第 58 卷 第 11 期 2009 年 11 月
1000-3290/2009/58(11)/7397-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58, No.11, November, 2009

一类强非线性发展方程孤波变分迭代解法*

莫嘉琪[1)3)]　张伟江[2)3)]　陈贤峰[2)3)]

1)(安徽师范大学数学系，芜湖　241000)
2)(上海交通大学数学系，上海　200240)
3)(上海高校计算科学 E-研究院上海交通大学研究所，上海　200240)

(2009 年 1 月 26 日收到；2009 年 2 月 11 日收到修改稿)

研究了一类强非线性发展方程．利用变分迭代方法,首先构造了相应的变分；其次选取了适当的初始近似；再用迭代方法得到了孤波的任意次精度的近似解．

关键词：发展方程，非线性，孤波，近似方法．
PACC：0230

1. 引　言

当今对非线性发展方程的孤波解提出了许多新方法,例如双曲正切函数法[1]、齐次平衡法[2]、Jacobi 椭圆函数展开法[3]、辅助方程法[4]等．近来许多学者,例如在激波[5,6]、光波散射[7]、量子力学[8]、大气物理[9]、神经网络[10]等方面都作了一些孤波理论方面的研究．非线性发展方程孤波理论的定量和定性各种方法也不断地被改进．孤波扰动理论的渐近方法就是孤波理论的一种新的研究方法．其要点是用扰动理论的渐近展开式将非线性方程转化为易求解的方程来处理．这类方法完全摆脱了对逆散射变换所依赖的直接方法．变分迭代方法[11,12]就是属于一类新方法．本方法的优点在于思路简明,计算简单,并可得到解的较高近似度．本文就是利用广义变分迭代方法来求解强非线性发展方程,得到孤波近似解析解．近来,许多学者研究了非线性问题的近似理论[13—16]．近似方法不断被发展和优化．包括伸长变量法,平均法、边界层法、匹配渐近展开法和多重尺度法等．作者等也利用一些渐近方法来研究一类反应扩散问题、大气物理问题、生态环境问题、流行性传染病问题、激波问题和激光脉冲问题等[17—27]．在本文中,首先构造一个特殊的变分迭代,然后得到相应强非线性发展方程的孤波的任意次精度的近似解．

2. 强非线性发展方程与广义变分迭代

考虑如下强非线性发展方程[28]：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-pu+qu^3=rf(t,x,u),\tag{1}$$

其中系数 p, q 和 r 为正常数；f 是广义扰动项,它为关于自变量在各自的范围内为充分光滑的函数．

对应于方程(1)当 $r=0$ 时的情形为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-pv+qv^3=0.\tag{2}$$

由文献[29]知,方程(2)具有如下单孤波解：

$$v(x,t)=\sqrt{\frac{p}{q}}\tanh\sqrt{\frac{p}{2(1-\beta^2)}}\times(x-x_0+\beta t),\tag{3}$$

其中 x_0, $\beta(\beta^2<1)$ 为任意常数,它们可由原问题的具体条件来确定．方程(2)的单孤波解 $v(t,x)$ 的曲面图形如图 1,图 2 所示．

为了得到方程(1)的近似解,引入泛函 $F[u]$：

$$F[u]=u-\int_0^t\lambda(\tau)\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}-pu+q\bar{u}^3-rf(\tau,x,\bar{u})\Big)d\tau,\tag{4}$$

* 国家自然科学基金(批准号：40676016，40876010),中国科学院知识创新工程重要方向项目(批准号：KZCX2-YW-Q03-08),LASG 国家重点实验室专项经费和上海市教育委员会 E-研究院建设计划(批准号：E03004)资助的课题．

