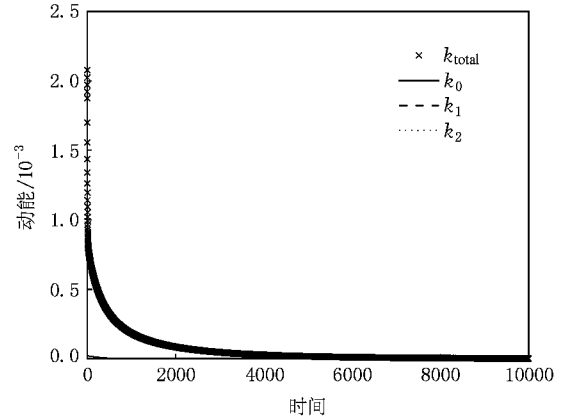


图 2 动能时间演化曲线

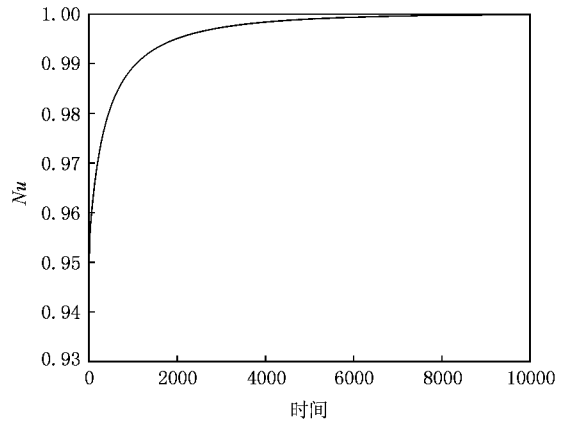


图 3 Nusselt 数时间演化曲线

0.052 时,  $s_2 > s > s_1$  (大于一次不稳定性域值,小于二次不稳定性域值).从图 5 中可以看到,三支波中,只有漂移波被激发出来,这是由于大于一次不稳定性的结果,与上节稳定性分析一致.图 6 显示,系统

