第 58 卷 第 11 期 2009 年 11 月
1000-3290/2009/58(11)/7579-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.11,November,2009


# 完全非弹性蹦球倍周期运动的分形特征*

姜泽辉† 赵海发 郑瑞华

(哈尔滨工业大学物理系,哈尔滨 150001)

(2009 年 2 月 5 日收到;2009 年 3 月 3 日收到修改稿)

一个落在振动台面上的完全非弹性球的运动是倍周期的.倍周期分岔过程受约化振动加速度的控制,倍周期分岔图由疏密相间的区域构成.在密集区内,倍周期分岔过程敏感地依赖于控制参数,呈现出复杂的几何结构.分析了密集区的分形特性,并计算了各密集区的分维数.结果表明密集区的分维数是依次增大的,逐渐趋于一个约为 1.8 的常数.

**关键词**:蹦球,倍周期分岔,分形,颗粒物质

**PACC**:0547,4752,4610

## 1. 引 言

蹦球系统由一个在振动台面上蹦跳的弹性球构成.这一系统看似简单却有着复杂的运动形式.球一旦落到台面上,就会做无休止的或高或低的蹦跳运动.每次碰撞后,球的速度取决于碰撞时球的下落速度与台面的速度,而碰撞时刻球的下落速度又与前一次碰撞有关.这导致球的运动有继承性.如果初始时刻,球的下落速度(或高度)不同其后的蹦跳状态有可能极为不同.实验[1—11]、数值计算[9—22]和电路模拟[23—26]表明,球既可以做稳定的倍周期运动亦可通过倍周期级联分岔进入混沌.倍周期分岔过程受台面的频率或振幅的控制,而且与球与台面之间的碰撞恢复系数有关.

蹦球问题最早由 Fermi 提出,用来解释宇宙射线的起源[27—29].最近,经常用于解释振动颗粒体系中与倍周期运动有关的现象,如振动颗粒薄层中的分频表面驻波[30,31],振动颗粒床中体系质心的倍周期运动[18,32—36]等.由于颗粒间存在频繁的非弹性碰撞,颗粒体系能够迅速消耗掉外界输入的动能,因而可以将体系看做一个完全非弹性体,也就是,将整个颗粒床处理成一个在振动台面上蹦跳的完全非弹性球.

完全非弹性蹦球是一种极限情况,球与台面之间的碰撞恢复系数为零.这导致其行为与一般弹性球有所不同.首先,每次碰撞后球与台面的速度相同(对于一般的弹性球,这种情况不会出现).碰撞后球是否会驻留在台面上,要视碰撞时台面的加速度是否大于重力加速度而定.如果小于重力加速度,球就不会受到台面的支撑而立刻被抛出,在空中做抛体运动,之后再次落到台面上与之碰撞 如果大于重力加速度,球将'粘附'在台面上随台面一起运动,直到下一个振动周期内起跳条件得到满足而被抛出去.这样台面的位相相应地划分为发射区和吸收区[14,36—38].如果用 $x(t)=A\sin(2\pi ft)$ 表示台面的位移,其中,$A$ 和 $f$ 分别为台面的振幅和频率,则起跳条件为 $\ddot{x}(t)\leqslant -g$,$g$ 为重力加速度的大小(向上为正参考方向).发射区和吸收区分别对应于满足 $\ddot{x}(t)\leqslant -g$ 和 $\ddot{x}(t)>-g$ 的相位区间.正是吸收区的存在,导致完全非弹性蹦球可以产生稳定的倍周期运动.因为球一旦落入吸收区就随台面一起运动,对以前的运动失去'记忆',直到遇到下一个发射区又开始重复前面的运动.每进行一次这样的重复运动所耗费的时间总和恰好为振动周期的整数倍.其次,完全非弹性蹦球不存在倍周期级联分岔进入混沌.虽然蹦球可以连续蹦跳很多次,但迟早会落入吸收区,其蹦跳运动会被突然打断,在下一个发射区的起始处又被抛起并重复前面的运动,从而形成倍周期运动[14,37,38].即使在某些倍周期分岔点附近蹦球

* 国家自然科学基金(批准号:10674035)资助的课题.

† E-mail:zehuijiang@yahoo.com

可以做不落入吸收区的连续蹦跳，但其蹦跳也会逐渐演化为倍周期运动[38].

