

多涡卷混沌系统的广义同步控制

吴忠强[†] 邝 钰

(燕山大学工业计算机控制工程河北省重点实验室, 秦皇岛 066004)

(2009 年 1 月 9 日收到, 2009 年 2 月 9 日收到修改稿)

基于反步自适应方法, 提出了一种在初值不同以及驱动系统参数未知的情况下, 保持驱动和响应两多涡卷混沌系统同步的控制律设计方法. 该方法所设计的控制律能够同时适用于两混沌系统的完全同步、反同步和一类非线性广义同步, 具有较高的实用价值. 仿真结果表明了所设计控制律的有效性.

关键词: 多涡卷混沌, 广义同步, 反步, 自适应

PACC: 0545

1. 引 言

混沌系统的同步在保密通信中有巨大的应用前景^[1], 吸引了大量的科研人员对此开展理论和实验研究. 先前国内外有关异结构或同结构混沌同步的研究大多集中在 Lorenz, Rössler, Chen's 等几种系统^[2-6], 而多涡卷混沌吸引子的主要特点是具有更复杂的混沌动力学行为和更多的密钥参数, 如多个不同的斜率和多个不同转折点值等^[7], 因此更适合在混沌通信中应用. 基于滞环非线性的多涡卷混沌系统可以采用二阶系统和滞环函数实现, 因为系统是二阶的, 而二阶系统既可以在理论上进行严格的数学分析, 又便于硬件实现, 所以具有较好的应用前景.

混沌同步的概念最初仅指完全同步, 也就是从不同初始点出发的两个混沌系统, 随着时间的推移其轨道趋于一致的同步. 随着人们对混沌同步研究的深入, 反同步、广义同步、相同步、延迟同步和映射同步等不同的同步概念纷纷被提出^[8]. 目前对这些同步的研究还比较少, 其中所谓反同步是指同步后的两个混沌系统状态变量振幅大小相等, 方向相反^[9], 而广义同步则是指响应系统的状态变量和驱动系统状态变量函数之间的同步^[10]. 与完全同步相比, 它们更适用于保密通信, 因此更具有研究价值和意义.

广义同步两系统之间的对应关系既有线性的, 也有非线性的. 通过研究不难发现, 完全同步和反同步只是线性广义同步的两种特例. 本文针对基于滞环非线性的多涡卷混沌系统进行了广义同步研究,

所设计的控制律既能实现两涡卷混沌系统的一类非线性广义同步, 又可以实现两系统的完全同步、反同步以及一类线性广义同步.

2. 问题描述

定义 1 考虑如下两个动力学系统:

$$\dot{X} = F_1(X), \quad (1)$$

$$\dot{Y} = F_2(Y) + U(X, Y), \quad (2)$$

其中 $X \in R^n$, $Y \in R^m$ 为系统状态向量, U 为控制输入向量. 称 (1) 式为驱动系统, (2) 式为响应系统. 给定一个映射 $G: R^n \rightarrow R^m$, 如果在控制器函数 U 作用下, 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - G(X(t))\| = 0,$$

则称 (1) 和 (2) 式所定义的系统达到了广义同步.

基于滞环非线性函数的多涡卷混沌驱动和响应系统的状态方程分别为^[11]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 \text{Hys}(x_1); \end{aligned} \quad (3)$$

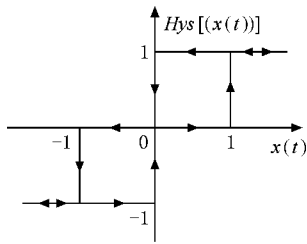
和

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + u_1, \\ \dot{y}_2 &= -a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 \text{Hys}(y_1) + u_2, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 x_1, x_2, y_1 和 y_2 为状态变量; a_1, b_1 和 c_1 为驱动系统参数; a_2, b_2 和 c_2 为响应系统参数; u_1 和 u_2 为控制输入; $\text{Hys}(\cdot)$ 为向第三象限拓展后的滞环非线性函数, 其传输特性如图 1.

假设参数 a_1, b_1 和 c_1 未知, 其估值分别为 $\hat{a}_1,$

[†] E-mail: mewzq@163.com

图 1 $Hys(\cdot)$ 函数的传输特性

\hat{b}_1 和 \hat{c}_1 , 相应的估值误差分别为 $\tilde{a}_1 = a_1 - \hat{a}_1$, $\tilde{b}_1 = b_1 - \hat{b}_1$, $\tilde{c}_1 = c_1 - \hat{c}_1$.