† E-mail：mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

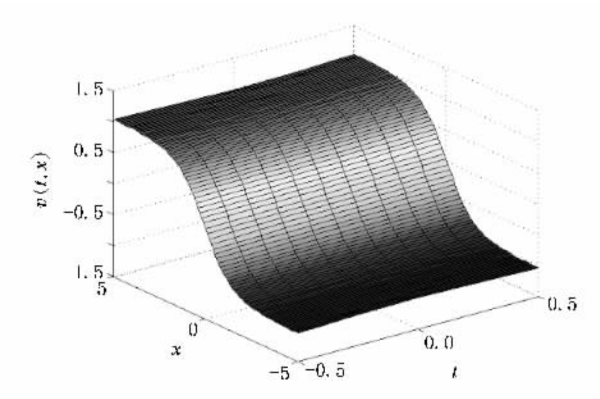

图 1 $v(t,x)$的曲面图 $(p=q=1,\beta=0.1,x_0=0)$

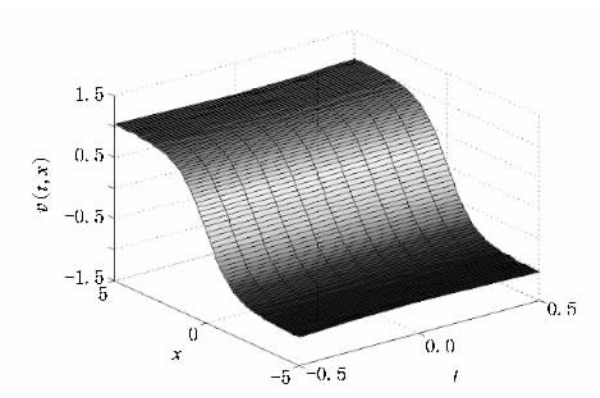

图 2 $v(t,x)$的曲面图 $(p=q=1,\beta=0.9,x_0=0)$

其中 $\bar{u}$为 u 的限制变量[11,12]，λ 为 Lagrange 乘子.计算泛函(4)的变分 δF，

$$\delta F=\delta u-\left(\lambda\delta\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)\Big|_{\tau=t}+\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\delta u\right)\Big|_{\tau=t}-\int_0^t\left(\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}\tau^2}-p\right)\delta u\,\mathrm{d}\tau.$$

令 $\delta F=0$. 我们有

$$\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}\tau^2}-p=0,\quad(\tau<t),\tag{5}$$

$$\lambda(t)=0,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}(t)=-1.\tag{6}$$

由(5),(6)式得

$$\lambda(t)=\frac{1}{2\sqrt{p}}(\exp(\sqrt{p}(t-\tau))-\exp(-\sqrt{p}(t-\tau))).\tag{7}$$

由(4)，(7)式，我们构造如下广义变分迭代：

$$u_{n+1}=u_n-\frac{1}{2\sqrt{p}}\int_0^t(\exp(\sqrt{p}(t-\tau))-\exp(-\sqrt{p}(t-\tau)))\times\left(\frac{\partial^2u_n}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2u_n}{\partial x^2}-\mathrm{p}u_n+\mathrm{q}u_n^3-r\mathrm{f}(\tau,x,u_n)\right)\mathrm{d}\tau,$$
$$n=0,1,2,\cdots.\tag{8}$$

由(8)式和强非线性发展方程(1)非线性扰动项的性态知[30]，$u(x,t)=\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x,t)$就是方程(1)的孤波解.

3. 孤波近似解的计算

由迭代关系式(8)，可以求出方程(1)孤波解的逐次近似.首先以方程(2)的孤波解(3)作为方程(1)的零次近似 u_0，

$$u_0(x,t)=\sqrt{\frac{p}{q}}\tanh\sqrt{\frac{p}{2(1-\beta^2)}}(x-x_0+\beta t),\tag{9}$$

其中 $x_0,\beta(\beta^2<1)$为任意常数. 将(9)式决定的 u_0 代入(8)式，得到方程(1)的一次近似 $u_1(t,x)$，

$$u_1(t,x)=\sqrt{\frac{p}{q}}\tanh\sqrt{\frac{p}{2(1-\beta^2)}}\times(x-x_0+\beta t)+G(t,x).\tag{10}$$

再将(10)式代入(8)式，可得方程(1)的二次近似 $u_2(t,x)$，

$$\begin{aligned}u_2(t,x)=u_1-\frac{1}{2\sqrt{p}}\int_0^t&(\exp(\sqrt{p}(t-\tau))-\exp(-\sqrt{p}(t-\tau)))\Big[\frac{\partial^2G}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2G}{\partial x^2}-pG\\&-\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\tanh\sqrt{\frac{p}{2(1-\beta^2)}}(x-x_0+\beta t)\right)^3\\&+q\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\tanh\sqrt{\frac{p}{2(1-\beta^2)}}\times(x-x_0+\beta t)+G\right)^3\\&-rf(\tau,x,u_1)\Big]\mathrm{d}\tau,n=0,1,2,\cdots.\end{aligned}\tag{11}$$