实际上，完全非弹性球的蹦跳不是由球与台面的碰撞反弹引起的，而是被台面不停地'甩'出去.台面的振动加速度越大，球被甩得越高，一次跨越的振动周期倍数也就越大.研究表明[38]，完全非弹性蹦球的倍周期分岔过程仅受约化振动加速度 $\Gamma=(2\pi f)^2A/g$ 的控制.当 $\Gamma$ 由 1 逐渐增大时，蹦球的运动经历 1 倍周期、2 倍周期、4 倍周期、密集区、3 倍周期、6 倍周期、密集区…….密集区外部的分岔点是规则的，可以用简单公式表示.但密集区内，倍周期轨道对 $\Gamma$ 的依赖比较敏感，密集地纠集在一起，其特征较难描述.这里，将密集区作为几何对象，研究其分形特征.首先，证明密集区存在放大对称性(dilation symmetry)，并确定其相似比.然后，确定各密集区的分维数(fractal dimension)，并研究其变化规律.

## 2. 模　型

令 $t=0$ 时刻，球静止在台面上并随台面一起运动.在 $t_0=(2\pi f)^{-1}\sin^{-1}(1/\Gamma)$ 时刻，台面的加速度为 $-g$.此时，球受到的支撑力为零，起跳条件得到满足，球被抛起.球的起跳速度即为此刻台面的速度 $\dot{x}(t)=A(2\pi f)\cos(2\pi f t_0)$，其运动轨迹为

$$s(t)=A(2\pi f)\cos(2\pi f t_0)(t-t_0)-\frac{1}{2}g(t-t_0)^2. \tag{1}$$

飞行一段时间后，球将落到台面上.如果落在吸收区，就随台面一起运动直到遇到下一个振动周期内的发射区 如果直接落在发射区，就立刻被抛起.每次碰撞的时刻 $t_k$，由球与台面的相对位移为零这一条件决定，

$$A\sin(2\pi f t_{k-1})+A(2\pi f)\cos(2\pi f t_{k-1})(t_k-t_{k-1})-\frac{1}{2}g(t_k-t_{k-1})^2=A\sin(2\pi f t_k), \tag{2}$$

其中，$t_{k-1}$ 为前一次碰撞的时刻.$k=1,2,3,\cdots$.由递推关系式(2)即可确定起跳后蹦球的运动状态.

## 3. 分析与讨论

图 1 给出了蹦球的自由飞行时间 $t_f=t_k-t_{k-1}$ 随 $\Gamma$ 的变化情况.图中，飞行时间 $t_f$ 已被振动周期($=1/f$)约化.当 $\Gamma$ 由 1 逐渐增大时，飞行时间经 2 倍周期和 4 倍周期分岔后，进入倍周期轨道密集区，然后，进入 3 倍周期运动，经 6 倍周期分岔后又进入密集区.其后依次为 4 倍周期，8 倍周期，密集区，5 倍周期，10 倍周期，密集区，6 倍周期，12 倍周期，密集区，7 倍周期，14 倍周期，密集区…….如果以 $\Gamma_n^m$ 表示蹦球经 $m$ 跳完成 $n$ 倍周期运动的分岔点，则图 1 中标注的各分岔点的数值依次为 $\Gamma_2^2=3.72$，$\Gamma_4^2=6.59$，$\Gamma_6^2=9.63$，$\Gamma_8^2=12.72$，$\Gamma_{10}^2=15.83$，$\Gamma_{12}^2=18.95$，$\Gamma_{14}^2=22.08$.这些分岔点的排布是规则的，可以用简单公式表示，见文献[38]中(5)式.

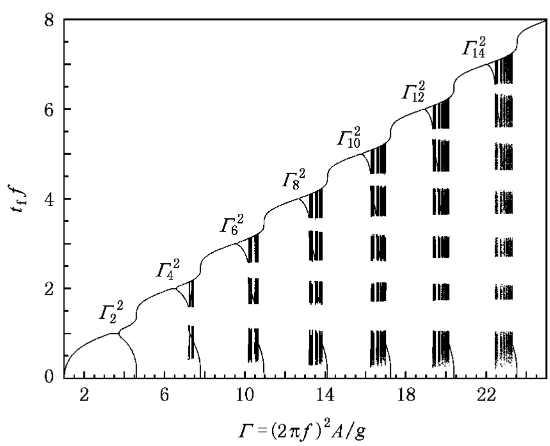


图 1　自由飞行时间 $t_f$ 的分岔图($t_f$ 已被振动周期 $1/f$ 约化)