定义误差变量

$$\begin{aligned} e_1 &= y_1 - g_1(t, x_1), \\ e_2 &= y_2 - g_2(t, x_2), \end{aligned} \quad (5)$$

其中 g_1 和 g_2 为两混沌系统相应状态间的非线性对应关系函数. 如果在控制输入 u_1 和 u_2 的作用下, $e_1 \rightarrow 0$, $e_2 \rightarrow 0$, 则响应系统 (4) 就与驱动系统 (3) 保持了由非线性对应关系 g_1 和 g_2 所确定的广义同步.

3. 控制器设计

通过求误差变量 (5) 式对时间 t 的一阶导数可以得到如下误差系统方程:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 + g_2 - \left(\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial g_1}{\partial x_1} x_2 \right) + u_1, \\ \dot{e}_2 &= -a_2 e_1 + b_2 e_2 - a_2 g_1 + b_2 g_2 + c_2 Hys(y_1) \\ &\quad - \left[\frac{\partial g_2}{\partial t} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} (-a_1 y_1 \right. \\ &\quad \left. + b_1 y_2 + c_1 Hys(x_1)) \right] + u_2. \end{aligned} \quad (6)$$

为了便于使用反步法进行控制器设计, 首先选取控制输入

$$u_1 = -g_2 + \left(\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial g_1}{\partial x_1} x_2 \right),$$

进行补偿, 则补偿后的误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= -a_2 e_1 + b_2 e_2 - a_2 g_1 + b_2 g_2 + c_2 Hys(y_1) \\ &\quad - \left[\frac{\partial g_2}{\partial t} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} (-a_1 y_1 \right. \\ &\quad \left. + b_1 y_2 + c_1 Hys(x_1)) \right] + u_2. \end{aligned} \quad (7)$$

下面使用反步自适应方法来求取广义同步控制输入 u_2 .

首先考虑子系统 e_1 , 把 e_2 当成子系统 e_1 的虚拟控制输入, 令 $\alpha_1 = e_1$, 选取第一个 Lyapunov 函数

$$V_1 = \frac{1}{2} e_1^2,$$

则 $V_1(e_1)$ 沿着子系统 e_1 的时间导数

$$\dot{V}_1 = e_1 \dot{e}_1 = e_1 e_2.$$

定义 $e_{2d} = -k_1 e_1$, $\alpha_2 = e_2 - e_{2d}$, 其中 k_1 为选定的正常数, 下文的 k_2 也是这样, 则

$$\dot{V}_1 = -k_1 \alpha_1^2 + e_1 \alpha_2.$$

然后考虑整个误差系统 (e_1, e_2), 选取第二个 Lyapunov 函数

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} \alpha_2^2 + \frac{1}{2r_1} \tilde{a}_1^2 + \frac{1}{2r_2} \tilde{b}_1^2 + \frac{1}{2r_3} \tilde{c}_1^2,$$