在(10)，(11)式中，$G(t,x)$为

$$\begin{aligned}G(t,x)=\frac{r}{2\sqrt{p}}\int_0^t\Big[&(\exp(p(t-\tau))-\exp(-p(t-\tau)))\\&\times\left(f\left(\tau,x,\sqrt{\frac{p}{q}}\tanh\sqrt{\frac{p}{2(1-\beta^2)}}\times(x-x_0+\beta t)\right)\right)\Big]\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

用相同的方法,由(8)式可以得到方程(1)的孤波解任意次近似表示式 $u_n(t,x)$.

4. 举　　例

现设强非线性发展方程(1)的参数和扰动函数项分别为 $p = q = 1, r = 0.1, f = \tanh^{-1} u$. 这时对应的强非线性发展方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + u^3 = \frac{1}{10}\tanh^{-1} u. \tag{12}$$

由(9)式并取 $\beta = 0.1, x_0 = 0$，这时方程(12)孤波解的零次近似 $u_0(t, x)$为

$$u_0(x, t) = \tanh\sqrt{\frac{50}{99}}\left(x + \frac{t}{10}\right). \tag{13}$$

利用广义变分迭代方法，由(10)式得到强非线性发展方程(12)孤波解的一次近似 $u_1(t, x)$，

$$u_1(x,t) = \tanh\sqrt{\frac{50}{99}}\left(x + \frac{t}{10}\right) + \sqrt{\frac{1}{802}}\left[\left(x + \frac{1}{10}\right)\exp t + \left(x - \frac{1}{10}\right)\exp(-t) - 2\left(x + \frac{t}{10}\right)\right]. \tag{14}$$

由(13)，(14)式，方程(12)孤波的零次、一次近似解的曲面分别由图 3 和 4 所示.

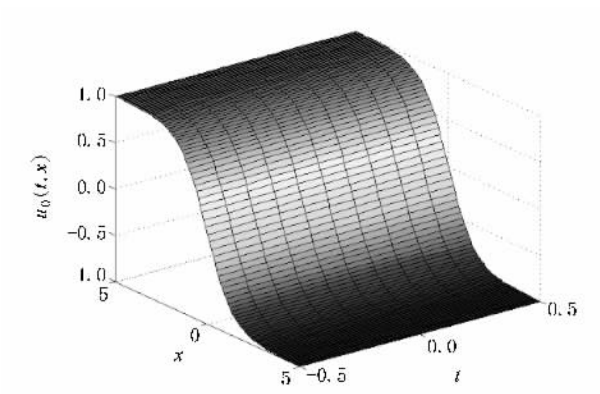

图 3　$u_0(t,x)$的曲面图($p = q = 1, \beta = 0.1, x_0 = 0$)

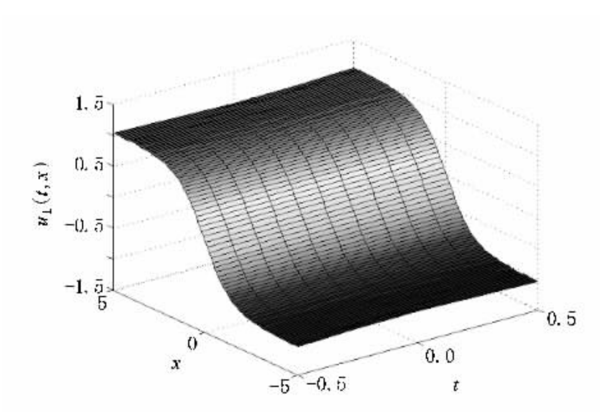

图 4　$u_1(t,x)$的曲面图($p = q = 1, \beta = 0.1, x_0 = 0$)