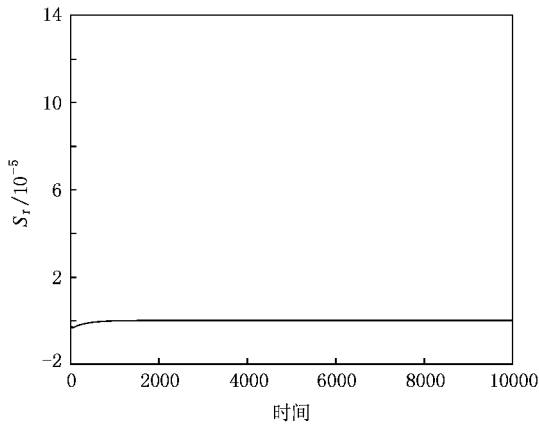


图 4 雷诺协强时间演化曲线

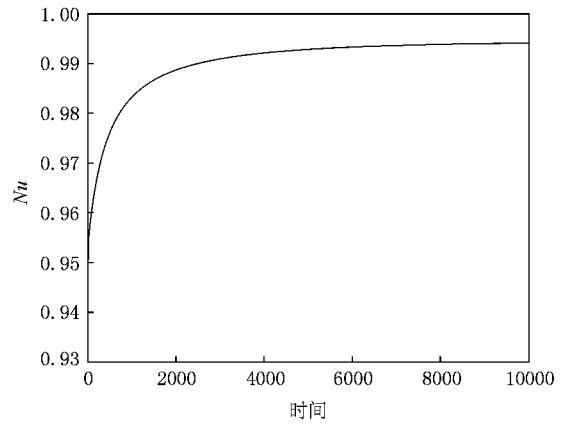


图 7 Nusselt 数时间演化曲线

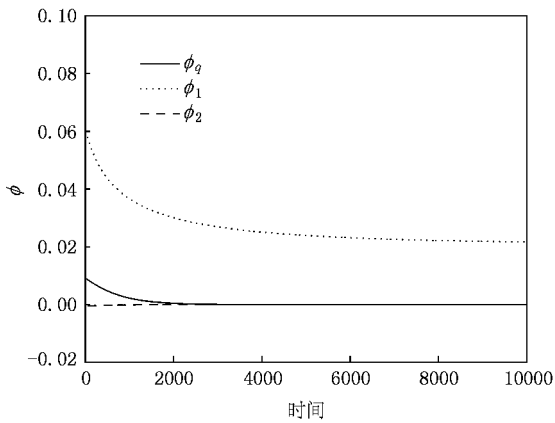


图 5 电势 phi 时间演化曲线

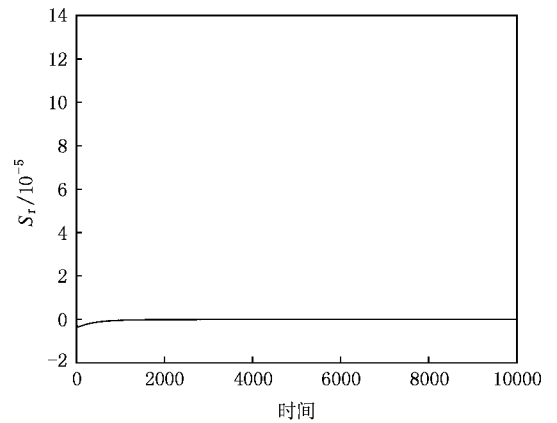


图 8 雷诺协强时间演化曲线

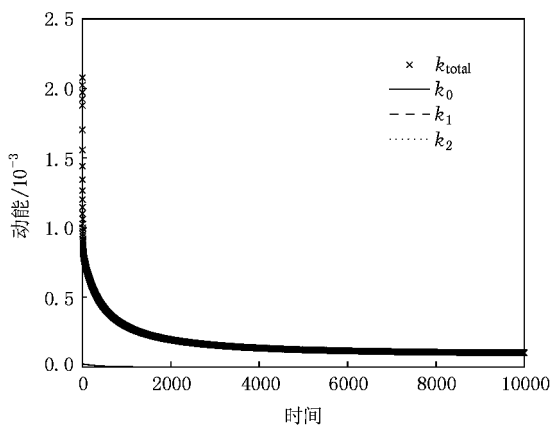


图 6 动能时间演化曲线

状流使其稳定地发展起来,所以总能量与漂移波的能量相等,与带状流有关的雷诺协强为零.

### 4.3. 驱动力大于二次不稳定性域值 ( $s > s_2$ ), 漂移波、带状流和边频带均被激发出来

从图 9 到图 12 的参数为  $K_i = g = 0.2404$ ,  $s = 0.0578$ ,  $s > s_2$  (系统大于二次不稳定性). 根据上节稳定性分析,此时驱动力可以激发漂移波、带状流和边频带. 从图 9 可以看到,带状流充分地发展起来,漂移波和边频带也同时出现,并保持稳定模式. 图 10 的总能量稍微大于带状流的能量,漂移波的能量很小,说明带状流吸收了系统湍流的大部分能量,湍流受到抑制. 此时图 12 中的雷诺协强不再为零,其时间行为与带状流形状相似. 其物理过程为湍流通过雷诺协强产生剪切流,即带状流.

的总能量与漂移波能量重合,其他两支波的能量依然为零. 图 7 的 Nusselt 数始终小于 1,说明系统此时有对流热运输,漂移波从湍流中被激发起来. 由于此时驱动力  $gK_i$  只能激发出漂移波,它还不能激发带