其中 $r_i (i=1, 2, 3)$ 为选定正常数. 则 V_2 沿着系统 (e_1, e_2) 的时间导数

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -k_1 \alpha_1^2 + e_1 \alpha_2 + \alpha_2 \dot{\alpha}_2 \\ &\quad - \frac{1}{r_1} \tilde{a}_1 \dot{\tilde{a}}_1 - \frac{1}{r_2} \tilde{b}_1 \dot{\tilde{b}}_1 - \frac{1}{r_3} \tilde{c}_1 \dot{\tilde{c}}_1 \\ &= -k_1 \alpha_1^2 + \alpha_2 (e_1 + \dot{e}_2 + k_1 \dot{e}_1) \\ &\quad - \frac{1}{r_1} \tilde{a}_1 \dot{\tilde{a}}_1 - \frac{1}{r_2} \tilde{b}_1 \dot{\tilde{b}}_1 - \frac{1}{r_3} \tilde{c}_1 \dot{\tilde{c}}_1 \\ &= -k_1 \alpha_1^2 + \alpha_2 \left\{ e_1 - a_2 e_1 + b_2 e_2 \right. \\ &\quad \left. - a_2 g_1 + b_2 g_2 + c_2 Hys(y_1) + u_2 \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\partial g_2}{\partial t} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} (-a_1 x_1 + b_1 x_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + c_1 Hys(x_1)) \right] \right. \\ &\quad \left. + k_1 \left[e_2 + g_2 - \left(\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial g_1}{\partial x_1} x_2 \right) \right] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{r_1} \tilde{a}_1 \dot{\tilde{a}}_1 - \frac{1}{r_2} \tilde{b}_1 \dot{\tilde{b}}_1 - \frac{1}{r_3} \tilde{c}_1 \dot{\tilde{c}}_1 \\ &= -k_1 \alpha_1^2 + \alpha_2 \left\{ e_1 - a_2 e_1 + b_2 e_2 - a_2 g_1 + b_2 g_2 \right. \\ &\quad \left. + c_2 Hys(y_1) + u_2 - \left[\frac{\partial g_2}{\partial t} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (-\hat{a}_1 x_1 + \hat{b}_1 x_2 + \hat{c}_1 Hys(x_1)) \right] \right. \\ &\quad \left. + k_1 \left[e_2 + g_2 - \left(\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial g_1}{\partial x_1} x_2 \right) \right] \right\} \\ &\quad + \tilde{a}_1 \left(\alpha_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} x_1 - \frac{1}{r_1} \dot{\tilde{a}}_1 \right) \\ &\quad - \tilde{b}_1 \left(-\alpha_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} x_2 - \frac{1}{r_2} \dot{\tilde{b}}_1 \right) \\ &\quad + \tilde{c}_1 \left(-\alpha_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} Hys(x_1) - \frac{1}{r_3} \dot{\tilde{c}}_1 \right). \end{aligned}$$

如果选取

$$\begin{aligned}
 u_2 = & -e_1 + a_2 e_1 - b_2 e_2 + a_2 g_1 \\
 & - b_2 g_2 - c_2 \text{Hys}(y_1) + \left[\frac{\partial g_2}{\partial t} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \right. \\
 & \times (-\hat{a}_1 x_1 + \hat{b}_1 x_2 + \hat{c}_1 \text{Hys}(x_1)) \left. \right] \\
 & - k_1 \left[e_2 + g_2 - \left(\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial g_1}{\partial x_1} x_2 \right) \right] \\
 & - k_2 \alpha_2, \tag{8}
 \end{aligned}$$

以及选取自适应律

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{a}}_1 &= r_1 \alpha_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} x_1, \\
 \dot{\hat{b}}_1 &= -r_2 \alpha_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} x_2, \\
 \dot{\hat{c}}_1 &= -r_3 \alpha_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \text{Hys}(x_1), \tag{9}
 \end{aligned}$$

则

$$\dot{V}_2 = -k_1 \alpha_1^2 - k_2 \alpha_2^2.$$

由 La Salle 不变集原理, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0$, 从而 $e_1 \rightarrow 0, e_2 \rightarrow 0$, 所以响应系统将与驱动系统保持广义同步。

4. 数值仿真

在仿真时选取如下系统参数及初值: $a_1 = 1, b_1 = 0.1, c_1 = 1, x_1 = 0.1, x_2 = 0, a_2 = 0.9, b_2 = 0.12, c_2 = 1.06, y_1 = 0.3, y_2 = 0.5$, 仿真时间选取为 100 s. 当响应系统不施加控制输入, 即 $u_1 = 0, u_2 = 0$ 时, 系统 (3) 和系统 (4) 分别处于各自的混沌状态, 它们在相图中的混沌吸引子如图 2 所示。

当把控制输入 u_1 和 u_2 施加到响应系统中后, 选取控制参数 $k_1 = k_2 = 20$, 自适应律参数 $r_1 = r_2 = r_3 = 1$, 设定初始估值为 $\hat{a}_1 = 0, \hat{b}_1 = 0, \hat{c}_1 = 0$, 定义同步误差 $e(t) = (e_1^2(t) + e_2^2(t))^{\frac{1}{2}}$.

当选取

$$\begin{aligned}
 y_1 &= g_1(t, x_1) = x_1, \\
 y_2 &= g_2(t, x_2) = x_2,
 \end{aligned}$$

由 (8) 和 (9) 式可得相应的控制律, 此时响应系统将与驱动系统保持完全同步. 响应系统两状态在相图中的轨迹和同步误差 $e(t)$ 随时间 t 的变化曲线如图 3 所示. 为了表现出误差曲线的细节 (即过渡过程) 图 3 (b) 中仅显示了前 10 s 的误差曲线, 而图 3 (a) 中是 100 s 的相轨迹, 后面的图 4 和图 5 也是这样。

当选取

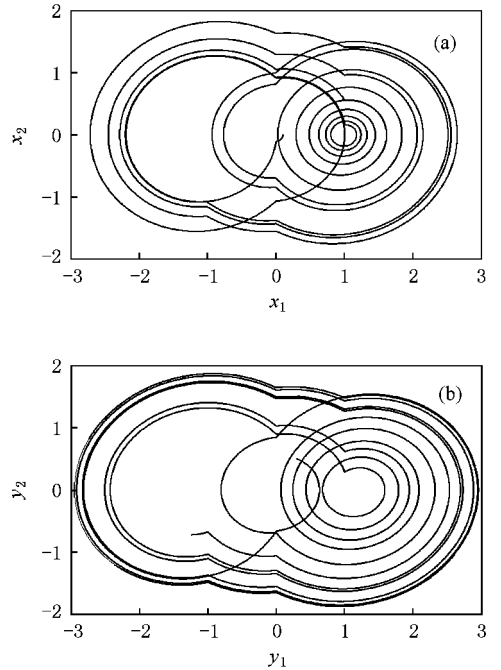


图 2 混沌吸引子 (a) 驱动系统 (b) 响应系统

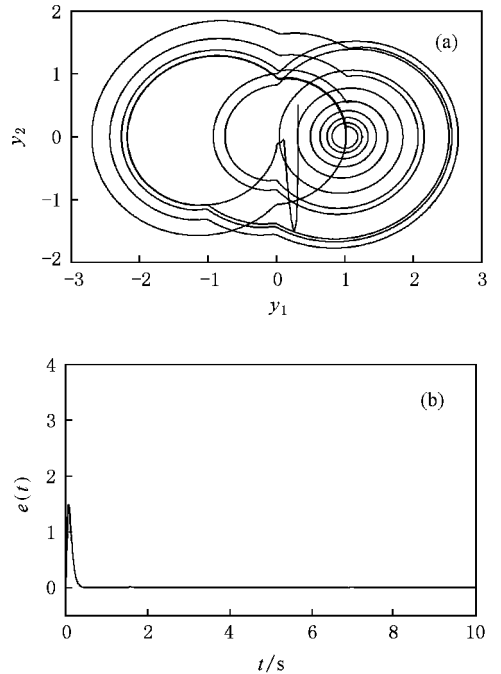


图 3 完全同步时响应系统状态轨迹和同步误差曲线 (a) 状态轨迹 (b) 同步误差曲线

$$\begin{aligned}
 y_1 &= g_1(t, x_1) = -x_1, \\
 y_2 &= g_2(t, x_2) = -x_2,
 \end{aligned}$$

由 (8) 和 (9) 式可得相应的控制律, 此时响应系统将与驱动系统保持反同步. 响应系统两状态在相图中的轨迹和同步误差 $e(t)$ 随时间 t 的变化曲线如图 4 所示。

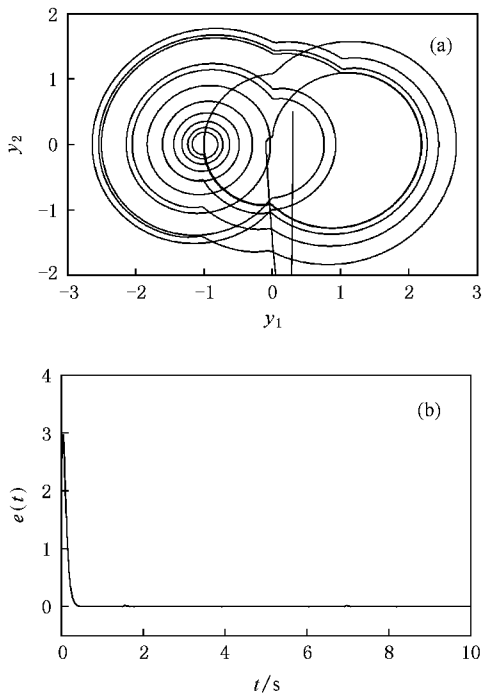


图4 反同步时响应系统状态轨迹和同步误差曲线 (a)状态轨迹 (b)同步误差曲线

选取一个简单的非线性函数

$$y_1 = g_1(t, x_1) = \sin(x_1),$$

$$y_2 = g_2(t, x_2) = \sin(x_2),$$

由(8)和(9)式可得相应的控制律,此时响应系统将 与驱动系统保持非线性对应关系 $g_1(t, x_1) = \sin(x_1)$ 和 $g_2(t, x_2) = \sin(x_2)$ 所确定的广义同步. 响应系统两状态在相图中的轨迹和同步误差 $e(t)$ 随 时间 t 的变化曲线如图5所示. 另外,如果 $g_1(t, x_1)$ 和 $g_2(t, x_2)$ 分别取某种线性函数时,两系统也能保 持线性广义同步,这里就不再进行仿真了. 从仿真结

果可看出,所提出的方法实现了多涡卷混沌系统的 快速同步.