在经过一个两跳的 2 倍周期分岔($\Gamma_2^2$)之后，随着 $\Gamma$ 的增大，蹦球进入一个由两跳变为一跳的 2 倍周期运动($\Gamma_2^1=4.604$).然后，经过一个两跳的 4 倍周期分岔($\Gamma_4^2$)迅速进入倍周期轨道密集区，见图 2(a).继 $\Gamma_4^2$ 之后的几个分岔点依次为 $\Gamma_4^3=7.184$，$\Gamma_8^6=7.2204$，$\Gamma_8^5=7.2238$，$\Gamma_{16}^{10}=7.2322$，$\Gamma_{16}^{11}=7.23238$，$\Gamma_{32}^{22}=7.232408$，$\Gamma_{32}^{21}=7.232408101$，$\Gamma_{64}^{42}=7.23240828923$，$\Gamma_{64}^{43}=7.23240828928$，$\cdots$.可以看出，分岔点越来越密集，越来越敏感于 $\Gamma$.另外，如果将这组分岔点两两配对，则相邻两对中的蹦跳次数和倍周期指数存在对应关系

$$\{(\Gamma_n^m,\Gamma_n^{m-1}),(\Gamma_{2n}^{2(m-1)},\Gamma_{2n}^{2m-1})\}.$$

之后，随着 $\Gamma$ 的增大，各种倍周期运动交替出现.

作为几何对象，密集区的结构存在着放大对称性.例如，将图 2(a)中的左虚框包围的部分放大，见图 2(b)，可以发现所得图形与前者基本相似.进一步将图 2(b)中虚框内的部分放大，所得结构仍然相似，见图 2(c).为确定相似比，将图 2(a)中箭头所指