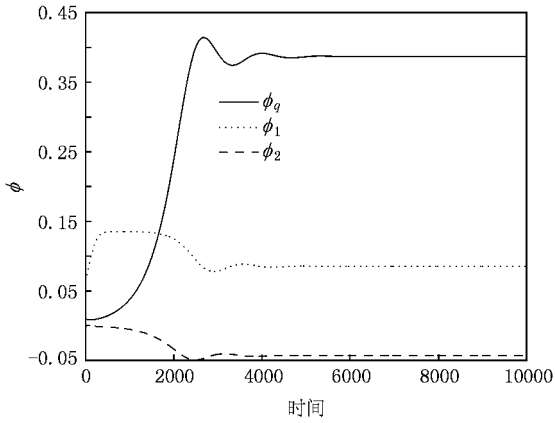


图 9 电势  $\phi$  时间演化曲线

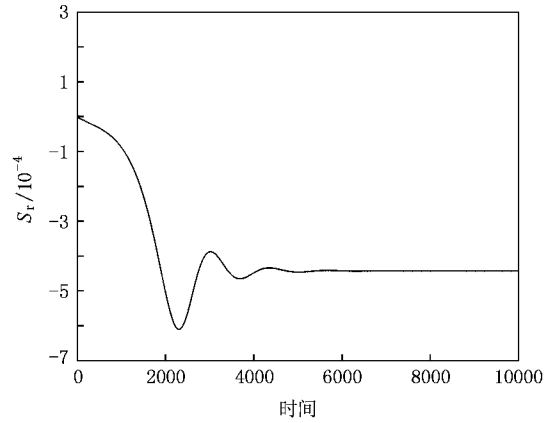


图 12 雷诺协强时间演化曲线

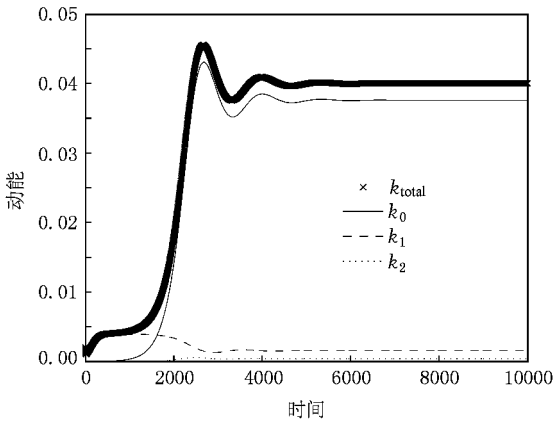


图 10 动能时间演化曲线

增加到图 13 的数值以后,系统进入了与以前的演化模式很不一样的振动模式. 这表明,图 13 的数值 ( $K_i = g = 0.2502, s = 0.0626, s > s_2$ ) 是系统演化从稳态模式向振动模式转变的临界值.