由(9)式并取 $\beta = 0.9, x_0 = 0$，这时方程(12)孤波解的零次近似 $u_0(t, x)$为

$$u_0(x, t) = \tanh\sqrt{\frac{50}{21}}\left(x + \frac{9t}{10}\right). \tag{15}$$

利用广义变分迭代方法，由(10)式得到强非线性发展方程(12)孤波解的一次近似 $u_1(t, x)$为

$$u_1(x,t) = \tanh\sqrt{\frac{50}{21}}\left(x + \frac{9t}{10}\right) + \sqrt{\frac{1}{152}}\left[\left(x + \frac{9}{10}\right)\exp t + \left(x - \frac{9}{10}\right)\exp(-t) - 2\left(x + \frac{9t}{10}\right)\right]. \tag{16}$$

由(15)，(16)式，方程(12)孤波的零次、一次近似解的曲面分别由图 5 和 6 所示.

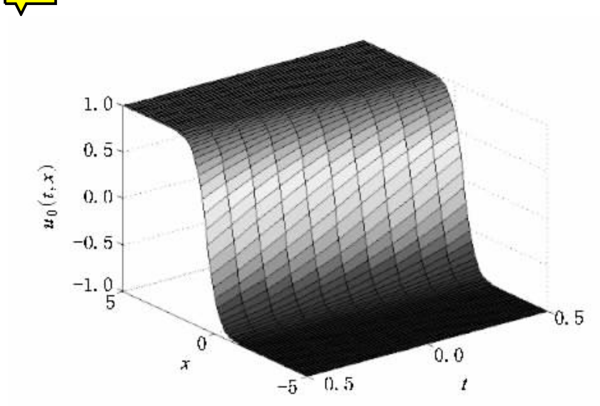

图 5　$u_0(t,x)$的曲面图($p = q = 1, \beta = 0.9, x_0 = 0$)

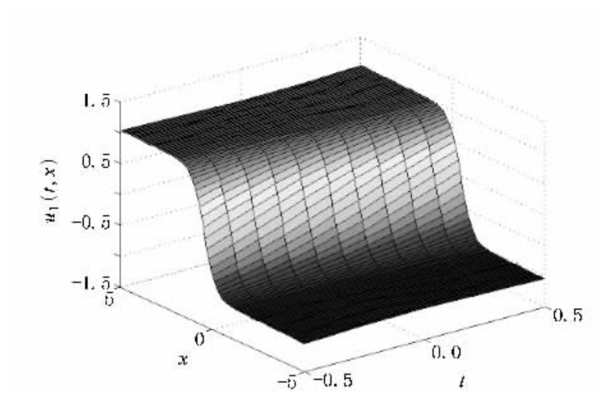

图 6　$u_1(t,x)$的曲面图($p = q = 1, \beta = 0.9, x_0 = 0$)

由(13)，(14)式并取 $\beta = 0.1, x_0 = 0$，这时方程(12)孤波解的二次近似 $u_2(t, x)$，

$$u_2(t,x) = \tanh\sqrt{\frac{50}{99}}\left(x + \frac{t}{10}\right) + \sqrt{\frac{1}{802}}\left[\left(x + \frac{1}{10}\right)\exp t + \left(x - \frac{1}{10}\right)\exp(-t) - 2\left(x + \frac{t}{10}\right)\right]$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^t \left[\exp((t - \tau)) - \exp(-t + \tau))\right.$$

$$\times\left(2\sqrt{\frac{1}{802}}\left(x+\frac{t}{10}\right)\right)+3\sqrt{\frac{1}{802}}$$
$$\times\left(\tanh^2\sqrt{\frac{50}{99}}\left(x+\frac{t}{10}\right)\right)\left[\left(x+\frac{1}{10}\right)\exp t\right.$$
$$\left.+\left(x-\frac{1}{10}\right)\exp(-t)-2\left(x+\frac{t}{10}\right)\right]$$
$$+\frac{3}{802}\left(\tanh\sqrt{\frac{50}{99}}\left(x+\frac{t}{10}\right)\right)\left[\left(x+\frac{1}{10}\right)\exp t\right.$$
$$\left.+\left(x-\frac{1}{10}\right)\exp(-t)-2\left(x+\frac{t}{10}\right)\right]^2\frac{1}{802^{3/2}}$$
$$\times\left[\left(x+\frac{1}{10}\right)\exp t+\left(x-\frac{1}{10}\right)\exp(-t)\right.$$
$$\left.-2\left(x+\frac{t}{10}\right)\right]^3-\frac{1}{10}\tanh^{-1}\left(\tanh\sqrt{\frac{50}{99}}\left(x+\frac{\tau}{10}\right)\right.$$
$$+\sqrt{\frac{1}{802}}\left(\left(x+\frac{1}{10}\right)\exp t+\left(x-\frac{1}{10}\right)\exp(-t)\right.$$
$$\left.\left.\left.-2\left(x+\frac{t}{10}\right)\right)\right)\right]\mathrm{d}\tau.$$