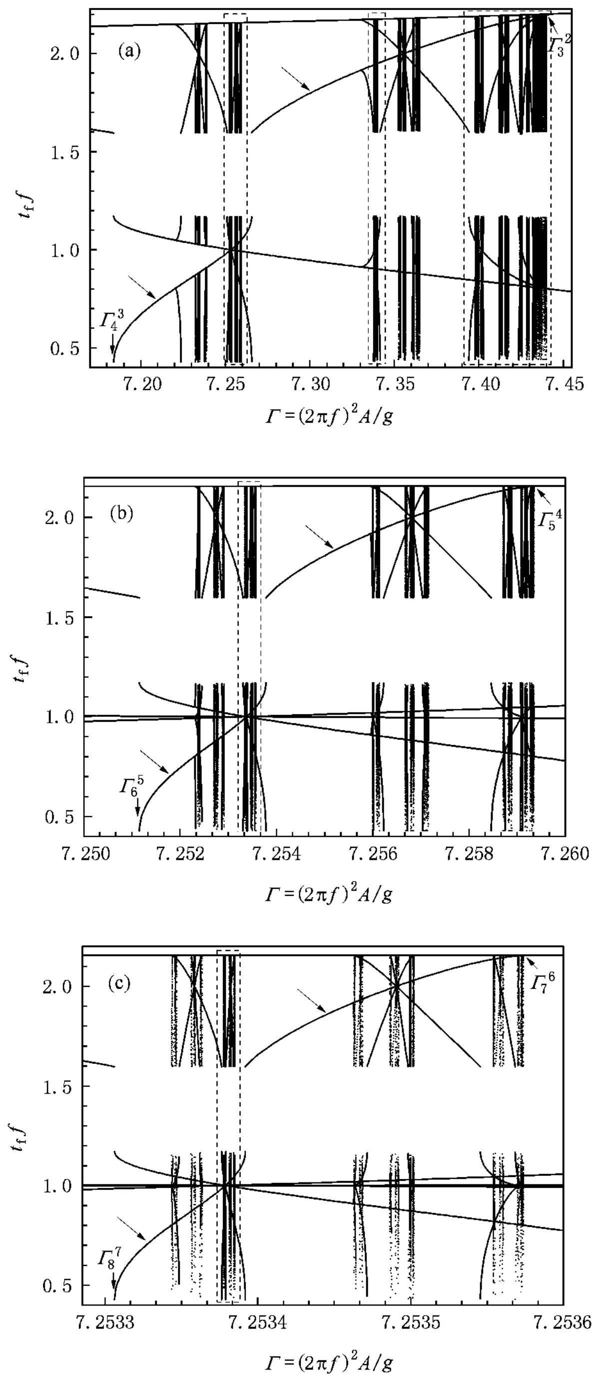


图 2　(a)第 1 密集区的放大图；(b)为(a)中左虚框的局部放大；(c)为(b)中虚框的局部放大

曲线作为特征线段.定义其长度为起点和终点 $\Gamma$ 值之差，$\Delta_1=\Gamma_3^2-\Gamma_4^3$.图 2(b)，(c)中特征线段的长度则分别为 $\Delta_2=\Gamma_5^4-\Gamma_6^5$ 和 $\Delta_3=\Gamma_7^6-\Gamma_8^7$.将这一放大过程继续下去，会发现长度比 $\Delta_{i+1}/\Delta_i$ 趋于一个常数(见表 1)，

$$\alpha=\lim_{i\to\infty}\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i}=0.03260893735127759\cdots. \tag{3}$$

表 1　特征线段的相似比 $\alpha$

| $i$ | $\Delta_{i+1}/\Delta_i$ | $\Delta_i/\Delta_{i+1}$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.03165649903538635 | 30.58909009117456 |
| 2 | 0.03263862281075168 | 30.63882926210231 |
| 3 | 0.03261146096446806 | 30.66640662646041 |
| 4 | 0.03260907023865793 | 30.66631439293549 |
| 5 | 0.03260894333350941 | 30.66643373789994 |
| 6 | 0.03260893760011939 | 30.66643912975376 |
| 7 | 0.03260893736114535 | 30.66643935449223 |
| 8 | 0.03260893735165654 | 30.66643936341581 |
| 9 | 0.03260893735129181 | 30.66643936375881 |
| 10 | 0.03260893735127811 | 30.66643936377169 |
| 11 | 0.03260893735127761 | 30.66643936377216 |
| 12 | 0.03260893735127759 | 30.66643936377218 |

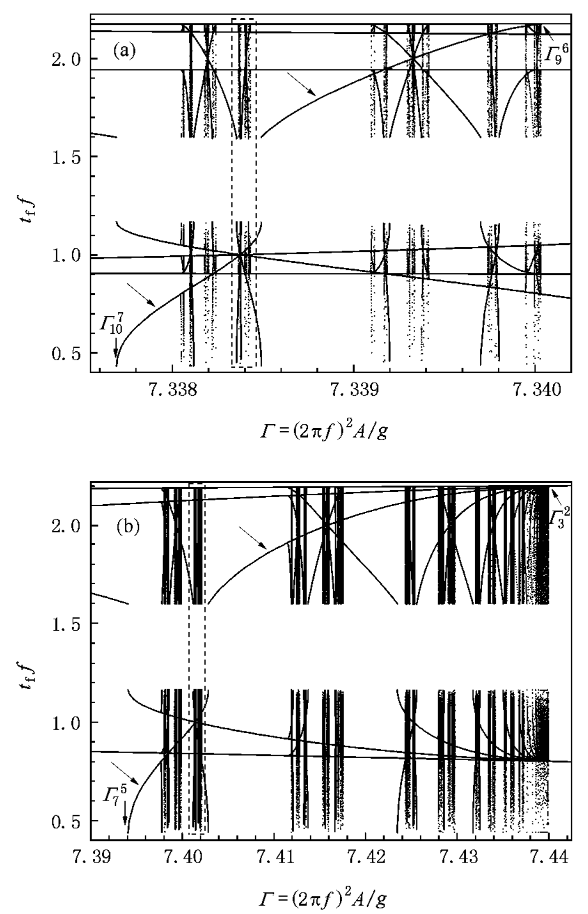


图 3　(a)为图 2(a)中间虚框的局部放大；(b)为图 2(a)右侧虚框的局部放大

这种相似性是局部的，不同部位的相似比是不同的.例如，图 2(a)中间虚框内的特征线段，见图 3(a)，其相似比趋近于 0.03152750163865276… ;右侧虚框内的特征线段，见图 3(b)，其相似比趋近于 0.03076135902176629….这种结构相似性同样存在于其他密集区内，只是相似比越来越小，例如，第 2 密集区内某特征线段的相似比为 0.019638124568189693….