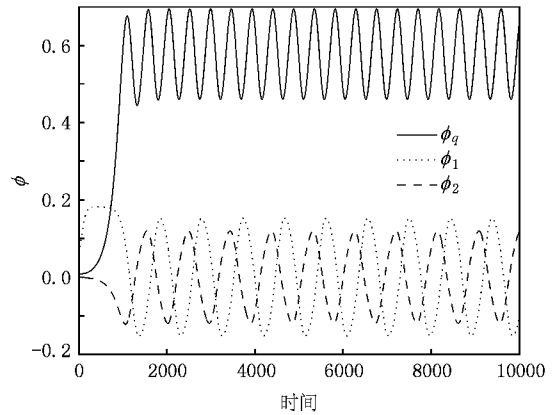


图 13 电势  $\phi$  时间演化曲线

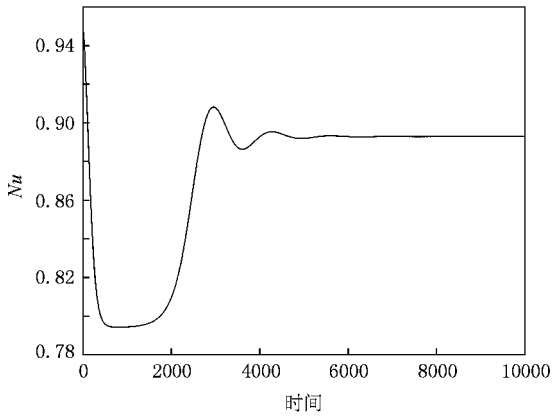


图 11 Nusselt 数时间演化曲线

**4.4. 当驱动力进一步增加到阈值 ( $K_i = g = 0.2502, s = 0.0626, s > s_2$ ) 以上时,系统从稳态模式转向振动模式**

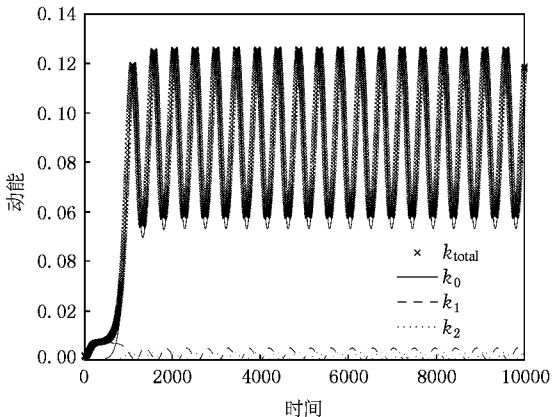


图 14 动能时间演化曲线

从图 13 到图 16 参数选取为  $K_i = g = 0.2502, s = 0.0626, s > s_2$  (大于二次不稳定性域值). 当参数

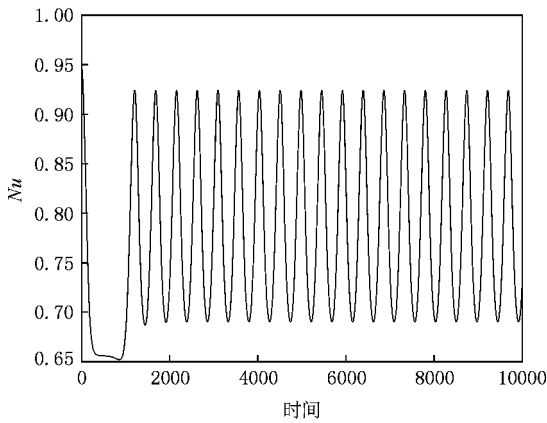


图 15 Nusselt 数时间演化曲线

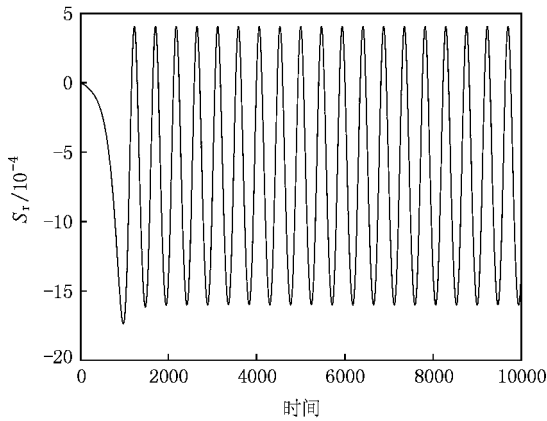


图 16 雷诺协强时间演化曲线

图 13 显示了一个振荡的带状流波形,其他两支波也处于振荡的状态.说明  $s = gK_i$  的进一步增大能导致带状流振荡.在图 14 中,三支波的能量随着其波形的振荡而振荡,并且带状流的能量仍然是几乎与系统的总能量相等,其他两支波的能量很小.同时 Nusselt 数和雷诺协强均出现振荡.雷诺协强产生带状流,带状流又抑制了 ITG 模,这又反过来由于黏滞耗散导致带状流减小.带状流幅度减小,ITG 模得到增长,如此反复,由此形成如图的振荡模式.

为了讨论振动模式的动力学特性,对方程组 (6)–(11) 作变得

$$\delta\phi = \frac{\partial f_1(\phi, p)}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial f_1(\phi, p)}{\partial p} \delta p, \quad (39)$$

$$\delta\dot{p} = \frac{\partial f_2(\phi, p)}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial f_2(\phi, p)}{\partial p} \delta p. \quad (40)$$

此方程组的雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \phi} & \frac{\partial f_1}{\partial p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \phi} & \frac{\partial f_2}{\partial p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi} \\ \bar{p} \end{bmatrix}, \quad (41)$$

其解可表示为

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{\phi} \\ \delta\dot{p} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \delta\phi \\ \delta p \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \delta\phi \\ \delta p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\phi} \\ \bar{p} \end{bmatrix} e^{\lambda t}, \quad (42)$$

其中  $\bar{\phi}, \bar{p}$  系统的二次分岔出的稳态解,  $\lambda = \gamma + i\omega$  为雅可比矩阵  $J$  的本征值,  $\gamma, \omega$  均为实数.系统经过二次不稳定性后,所有波模被激发起来,在没有到达下一个不稳定点之前,  $\bar{\phi}, \bar{p}$  基本恒定,是方程组的一个稳态解.当进一步增加驱动力  $gK_i$  时,经代入具体数值计算发现,存在  $\gamma > 0$  的本征值,所以系统不稳定,将分岔出新的稳定态.此时系统出现振荡(系统经过三次不稳定点后分岔进入一个新的运动模式).