由(15),(16)式并取 $\beta=0.9$，$x_0=0$，这时方程(12)孤波解的二次近似 $u_2(t,x)$，

$$u_2(t,x)=\tanh\sqrt{\frac{50}{19}}\left(x+\frac{9t}{10}\right)$$
$$+\sqrt{\frac{1}{152}}\left[\left(x+\frac{9}{10}\right)\exp t\right.$$
$$\left.+\left(x-\frac{9}{10}\right)\exp(-t)-2\left(x+\frac{9t}{10}\right)\right]$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t[\exp((t-\tau))-\exp(-t+\tau))$$
$$\times\left(2\sqrt{\frac{1}{152}}\left(x+\frac{9t}{10}\right)+3\sqrt{\frac{1}{152}}\right.$$
$$\times\left(\tanh^2\sqrt{\frac{50}{19}}\left(x+\frac{9t}{10}\right)\right)\left[\left(x+\frac{9}{10}\right)\exp t\right.$$
$$\left.+\left(x-\frac{9}{10}\right)\exp(-t)-2\left(x+\frac{9t}{10}\right)\right]$$
$$+\frac{3}{152}\left(\tanh\sqrt{\frac{50}{19}}\left(x+\frac{9t}{10}\right)\right)\left[\left(x+\frac{9}{10}\right)\exp t\right.$$
$$\left.+\left(x-\frac{9}{10}\right)\exp(-t)-2\left(x+\frac{9t}{10}\right)\right]^2$$
$$\times\frac{1}{152^{3/2}}\left[\left(x+\frac{9}{10}\right)\exp t+\left(x-\frac{9}{10}\right)\exp(-t)\right.$$
$$\left.-2\left(x+\frac{9t}{10}\right)\right]^3-\frac{9}{10}\left(\tanh\sqrt{\frac{50}{19}}\left(x+\frac{9\tau}{10}\right)\right.$$
$$+\sqrt{\frac{1}{152}}\left(\left(x+\frac{9}{10}\right)\exp t\right.$$
$$\left.\left.\left.+\left(x-\frac{9}{10}\right)\exp(-t)-2\left(x+\frac{9t}{10}\right)\right)\right)\right]\mathrm{d}\tau.$$

继续利用迭代关系式(8)，可以依次得到强非线性发展方程(12)孤波解的更高次的近似.

5. 结 论

孤波描述的是一类复杂的自然现象. 我们往往需要将它简化为基本模式并利用近似方法去求解它. 广义变分迭代方法就是一个简单而有效的方法. 广义变分迭代方法不同于一般的数值方法. 用广义变分迭代方法求得的解还可以继续进行解析运算. 所以我们还能进一步通过解析运算，对孤波解作相应的定性和定量方面的分析.

[1] Parkes E J，Duffy B R 1996 *Comp. Phys. Commun.* **98** 288

[2] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[3] Parkes E J，Duffy B R，Abbott P C 2001 *Phys. Lett.* A **295** 280

[4] Sirendaoreji，Sun J 2003 *Phys. Lett.* A **309** 387

[5] McPhaden M J，Zhang D 2002 *Nature* **415** 603

[6] Gu Daifang，Philander S G H 1997 *Science* **275** 805

[7] Pan L S，Zou W M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1 (in Chinese) [潘留仙、左伟明 2005 物理学报 **54** 1]