存在结构相似性表明密集区具有分形特征.虽然同一密集区不同部位的相似比存在差异，但这种差异不是很大，可以把这一密集区近似看做分形.对于一个分形，如果用边长为 $\varepsilon$ 的格网覆盖它，然后统计覆盖在分形上的方格数 $N_\varepsilon$，则 $N_\varepsilon$ 和 $\varepsilon$ 存在关系

$$N_\varepsilon \propto \varepsilon^D, \tag{4}$$

其中，$D$ 为分形的计盒维数(box-counting dimension)，定义[39]为 $D = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\ln N_\varepsilon}{\ln \varepsilon}$.图 4 给出了第 1—3 密集区 $N_\varepsilon$ 随 $\varepsilon$ 的变化情况.可以看出，在双对数坐标中

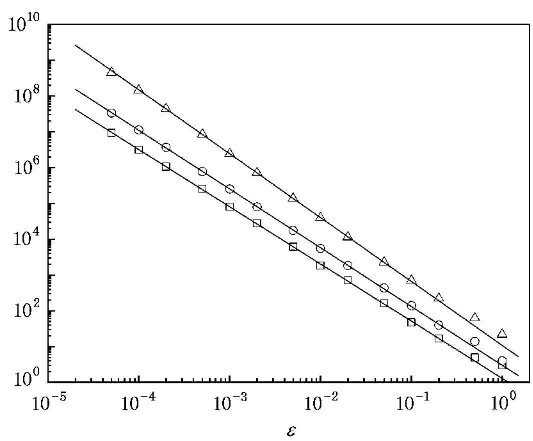


图 4 $N_\varepsilon$ 随 $\varepsilon$ 的变化(自下而上依次对应为第 1，2，3 密集区)

二者呈线性关系.

为简便，这里将直线的斜率定为分形维数 $D$.经计算，第 1—6 及第 9 个密集区的分维数依次为 1.60，1.65，1.69，1.73，1.75，1.77，1.79，误差在 0.01—0.06 间.显然，分维数是逐渐增大的.这表明，越往后的密集区内部结构越复杂.另外，由图 5 可以看出，分维数的增大趋势逐渐变缓，最终趋近于一个常数. 密集区存在分形特征，表明密集区可以看做奇异非混沌吸引子(strange nonchaotic attractor).

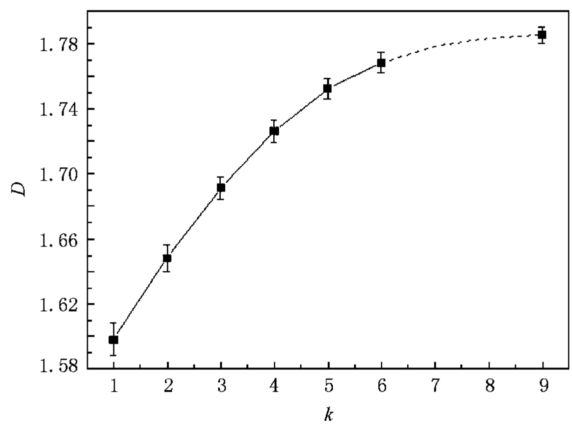


图 5 密集区的分维数($k$ = 1，2，3…，表示第 $k$ 个密集区)

## 4. 结 论

完全非弹性蹦球有着复杂的运动形式.随着 $\Gamma$ 的增加，展现出一系列的倍周期分岔过程.分岔图由交替出现的密集区和稀疏区构成.密集区内，存在着分形结构.每个密集区有各自的分维数.越往后的密集区，结构越复杂，分维数越大.分维数最终会趋近于一个常数.


[1] Tufillaro N B，Albano A M 1986 *Am. J. Phys.* **54** 939

[2] Tufillaro N B，Mello T M，Choi Y M，Albano A M 1986 *J. Phys.* **47** 1477

[3] Wiesenfeld K，Tufillaro N B 1987 *Physica* D **26** 321

[4] Pierański P 1983 *J. Phys.* **44** 573

[5] Pierański P，Kowalik Z，Franaszek M 1985 *J. Phys.* **46** 681

[6] Pierański P，Bartolino R 1985 *J. Phys.* **46** 687

[7] Pierański P，Małecki J 1986 *Phys. Rev.* A **34** 582

[8] Pierański P 1988 *Phys. Rev.* A **37** 1782

[9] Cowalik Z J，Franaszek M，Pierański P 1988 *Phys. Rev.* A **37** 4016

[10] Franaszek M，Isomäki H M 1991 *Phys. Rev.* A **43** 4231

[11] Tufillaro N B，Abbott T，Reilly J 1992 *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos* (Addison-Wesley Publishing Company)