图中振荡的带状流、漂移波和边频带三者的角频率关系可以由 (6) 式得出

$$\Omega_{\phi_q} = \Omega_{\phi_1} + \Omega_{\phi_2}, \quad (43)$$

$\Omega_{\phi_1}$  和  $\Omega_{\phi_2}$  可由此方式得出:对  $\phi_1, \phi_2$  的一阶微分方程再对时间微分一次后,对右边非线性项中的  $\dot{p}_i, \dot{\phi}_i$  用原来的一阶方程 (6)–(11) 消去,得到渐进式  $\frac{d^2 \phi_i}{dt^2} \sim -\Omega_{\phi_i}^2(p_i, \phi_i)\phi_i$ , 其解为  $\phi_i(t) \sim c \sin \Omega_{\phi_i} t + d \cos \Omega_{\phi_i} t$ , 由此得到振动频率

$$\frac{d^2 \phi_i}{dt^2} \sim -\frac{1}{2} \frac{k_y q (k_1^2 + 2k_x q)}{(1 + k_1^2)} \times \left[ \frac{1}{2} \frac{k_y q (k_1^2 - q^2)}{(1 + k_2^2)} |\phi_q|^2 + \frac{1}{4} k_y (2k_x + q) |\phi_2|^2 \right] \phi_1, \quad (44)$$

$$\frac{d^2 \phi_2}{dt^2} \sim -\frac{q^2 k_y^2 (k_1^2 - q^2) (k_1^2 + 2k_x q) |\phi_q|^2}{4(1 + k_1^2)(1 + k_2^2)} \phi_2, \quad (45)$$

$$\Omega_{\phi_1}^2 = \frac{qk_y (k_1^2 + 2k_x q)}{2(1 + k_1^2)} \times \left[ \frac{qk_y (k_1^2 - q^2) |\phi_q|^2}{2(1 + k_2^2)} + \frac{1}{4} k_y (2k_x + q) |\phi_2|^2 \right], \quad (46)$$

$$\Omega_{\phi_2}^2 = \frac{q^2 k_y^2 (k_1^2 - q^2) (k_1^2 + 2k_x q) |\phi_q|^2}{4(1 + k_1^2)(1 + k_2^2)}. \quad (47)$$

代入具体参数后计算得到各频率为  $\Omega_{\phi_1} \approx 0.0072$ ,  $\Omega_{\phi_2} \approx 0.0054$ ,  $\Omega_{\phi_3} \approx 0.0126$ , 与图中的数值计算结果一致. 从上式可以看出三者的振荡周期与带状流和边频带的幅度有关, 而此幅度是三次分岔后的稳定态, 与控制稳定性的参数驱动力  $gK_i$  有关, 所以系统的振荡时间尺度由  $gK_i$  决定.

参数进一步增加后, 系统仍然继续保持振动模式, 但各物理量的具体振荡样式(频率和振幅)对参数  $K_i$ ,  $g$  和  $s$  的依赖仍然敏感. 随着  $K_i$  等参数的增加, 系统各物理量的振动样式有较大的变化. 当  $gK_i$  乘积取较大的数值时, 系统出现高频振荡的演化模式.

## 5. 讨论与结论

从数值计算结果可以看出, 漂移波和带状流的发展、演化与系统的参量  $g$  和  $K_i$  的乘积  $s = gK_i$  的值有密切关系. 这两个参数分别与托卡马克装置的磁场曲率和温度梯度有关, 相当于外加的驱动力, 它( $s$ )的大小决定了系统的运行模式. 驱动力可以理解

为外界的能量注入. 随着注入能量的增加, 当它突破第一个不稳定阈值后, 系统出现 ITG 模湍流. 当它超过第二个不稳定性阈值后, 带状流也被激发出来, 然后带状流从 ITG 模湍流中吸取能量, 抑制了湍流的进一步发展. 这一点可以从能量演化曲线清楚地看出. 最后通过各种模式之间的相互作用使能量达到平衡. 这一过程对应于托卡马克系统从低约束模式向稳态运行的高约束模式的转变. 当进一步注入能量后, 系统呈现振荡模式, 能量在三种模式之间周期性地转换. 另外, 雷诺协强的时间演化与带状流同步, 说明在 ITG 模湍流中, 带状流由雷诺协强驱动.

本文选取系统中带状流与漂移波湍流相互耦合的分立谱有效特征模, 在扰动量的描述上表现为选取少量基矢, 即最小自由度近似. 从以上计算结果的分析讨论可知, 所选用的最小自由度近似能很好的反映系统的主要物理特征, 得到了离子温度梯度模湍流激发的带状流, 以及带状流与漂移波相互作用产生的物理效应等重要的物理信息. 这些结果对托卡马克系统从低约束模式向稳态运行的高约束模式的转变机理和控制的研究有参考价值.