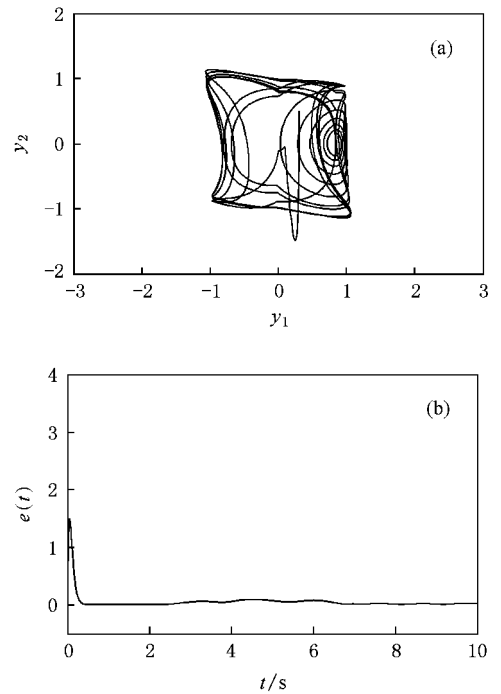


图5 广义同步时响应系统状态轨迹和同步误差曲线 (a)状态 轨迹 (b)同步误差曲线

5. 结 论

本文针对基于滞环非线性函数的多涡卷混沌系 统,使用反步自适应方法进行了广义同步控制研究, 所提出的控制律设计方法能实现参数未知或慢时变 的多涡卷混沌系统同步,因此具有较高的实用性. 完 全同步、反同步和一类非线性函数广义同步的数值 仿真实例验证了该方法的有效性.

[1] Wang Y Y, Sun L X, Feng Y 2005 *Electric Machines and Control* **9** 243 (in Chinese) [王宇野、孙黎霞、冯 勇 2005 电机与控制学 报 **9** 243]

[2] Ni T, Lu J A 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4590 (in Chinese) [宁 娣、陆君安 2005 物理学报 **54** 4590]

[3] Li Z, Shi S J 2003 *Phys. Lett. A* **311** 389

[4] Wang Y W, Guan Z H, Wen X J 2004 *Chaos Soliton. Fract.* **19** 899

[5] Yu Y G, Zhang S C 2004 *Chaos Soliton. Fract.* **21** 643

[6] Peng C C, Chen C L 2008 *Chaos Soliton. Fract.* **37** 598

[7] Yu S M, Lin Q H, Qiu S S 2004 *Journal of Image and Graphics* **9** 1473 (in Chinese) [禹思敏、林清华、丘水生 2004 中国图象图 形学报 **9** 1473]

[8] Wang X Y, Wang M J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6843 (in Chinese) [王兴元、王明军 2007 物理学报 **56** 6843]

[9] Luan L 2008 *J. Appl. Opt.* **39** 428 (in Chinese) [栾 玲 2008 应用光学 **39** 428]

[10] Li G H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 999 (in Chinese) [李国辉 2004 物理学报 **53** 999]

Generalized synchronization control of multi-scroll chaotic systems

Wu Zhong-Qiang[†] Kuang Yu

(*Key Laboratory of Industrial Computer Control Engineering of Hebei Province , Yanshan University , Qinhuangdao 066004 , China*)

(Received 9 January 2009 ; revised manuscript received 9 February 2009)

Abstract

Based on the adaptive backstepping method , a kind of synchronization controller is proposed for multi-scroll chaotic systems with different initial states and unknown parameters . The synchronization controller can realize complete synchronization , anti-synchronization , and a kind of nonlinear generalized synchronization between two chaotic systems , and it is better for application . Simulations show the effectiveness of the controller .

Keywords : multi-scroll chaos , generalized synchronization , backstepping , adaptive

PACC : 0545

[†] E-mail : mewzq@163.com