[12] Holmes P J 1982 *J. Sound Vib.* **84** 173

[13] Bapat C N，Sankar S，Popplewell N 1986 *J. Sound Vib.* **108** 99

[14] Luck J M，Mehta A 1993 *Phys. Rev.* E **48** 3988

[15] Tufillaro N B 1994 *Phys. Rev.* E **50** 4509

[16] Luo A C J，Han R P S 1996 *Nonlin. Dyn.* **10** 1

[17] de Oliveira C R，Goncalves P S 1997 *Phys. Rev.* E **56** 4868

[18] Miao G，Sui L，Wei R 2001 *Phys. Rev.* E **63** 031304

[19] Naylor M A，Sánchez P，Swift M R 2002 *Phys. Rev.* E **66** 057201

[20] Giusepponi S，Marchesoni F 2003 *Europhys. Lett.* **64** 36

[21] Giusepponi S, Marchesoni F, Borromeo M 2005 *Physica* A **351** 142
[22] Barroso J J, Carneiro M V, Macau E E N 2009 *Phys*. *Rev*. E **79** 026206
[23] Tufillaro N B, Mello T M 1987 *Am*. *J*. *Phys*. **55** 316
[24] Zimmerman Z L, Neto L G 1992 *Am*. *J*. *Phys*. **60** 370
[25] Clark B K, Martin R F, Moore R J, Jesse K E 1995 *Am*. *J*. *Phys*. **63** 157
[26] Clark B K, Rosa E Jr, Hall A D, Shepherd T R 2003 *Phys*. *Lett*. A **318** 514
[27] Fermi E 1949 *Phys*. *Rev*. **15** 1169
[28] Lichtenberg A J, Lieberman M A, Cohen R H 1980 *Physica* D **1** 291
[29] Ladeire D G, da Silva J K L 2008 *Physica* A **387** 5707
[30] Melo F, Umbanhowar P B, Swinney H L 1995 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **75** 3838
[31] Moon S J, Shattuck M D, Bizon C, Goldman D I, Swift J B, Swinney H L 2001 *Phys*. *Rev*. E **65** 011301
[32] Luding S, Clément E, Bluman A, Rajchenbach J, Duran J 1994 *Phys*. *Rev*. E **49** 1634
[33] Wassgren C R, Brennen C E, Hunt M L 1996 *J*. *Appl*. *Mech*. **63** 712
[34] Douady S, Fauve S, Laroche C 1989 *Europhys*. *Lett*. **8** 621
[35] Jiang Z H, Liu X Y, Peng Y J, Li J W 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 5692 (in Chinese) [**姜泽辉、刘新影、彭亚晶、李建伟** 2005 **物理学报 54** 5692]
[36] Jiang Z H, Wang Y Y, Wu J 2006 *Europhys*. *Lett*. **74** 417
[37] Methta A, Luck J M 1990 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **65** 393
[38] Jiang Z H, Zheng R H, Zhao H F, Wu J 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 3727 (in Chinese) [**姜泽辉、郑瑞华、赵海发、吴　晶** 2007 **物理学报 56** 3727]
[39] Falconer K 2003 *Fractal Geometry* (John Wiley & Sons Ltd)

# Fractal characterization for subharmonic motion of completely inelastic bouncing ball *

Jiang Ze-Hui† Zhao Hai-Fa Zheng Rui-Hua

(*Department of Physics*, *Harbin Institute of Technology*, *Harbin* 150001, *China*)

(Received 5 February 2009; revised manuscript received 3 March 2009)

Abstract

The motion of a completely inelastic ball dropped vertically on the vibrating table will undergo a series of subharmonic bifurcations, controlled solely by the normalized vibration acceleration. It has been shown that the bifurcation diagram for the ball's motion consists of almost equally spaced dense regions, in which the bifurcation behavior is sensitively dependent on the control parameter. The dense regions have complex interior geometrical structures. Here they are treated as fractal entities, and the fractal dimension for each of them is calculated. It is shown that the magnitude of the fractal dimension gradually increases, approaching a constant around 1.785.

**Keywords**: bouncing ball, subharmonic bifurcation, fractal, granular materials

**PACC**: 0547, 4752, 4610

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10674035).

† E-mail: zehuijiang@yahoo.com