- [ 1 ] Diamond P H, Itoh S I, Itoh K, Hahn T S 2005 *Plasma Phys. Control. Fusion* **47** R35
- [ 2 ] Manfredi G, Roach C M, Dendy R O 2001 *Plasma Phys. Control. Fusion* **43** 825
- [ 3 ] Chen L, Lin Z, White R 2000 *Phys. Plasmas* **7** 3129
- [ 4 ] Zhao K J, Lan T, Dong J Q, Yan L W, Hong W Y, Yu C X, Liu A D, Qian J, Cheng J, Yu D L, Yang Q W, Ding X T, Liu Y, Pan C H 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 255004
- [ 5 ] Yan L W, Hong W Y, Lan T, Zhao K J, Dong J Q, Liu A D, Yu C X, Cheng J, Yu D L, Qian J, Huang Y, Yang Q W, Ding X T, Liu Y, Pan C H 2007 *Nucl. Fusion* **47** 1673
- [ 6 ] Zhao J K, Dong J Q, Yan L W, Hong W Y, Lan T, Liu A D, Qian J, Cheng J, Yu D L, Huang Y, He H D, Liu Y, Yang Q W, Duan X R, Song X M, Ding X T, Liu Y 2007 *Physics of Plasmas* **14** 122301
- [ 7 ] Lan T, Liu A D, Yu C X, Yan L W, Hong W Y, Zhao K J, Dong J Q, Qian J, Cheng J, Yu D L, Yang Q W 2008 *Phys. Control. Fusion* **50** 045002
- [ 8 ] Lan T, Liu A D, Yu C X, Yan L W, Hong W Y, Zhao K J, Dong J Q, Qian J, Cheng J, Yu D L, Yang Q W 2008 *Physics of Plasmas* **15** 056105
- [ 9 ] Gao Z, Itoh K, Sanuki H, Dong J Q 2006 *Phys. Plasmas* **13** 100702
- [ 10 ] Anderson J, Kishimoto Y 2006 *Physics of Plasmas* **13** 102304
- [ 11 ] Anderson J, Kishimoto Y 2007 *Physics of Plasmas* **14** 012308
- [ 12 ] Horton W, Hu G, Laval G 1996 *Phys. Plasmas* **3** 2912
- [ 13 ] Yin S Q, Peng X D 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3094 ( in Chinese )  
[ 尹绍全 2004 物理学报 **53** 3094 ]
- [ 14 ] Hu G, Horton W 1997 *Phys. Plasmas* **4** 3262
- [ 15 ] Takeda K, Benkadda S, Hamaguchi S, Wakatani M 2004 *Physics of Plasmas* **11** 3561
- [ 16 ] Takeda K, Benkadda S, Hamaguchi S, Wakatani M 2005 *Physics of Plasmas* **12** 052309
- [ 17 ] Hasegawa A, MacLennan C G 1979 *Phys. Fluid* **22** 2122



# Zonal flow dynamics in background of ion-temperature-gradient mode turbulence based on minimal freedom model<sup>\*</sup>

Lu He-Lin<sup>‡</sup> Wang Shun-Jin<sup>†</sup>

( Center of Theoretical Physics , School of Physical Science and Technology , Sichuan University , Chendu 610064 , China )

( Received 16 April 2008 ; revised manuscript received 14 May 2008 )

## Abstract

In the ITG ( ion-temperature-gradient ) mode turbulence background , the dynamics of zonal flow generation is studied based on the minimal freedom model . We study the dynamical instability and present detailed numerical results . The energy cascade process in the ITG mode turbulence and the relationship between Reynolds stress and zonal flow are also discussed . The mechanism of turbulence suppression by zonal flow is clearly explored and displayed .

**Keywords** : plasmas , ITG mode , turbulence , zonal flow

**PACC** : 5235M , 5235K , 5235R

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 90503088 and 10775100 ) , and by the Fund of Theoretical Nuclear Physics Center , National Laboratory of Heavy Ion Accelerator Facility of Lanzhou .

<sup>†</sup> Corresponding Author , E-mail : sjwang@home.swjtu.edu.cn

<sup>‡</sup> E-mail : luhelin@gmail.com