[8] Pan L S，Liu J L，Li S S，Niu Z C，Feng S L，Zheng H Z 2002 *Science in China* **32**A 556 (in Chinese) [潘留仙、刘金龙、李树深、牛智川、封松林、郑厚值 2002 中国科学 **32**A 556]

[9] Feng G L，Dai X G，Wang A H，Chou J F 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 606 (in Chinese) [封国林、戴新刚、王爱慧、丑纪范 2001 物理学报 **50** 606]

[10] Wang L S，Xu D Y 2003 *Science in China* **32**E 488 (in Chinese) [王林山、徐道义 2003 中国科学 **32**E 488]

[11] He J H 2006 *International J. Modern Phys.* **20**B 1141

[12] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Shengzhou: Henan Science and Technology Press) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法 (郑州 河南科学技术出版社)]

[13] Han X L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2590 (in Chinese) [韩祥临 2005 物理学报 **54** 2590]

[14] Wu Q K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2510 (in Chinese) [吴钦宽 2005 物理学报 **54** 2510]

[15] Hwangm S 2004 *J. Diff. Eqns.* **200** 191

[16] Doelman A，Iron D，Nishiura Y 2004 *SIAM J. Math. Anal.* **35** 1420

[17] Mo J Q，Lin W T，Zhu J 2004 *Prog. Nat. Sci.* **14** 550

[18] Mo J Q，Lin W T，Zhu J 2004 *Prog*. *Nat*. *Sci*. **14** 1126

[19] Mo J Q，Lin W T 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 996 (in Chinese) [**莫嘉琪、林万涛** 2004 **物理学报 53** 996]

[20] Mo J Q，Lin W T 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 3245 (in Chinese) [**莫嘉琪、林万涛** 2004 **物理学报 53** 3245]

[21] Mo J Q，Lin W T 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 1081 (in Chinese) [**莫嘉琪、林万涛** 2005 **物理学报 54** 1081]

[22] Mo J Q，Wang H，Lin W T 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 485 (in Chinese) [**莫嘉琪、王　辉、林万涛** 2006 **物理学报 55** 485]

[23] Mo J Q，Wang H，Lin W T，Lin Y H 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 6 (in Chinese) [**莫嘉琪、王　辉、林万涛、林一骅** 2006 **物理学报** 55 6]

[24] Mo J Q，Lin W T 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 875

[25] Mo J Q，Lin Y H，Wang H 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 2387

[26] Mo J Q，Wang H，Lin W T 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 1450

[27] Mo J Q，，Lin W T，Wang H 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 578

[28] Taogetusang，Sirendaoerji 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 13 (in Chinese) [**套格图桑、斯仁道尔吉** 2006 **物理学报 55** 13]

[29] Fan E G，Zhang H Q 1997 *Acta Phys*. *Sin*. **46** 1254 (in Chinese) [**范恩贵、张鸿庆** 1997 **物理学报 46** 1254]

[30] Pao C V 1992 *Nonlinear Parabolic Elliptic Equations* (New York: Plenum Press)

Variational iteration method for solving a class of strongly nonlinear evolution equations*

Mo Jia-Qi[1)3)†]　Zhang Wei-Jiang[2)3)]　Chen Xian-Feng[2)3)]

1) (*Department of Mathematics*, *Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China*)

2) (*Departmemt of Mathematics*, *Shanghai Jiaotong University*, *Shanghai* 200240, *China*)

3) (*Division of Computational Science*, *E-Institutes of Shanghai Universities at Shanghai Jiaotong University*, *Shanghai* 200240, *Chian*)

(Received 26 January 2009; revised manuscript received 11 February 2009)

Abstract

A class of strongly nonlinear evolution equations are studied. Using the variational iteration method, the corresponding varationa is first constructed, then the suitable initial approximation is selected; and then, by using the iteration method, the approximate solution of arbitrary degree of accuracy for the solitary wave is obtained.

Keywords: evolution equation, nonlinear, solitary wave, approximate method

PACC: 0230

---

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40676016, 40876010), the Key Innovation Project of the Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX2-YW-Q03-08), the LASG State Key Laboratory Special Fund and in Part by E-Institutes of Shanghai Municipal Education Commission (Grant No. E03004).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn