第 58 卷 第 10 期 2009 年 10 月
1000-3290/2009/58(10)/6798-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.10,October,2009

Schwarzschild-de Sitter 黑洞的 Hawking 辐射*

胡双启[1)] 张丽春[2)] 赵 仁[1)2)†]

1)(中北大学环境与安全工程系 太原 030051)

2)(山西大同大学理论物理研究所 大同 037009)

(2008 年 12 月 14 日收到;2008 年 12 月 30 日收到修改稿)

利用延拓 Damour-Ruffini 方法,研究 Schwarzschild-de Sitter 黑洞的 Hawking 辐射.在保持时空中总能量守恒的条件下,考虑辐射粒子对时空的反作用和黑洞事件视界与宇宙视界的相互关联后,得到黑洞辐射谱.此辐射不再是严格的纯热谱,与黑洞事件视界和宇宙视界对应 Bekenstein-Hawking 熵变有关,发现其结果仍然符合幺正性原理.

关键词:Damour-Ruffini 方法,Hawking 辐射,能量守恒

PACC:0420,9760L

1.引言

2000 年,Parikh 和 Wilczek[1] 提出了一种计算黑洞 Hawking 辐射修正谱的半经典方法——隧穿法.其关键点是将黑洞的 Hawking 辐射理解成一种量子隧穿,势垒强弱取决于出射粒子自身能量的大小.这种方法关键是强调粒子出射过程能量守恒,并且要找到一个在视界处表现良好的坐标系.用这种方法,Parikh 和 Wilczek[1] 计算了粒子穿过 Schwarzschild 黑洞和 Reissner-Nordstrom 黑洞视界的辐射谱,所得结论偏离纯热谱,满足幺正性原理,支持信息守恒的结论.随后,人们将这一方法推广到计算各类黑洞的 Hawking 辐射谱[2—26],均满足幺正性原理,支持信息守恒的结论.

众所周知,黑洞可看作一热力学系统,具有温度和熵,对不含有宇宙项的时空,这一热力学系统的态参量全部体现在黑洞视界面上,黑洞向外界传递信息的'窗口'只是黑洞事件视界.人们用隧穿方法研究了这类黑洞的辐射谱,得到了满意的结论.而对于含有宇宙项的时空,黑洞这一热力学系统的态参量不仅体现在黑洞事件视界面上,而且也体现在宇宙视界面上,因此黑洞向外界传递信息的'窗口'不只是黑洞事件视界,还有宇宙视界.由于黑洞事件视界和宇宙视界的态参量均为黑洞参量,所以两视界的辐射具有关联性.考虑两视界具有关联性后,对于黑洞辐射谱的研究目前尚未见报道.

本文将拓展经典证明 Hawking 辐射的 Damour-Ruffini[27] 方法,讨论具有黑洞事件视界和宇宙视界的 Schwarzschild-de Sitter 时空的辐射谱.在保持时空总能量守恒的情况下,考虑辐射对时空的反作用和黑洞事件视界和宇宙视界的相互关联后,得到黑洞的辐射谱偏离黑体谱的结论.此辐射不再是严格的纯热谱,与黑洞事件视界和宇宙视界对应 Bekenstein-Hawking 熵变有关,使人们对黑洞热辐射的研究有了进一步的认识.

2.Klein-Gordon 方程

Schwarzschild-de Sitter 时空线元为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= -f(r)\mathrm{d}t^2 + f^{-1}(r)\mathrm{d}r^2 \\ &\quad + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2),\end{aligned} \tag{1}$$

式中 $f(r)=1-\frac{2M}{r}-\frac{r^2}{l^2}$,其中 M 为黑洞质量.黑洞事件视界 r_+ 和宇宙视界 r_c 是方程 $f(r)=0$ 的两正根.

黑洞事件视界对应的 Hawking 辐射温度和熵为

$$\tilde{T} = \frac{1}{4\pi r_+}\left(1-3\frac{r_+^2}{l^2}\right),\quad \tilde{S} = \pi r_+^2. \tag{2}$$

由 Abbott 和 Deser(AD)给出的黑洞事件视界对应的能量 $\tilde{E}$ 满足[28,29]

$$\tilde{E} = M = \frac{r_+}{2}\left(1-\frac{r_+^2}{l^2}\right). \tag{3}$$

由此,黑洞视界对应的热力学量满足热力学第一

* 山西省自然科学基金(批准号:2006011012)和山西大同大学博士基金资助的课题.

† 通讯联系人.E-mail:zhao2969@sina.com

定律
$$d\tilde{E} = \tilde{T}d\tilde{S}. \tag{4}$$
宇宙视界对应的 Hawking 辐射温度和熵为
$$T = \frac{1}{4\pi r_c}\left(3\frac{r_c^2}{l^2} - 1\right),\quad S = \pi r_c^2. \tag{5}$$
由 Balasubramanian，de Boer 和 Minic（BBM）给出的宇宙视界对应的能量 E 满足[30,31]
$$E = -M = \frac{r_c}{2}\left(\frac{r_c^2}{l^2} - 1\right). \tag{6}$$
由此，宇宙视界对应的热力学量满足热力学第一定律
$$dE = TdS. \tag{7}$$
弯曲时空中的 Klein-Gordon 方程为
$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Phi - \mu_0^2\Phi = 0, \tag{8}$$
其中 μ_0 为标量粒子的静质量.

把度规(1)代入(8)式可得
$$\left[-f^{-1}(r)\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f(r)\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{(f(r)r^2)'}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi = \mu_0^2\Phi. \tag{9}$$
分离变量，令
$$\Phi = e^{-i\omega t}Y_{lm}(\theta,\varphi)R(r), \tag{10}$$
则方程(9)化为
$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)Y_{lm} = l(l+1)Y_{lm}, \tag{11}$$
$$\frac{d}{dr}[f(r)r^2]\frac{dR(r)}{dr} = \left[l(l+1) + \mu_0^2r^2 - \frac{\omega^2r^2}{f(r)}\right]R(r). \tag{12}$$
其中 l 和 m 分别为角量子数和磁量子数，$Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 为球谐函数. 我们只研究沿径向传播的辐射，因此我们只对径向方程进行讨论.

3. 黑洞视界面上的出射率

对 Schwarzschild-de Sitter 时空，定义 Tortoise 坐标变换[32]
$$dr_* = \frac{1}{f(r)}dr,\quad \frac{d}{dr} = \frac{1}{f(r)}\frac{d}{dr_*}, \tag{13}$$
$$\frac{d^2}{dr^2} = \frac{1}{f^2(r)}\frac{d^2}{dr_*^2} - \frac{f'(r)}{f^2(r)}\frac{d}{dr_*}. \tag{14}$$
将(13)和(14)式代入(12)式得
$$r^2\frac{d^2R(r)}{dr_*^2} + 2rf(r)\frac{dR(r)}{dr_*} = [f(r)(l(l+1) + \mu_0^2) - r^2\omega^2]R(r). \tag{15}$$
当 $r\to r_+$ 时，$f(r_+)\to 0$，由此(15)式在黑洞视界附近化为
$$\frac{d^2R(r)}{dr_*^2} + \omega^2R(r) = 0. \tag{16}$$
方程(16)的解为
$$R = e^{\pm i\omega r_*}, \tag{17}$$
计入时间因子，则自黑洞视界 r_+ 向外的出射波
$$\Psi_{out}(r > r_+) = e^{-i\omega(t-r_*)} = e^{-i\omega v}e^{2i\omega r_*}, \tag{18}$$
进入黑洞视界 r_+ 的入射波
$$\Psi_{in} = e^{-i\omega(t+\hat{r})} = e^{-i\omega v}, \tag{19}$$
式中 $v = t + r_*$ 为 Eddington-Finkelstein 坐标. 由于 $dr_* = \frac{1}{f(r)}dr$，所以在黑洞视界面 r_+ 附近有
$$\ln(r - r_+) = f'(r_+)r_* = 2\kappa_+ r_*, \tag{20}$$
式中 κ_+ 是黑洞视界面 r_+ 上的引力加速度.

由(20)式可得
$$r - r_+ = \exp(2\kappa_+ r_*), \tag{21}$$
于是出射波可改写为
$$\Psi_{out}(r > r_+) = e^{-i\omega v}(r - r_+)^{i\omega/\kappa_+}. \tag{22}$$
可以看出，出射波在黑洞视界面 r_+ 奇异，上式只能描述黑洞视界 r_+ 外的出射粒子，不能描写黑洞视界内的出射粒子.

研究黑洞辐射，感兴趣的是出射波，然而由(22)式知，出射波在 $r = r_+$ 处奇异，为此我们把 Ψ_{out} 解析延拓到黑洞视界内，我们以奇点 $r = r_+$ 为圆心，以 $|r - r_+|$ 为半径，沿下半复 r 平面作解析延拓，转动 $(-\pi)$ 角[32]，这时
$$r - r_+ \to |r - r_+|e^{-i\pi} = (r_+ - r)e^{-i\pi}, \tag{23}$$
于是得到视界面 r_+ 内的出射波
$$\Psi_{out}(r < r_+) = e^{\pi\omega/\kappa_+}e^{-i\omega v}e^{2i\omega r_*}. \tag{24}$$
(24)和(18)式分别描述了黑洞内外的出射波. 因此能量为 ω 粒子的出射波，在黑洞视界面上的出射率为
$$\Gamma_+ = \left|\frac{\Psi_{out}(r > r_+)}{\Psi_{out}(r < r_+)}\right|^2 = e^{-2\pi\omega/\kappa_+}. \tag{25}$$
由(3)式知，Schwarzschild-de Sitter 时空黑洞视界对应的能量 $\tilde{E} = M$，由黑洞视界辐射粒子的能量为 ω，所以 $\Delta\tilde{E} = -\omega$. 将(4)式代入(25)式，可得黑洞事件视界面上的出射率
$$\Gamma_+ = \exp[\Delta S_+], \tag{26}$$
式中 ΔS_+ 是黑洞事件对应的 Bekenstein-Hawking 熵差.

4. 宇宙视界面上的出射率

当 $r \to r_c$ 时，$f(r_c) \to 0$，由此(15)式在宇宙视界附近化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 R(r)}{\mathrm{d}r_*^2} + \omega^2 R(r) = 0. \tag{27}$$

用相似的方法经过相似的计算过程，可得能量为 ω 粒子的出射波，在宇宙视界面上的出射率为[33,34]

$$\Gamma_c = \left| \frac{\widetilde{\Psi}_{\mathrm{out}}(r_c > r)}{\widetilde{\Psi}_{\mathrm{iout}}(r_c < r)} \right|^2 = \mathrm{e}^{2\pi\omega/\kappa_c}. \tag{28}$$

式中 $\kappa_c = f'(r_c)/2$ 是宇宙视界表面加速度.

由(6)式知，Schwarzschild-de Sitter 时空宇宙视界对应的能量 $E = -M$，由宇宙视界辐射粒子的能量为 ω，所以 $\Delta E = \omega$. 将(7)式代入(28)式，可得宇宙视界面上的出射率

$$\Gamma_c = \exp[\Delta S_c], \tag{29}$$

式中 ΔS_c 是宇宙事件对应的 Bekenstein-Hawking 熵差.

5. de Sitter 时空中的辐射谱

将黑洞看作一热力学系统，现在我们讨论这一热力学系统向外辐射能量为 ω 粒子的辐射率. 由第 3 和第 4 部分的讨论知，在不考虑宇宙视界辐射的情况下，黑洞事件视界辐射能量为 ω 粒子的出射率为(26)式. 当黑洞事件视界辐射能量为 ω 的粒子后，由(7)式知，宇宙视界对应的熵变为 ΔS_c，因此，我们也可以认为(26)式是由黑洞事件视界辐射能量为 ω 粒子，引起宇宙视界熵变为 ΔS_c 的概率. 同理我们可以认为(29)式是由宇宙视界辐射能量为 ω 粒子，引起黑洞事件视界熵变为 ΔS_+ 的概率. 由此可知，对于黑洞事件视界，由于辐射能量 ω 粒子引起熵变为 ΔS_+ 的途径有两条：其一是黑洞自身辐射能量为 ω 的粒子，概率由(26)式给出. 其二是由宇宙视界辐射能量为 ω 的粒子，概率由(29)式给出. 所以，黑洞这一热力学系统辐射能量为 ω 的粒子，引起黑洞事件视界熵变为 ΔS_+ 的概率为

$$\Gamma = \Gamma_+ \Gamma_c = \mathrm{e}^{\Delta S_+ + \Delta S_c}. \tag{30}$$

同理可得，黑洞这一热力学系统辐射能量为 ω 的粒子，引起宇宙视界熵变为 ΔS_c 的概率也为(30)式. 因此，可将(30)式理解为黑洞这一热力学系统辐射能量为 ω 粒子的出射率.

可见 Schwarzschild-de Sitter 黑洞的辐射谱不但与黑洞事件视界的熵变有关，而且也与宇宙视界熵变有关，并不是严格的纯热谱.

6. 结 论

对于 de Sitter 时空，由于此类时空不仅黑洞事件视界具有辐射，而且宇宙视界也有粒子的辐射，文献[13，21，23，35—37]对此类时空量子隧穿的研究，是将黑洞事件视界和宇宙视界看作独立的两个视界，然后分别讨论各自的辐射谱，对两视界的相互关联没有考虑. 由于 Schwarzschild-de Sitter 黑洞描述两视界的态参量均为黑洞的参量，所以两视界的辐射是互相关联的. 对此类黑洞辐射谱的讨论不能单独考虑某一视界的辐射，必须考虑两视界的关联性. 本文给出考虑两视界互相关联的辐射谱，此辐射谱满足幺正性原理.

[1] Parikh M K，Wilczek F 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5042

[2] Zhang J Y，Zhao Z 2006 *Phys. Lett.* B **638** 110

[3] Zhang J Y，Fan J H 2007 *Phys. Lett.* B **648** 133

[4] Zhang J Y，Zhao Z 2005 *Phys. Lett.* B **618** 14

[5] Zhang J Y，Zhao Z 2005 *Nucl. Phys.* B **725** 173

[6] Zhang J Y，Zhao Z 2005 *J. High Energy Phys.* **10** 055

[7] Wu X，Gao S 2007 *Phys. Rev.* D **75** 044027

[8] Arzano M，Medved A J M，Vagenas E C 2005 *J. High Energy Phys.* **09** 037

[9] Zhou S W，Liu W B 2008 *Phys. Rev.* D **77** 104021

[10] Jiang Q Q，Wu S Q，Cai X 2007 *Phys. Rev.* D **75** 064029

[11] Li R，Ren J R 2008 *Phys. Lett.* B **661** 370

[12] Peng J J，Wu S Q 2008 *Phys. Lett.* B **661** 300

[13] Li H L，Jiang Q Q，Yang S Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 539 (in Chinese)［李慧玲、蒋青权、杨树政 2006 物理学报 **55** 539］

[14] Zhang J Y，Zhao Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3796 (in Chinese)［张靖仪、赵 峥 2006 物理学报 **55** 3796］

[15] Jiang Q Q，Wu S Q，Cai X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3083 (in Chinese)［蒋青权、吴双清、蔡 勖 2007 物理学报 **56** 3083］

[16] Liu W B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6164 (in Chinese)［刘文彪 2007 物理学报 **56** 6164］

[17] Zhao R，Zhang L C，Hu S Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3898 (in Chinese)［赵 仁、张丽春、胡双启 2006 物理学报 **55** 3898］

[18] Kerner R，Mann R B 2008 *Phys. Lett.* B **665** 277

[19] Zhao R，Li H F，Hu S Q 2007 *Chin. J. Phys.* **45** 32

[20] Hu Y P，Zhang J Y，Zhao Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 683 (in Chinese)［胡亚鹏、张靖仪、赵 峥 2007 物理学报 **56** 683］

[21] Chen D Y，Jiang Q Q，Zu X T 2008 *Phys*. *Lett*. B **665** 106
[22] Jiang Q Q 2008 *Phys*. *Lett*. B **666** 517
[23] Ma Z Z 2008 *Phys*. *Lett*. B **666** 376
[24] Zhang B，Cai Q Y，Zhan M S 2008 *Phys*. *Lett*. B **665** 260
[25] Zhang J Y 2008 *Phys*. *Lett*. B **668** 353
[26] Zhao R，Zhang L C，Li H F 2008 *Acta Phys*. *Sin*. **57** 7463（in Chinese）[赵 仁、张丽春、李怀繁 2008 物理学报 **57** 7463]
[27] Damour T，Ruffini R 1976 *Phys*. *Rev*. D **14** 332
[28] Cai R G 2002 *Nucl*. *Phys*. B **628** 375
[29] Abbott L F，Deser S 1982 *Nucl*. *Phys*. B **195** 76
[30] Balasubramanian V，de Boer J，Minic D 2002 *Phys*. *Rev*. D **65** 123508
[31] Ghezelbash A M，Mann R B 2002 *J*. *High Energy Phys*. **0201** 005
[32] Zhao Z 1999 *Black Hole Thermodynamics and Singularity of Spacetime*（Beijing：Beijing Normal University Press）（in Chinese）[赵 峥 1999 黑洞的热性质与时空奇异性（北京：北京师范大学出版社）]
[33] Zhao Z，Zhu J Y 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1558（in Chinese）[赵 峥、朱建阳 1999 物理学报 **48** 1558]
[34] Wang Y J 2008 *The Classical Black Hole and Quantum Black Hole*（Beijing：Science Press）（in Chinese）[王永久 2008 经典黑洞和量子黑洞（北京：科学出版社）]
[35] Medved A J M 2002 *Phys* . *Rev*. D **66** 124009
[36] Jiang Q Q，Wu S Q 2006 *Phys*. *Lett*. B **635** 151
[37] Zhou L，Zhang J Y 2008 *Commun*. *Theor*. *Phys*.（*Beijing*，*China*）**50** 1258

Hawking radiation of Schwarzschild-de Sitter black hole*

Hu Shuang-Qi[1)] Zhang Li-Chun[2)] Zhao Ren[1)2)†]
1)（*Department of Environment and Safety Engineering*，*North University of China*，*Taiyuan* 030051，*China*）
2)（*Institute of Theoretical Physics*，*Shanxi Datong University*，*Datong* 037009，*China*）
（Received 14 December 2008；revised manuscript received 30 December 2008）

Abstract

We extend the classical Damour-Ruffini method and discuss Hawking radiation in Schwarzschild -de Sitter black hole. Under the condition that the total energy of spacetime is conservative，considering the effect of radiation particle on the spacetime and the relevance between the black hole event horizon and cosmological horizon，we obtain the black hole radiation spectrum. The radiation spectrum is no longer a pure thermal spectrum. It is related to Bekenstein-Hawking entropy change corresponding to the black hole event horizon and cosmological horizon. The result is consistent with an underlying unitary theory.

Keywords：Damour-Ruffini method，Hawking radiation，energy conservation
PACC：0420，9760L

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shanxi Province，China（Grant No. 2006011012）and the Doctoral Scientific Research Starting Foundation of Shanxi Datong University，China.
† Corresponding author. E-mail：zhao2969@sina.com