

重力作用下颗粒介质应力链的离散元模拟^{*}

宜晨虹^{1)†} 慕青松² 苗天德²

1) 中国工程物理研究院流体物理研究所冲击波物理与爆轰物理实验室 绵阳 621900)

2) 兰州大学土木工程与力学学院力学系, 兰州 730000)

(2009 年 1 月 6 日收到, 2009 年 2 月 16 日收到修改稿)

用离散元的方法模拟了仅有重力作用的二维颗粒系统内部力的分布情况, 并根据力的大小得到颗粒之间的应力链. 模拟结果与颗粒介质研究中的两个著名模型 q 模型和 α 模型作了对比, 并与光弹实验的结果作了比较. 对比结果表明, 模拟结果与实验相似, 而与两个概率模型有一定的差异. 另外计算结果还表明, 颗粒介质中力大小的概率分布极为不均匀, 较大的力概率呈指数衰减, 应力链的分布具有分形特征.

关键词: 颗粒介质, 离散元, 应力链, 光弹实验

PACC: 4610, 6170, 6210

1. 引言

颗粒介质无处不在, 它有着不同于一般常态介质(固体、液体、气体)的性质, 它的认识水平对于土木工程、采矿、化工、制药、环境变化等方面有着重要的意义, 近年来越来越多地受到各国学者的重视^[1,2]. 我国学者在这一研究领域也作了一些很好的工作^[3-9], 但总得来说, 颗粒介质在我国的研究还处于起步阶段. 颗粒介质的研究, 一般以实验和数值模拟为主, 理论研究相对滞后. 目前, 无论是静力学还是动力学方面, 还没有任何一个理论和模型能够完善地解释颗粒系统中的各种特性. 1996 年 Coppersmith 等^[10]将应力看作标量, 引进一个在 0 到 1 之间分布的随机数 q , 建立了一个应力的随机扩散模型—— q 模型; 1998 年 Socolar^[11]在 q 模型的基础上发展出了 α 模型, 这是静力学中研究应力链的两个著名模型. 这两个模型能很好地解释粒子间力的概率分布, 但是其与光弹实验结果都不能很好符合. 因此, 颗粒介质现阶段的研究主要是以实验和数值模拟积累资料, 为理论研究做铺垫. 颗粒介质之间应力的实验研究, 二维颗粒介质以光弹实验为主, 三维以碳纸技术为主, 数值模拟则大多采用离散元的方法.

离散单元法(discrete element method, DEM)的思想源于较早出现的分子动力学(molecular dynamics). 离散单元法在岩土、矿冶、农业、食品、化工、制药和环境等领域有着广泛地应用, 可以模拟分选、凝聚、混合、装填、压制、推铲、储运、粉碎、爆破、流态化等过程. 本文就是利用离散元的方法模拟了仅有重力作用时, 二维颗粒系统中应力及应力链的分布情况. 这对于岩土工程及纳米晶体在重力作用下的自生长等都有一定的意义. 例如土壤就是由土颗粒和水组成, 而碎石地基在工程中普遍使用, 对它们的深入研究, 很大程度上就依赖于颗粒介质研究水平的提高.

2. 离散单元法的原理^[12-14]

离散元方法的计算迭代过程如图 1. 首先由外边界条件决定粒子所受外力, 然后根据粒子的位置关系确定粒子间的相互作用, 最后求出粒子所受的合力, 根据这个合力求出粒子的加速度和速度, 进而求出各个粒子的新位移. 返回第一步再通过新位置求粒子所受外力及粒子间的相互作用, 如此循环往复, 直到规定的收敛准则. 收敛准则的确定是通过检查系统的能量情况判断, 当粒子的总能量小于某一值时, 我们就认为系统达到稳定平衡, 停止循环计算.

^{*} 国家自然科学基金(批准号:10172041)和国家自然科学基金青年基金(批准号:10402012)资助的课题.

[†] E-mail: yichh04@st.lzu.edu.cn

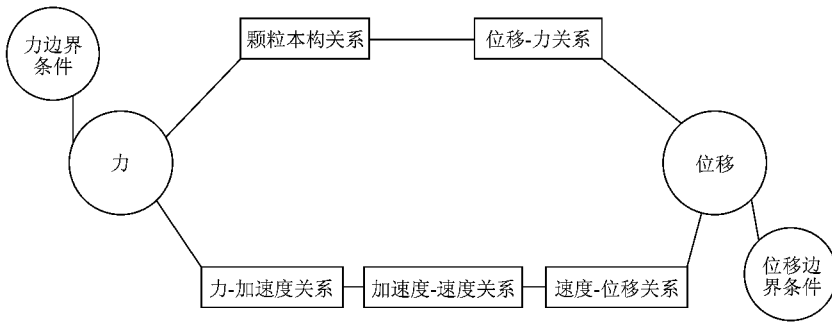


图1 计算过程迭代图

离散元方法的计算核心是牛顿第二运动定律：

$$F = ma, \quad (1)$$

式中 F 是粒子受的合力,包括自身的重力、外力及与其接触的粒子给它的法向力和切向力; m 是粒子的质量; a 是加速度.重力作用于粒子的中心,而接触力则作用于粒子间的接触点(如图2).其中粒子间的相互作用是离散元的重点和难点,因此,下面予以详细介绍.材料本构模型是颗粒理论研究的关键.一般侧重于工程及算法本身研究的计算选用的材料模型比较复杂,如考虑塑性和黏性,而侧重于颗粒介质本身的基本性质研究则多采用比较简单的线弹性模型.由于本研究中的样本粒子受力很小,材料处于线弹性范围之内,因此,材料本构选用了比较简单的线弹性模型.本文的模拟仅考虑圆形干颗粒堆二维的情况.

2.1. 法向力的确定

假定粒子都是圆形的.当两个粒子接触时,由于粒子本身的刚度,相互之间就会产生排斥力 F ,见图3(a).求 F 最简单的模型是线性弹簧模型,设粒子的刚度系数为 k .则粒子 j 对粒子 i 的力为

$$F_{n,ij} = kr_{ij} \left(\frac{R_i + R_j}{r_{ij}} - 1 \right), \quad (2)$$

式中 R_i, R_j 分别为粒子 i 和粒子 j 的半径. $r_{ij} = r_{ji} =$

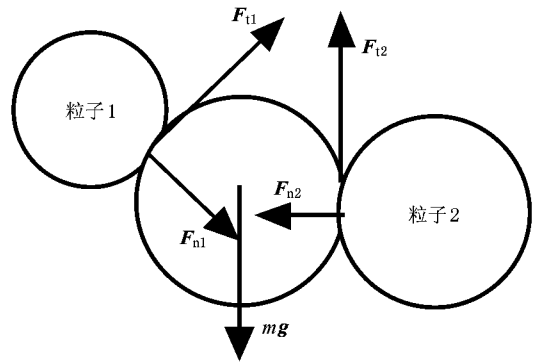


图2 粒子受力示意图(F_n, F_t 分别为法向力和切向力)

$|r_j - r_i| = |r_{ij}|$, r_i 和 r_j 分别是粒子质心的位置向量. r_{ij} 是两个粒子的质心向量差.位置关系见图3



引入公式

$$|\delta| = R_i + R_j - r_{ij}, \quad (3)$$

则

$$F_n = -k\delta, \quad (4)$$

式中负号是因为力的方向与 δ 增大的方向相反.对于颗粒系统来说, F_n 为内力,是成对出现的,分别指向二个接触圆片的质心.通常情况下,由于粒子之间的相互作用是非弹性的,能量并不守恒,因此要在上

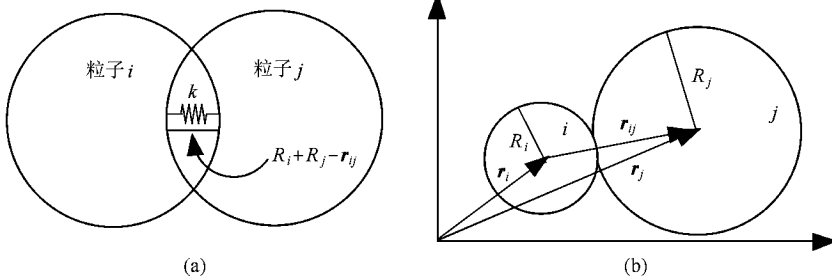


图3 粒子作用示意图

式加一项阻尼项用来修正,

$$F_n = -k\delta - b\dot{\delta} \quad (5)$$

式中 b 为阻尼系数, $\dot{\delta}$ 是粒子间法向的相对速度. 负号表示阻尼力总是与相对运动的趋势相反. b 的大小根据文献 [14], 可以推导得出

$$b = 2m \frac{\omega_0 |\ln \epsilon|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln \epsilon)^2}}, \quad (6)$$

式中 ω_0 为弹簧的固有频率, 可以由刚度和质量求出. 而 ϵ 为回弹系数, 可以由实验或经验得到.

2.2. 切向力

$$F_{t,ij} = \min[kr_{\text{ext},ij}, \mu |F_n| n_{t,ij}], \quad (7)$$

其中 $r_{\text{ext},ij}$ 为粒子间的相对位移, $r_{\text{ext},ij} = v_{t,ij}t$. 其中 t 为接触时间, $v_{t,ij}$ 切向相对速度.

当两个粒子接触时, 粒子 i 在接触点处的切向速度为

$$v_{t,i} = \omega_i \times r_{i,\text{con}} + \{v_i \cdot (z \times n_i)\} z \times n_i, \quad (8)$$

粒子 j 在接触点处的切向速度为

$$v_{t,j} = \omega_j \times r_{j,\text{con}} + \{v_j \cdot (z \times n_j)\} z \times n_j, \quad (9)$$

接触点处粒子 j 对粒子 i 的切向相对速度为

$$v_{t,ij} = v_{t,j} - v_{t,i}, \quad (10)$$

式中 v_i , ω_i 和 v_j , ω_j 分别为粒子 i 和粒子 j 的速度和角速度. r_{con} 是质心到接触点的向量, n 是与 r_{con} 平行的单位向量, z 是角速度逆时针旋转时的方向矢量. 正方向垂直指向纸外. 几何位置见图 4.

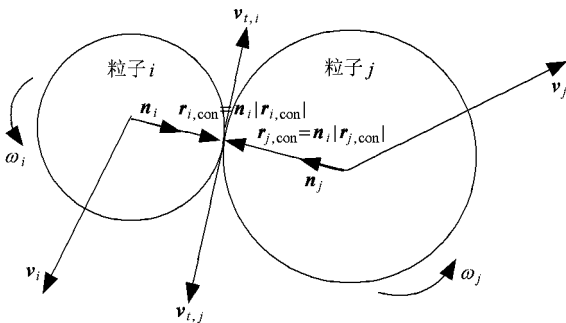


图 4 粒子切向力示意图

3. 物理模型

我们用两种尺寸的混合粒子模拟二维颗粒系统

在只有重力作用时应力链分布情况. 这两种颗粒的直径分别为 18 mm 和 16 mm, 颗粒的总数为 3600 个, 大颗粒所占的比例为 25%, 小颗粒所占的比例为 75%. 首先让粒子整齐的排列在一个二维空间, 粒子之间有一定的空隙, 左右的边界和底部分别用挡板固定, 颗粒的初始排列见图 5. 不同粒径的颗粒随机分布在空间, 每个粒子给一个初速度, 其大小为 0 到 1 的随机分布, 方向也是随机分布. 然后在外力只有重力的条件下让颗粒在相互的作用过程中沉积. 颗粒碰到边界时受边界给它的法向弹力和与颗粒切向运动趋势相反的摩擦力. 模拟过程中, 既考虑颗粒平动又考虑颗粒旋转产生的阻尼力. 计算参数见表 1.

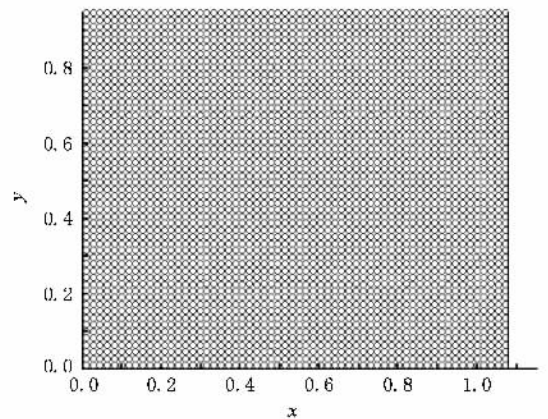


图 5 颗粒初始排列图

表 1 计算参数

粒子间的法向弹簧系数 k_n (N/m)	10^7
粒子间的切向弹簧系数 k_t (N/m)	6.6×10^6
粒子和墙的法向弹簧系数 k_w (N/m)	10^7
粒子间的摩擦系数	0.3
粒子和墙之间的摩擦系数	0.3
粒子的密度 (kg/m^3)	1180
法向阻尼系数	0.15—0.2
切向阻尼系数	0.15—0.2
平动全局阻尼系数	0.2
转动全局阻尼系数	2×10^{-5}
时间步长/s	5×10^{-6}

4. 计算结果

图 6 为 30 万个时间步长后颗粒的排列图, 而图

7 则为颗粒之间的应力链,线条的粗细代表粒子间力的大小.图 8 是相同边界条件下,理论模型和光弹实验得到的结果.图 8 (a)是 Coppersmith 的 q 模型模拟应力链的结果,图 8 (b)是 Socolar 的 α 模型模拟应力链的结果,图 8 (c)是 Behringer 研究小组^[15]用光弹实验得到的结果. q 模型模拟时只考虑了竖向力,每个粒子对下层接触粒子的力是一个不确定的概率值,由概率模型控制,而 α 模型是对 q 模型的补充,

在这个模型中考虑了水平方向的力传递.这两种模型都是数学的概率模型.图 7 与图 8 相比较发现,我们的模拟结果与实验结果比较符合,而数学的理论模型和我们的结果及实验结果都有一定的差异,说明两个模型还不能很好地解释在此条件下颗粒之间的相互作用.分析其原因是由于其传递系数是确定值,并且没有考虑粒子大小、转动及位置的影响,而数值模拟则考虑了以上颗粒问题的主要影响因素.

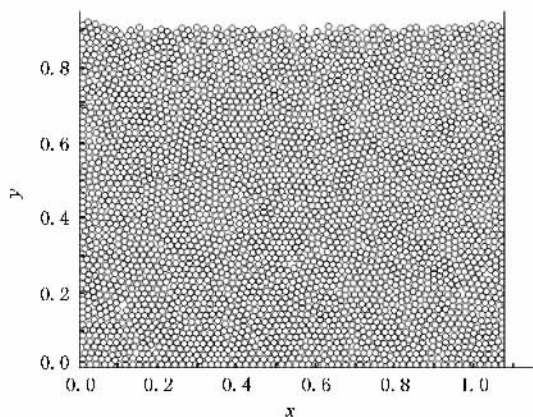


图 6 沉积后的粒子排列图

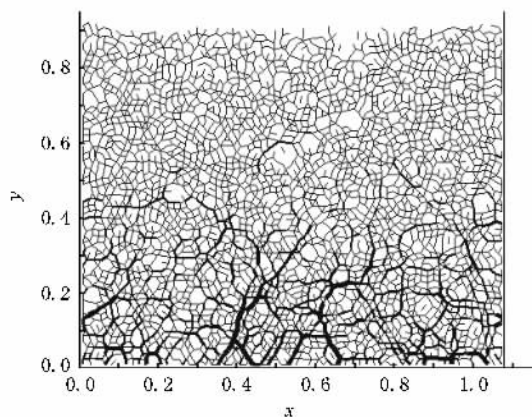


图 7 颗粒间力的网络图

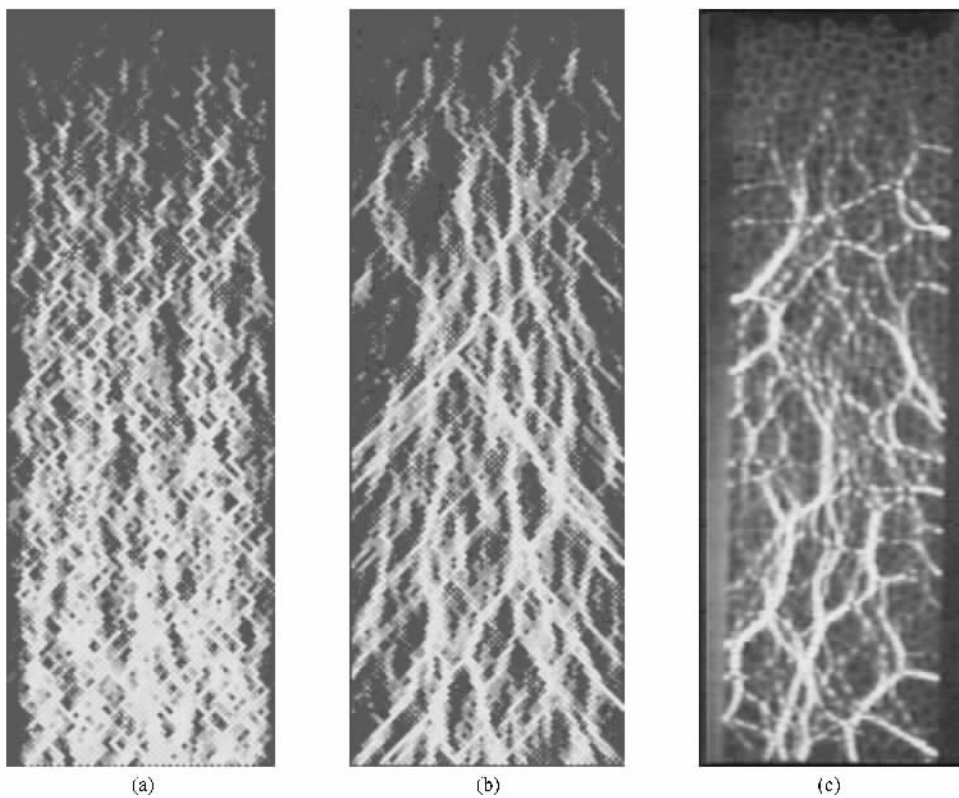


图 8 q 模型、 α 模型及光弹试验得到的力的网络图 (a) q 模型 (b) α 模型 (c) Behringer 光弹试验结果

图 9 是颗粒间力的分布情况. 颗粒间的力既包括法向作用力又包括切向作用力, 是它们的合力. 从图中可以看到, 粒子之间数值大的力的概率是成指数衰减的. 另外, 从图 9(c) 可以看到, 颗粒底

部的受力很不均匀, 比较大的力和比较小的力集中在几个点上, 而其他的点的力随机分布在一个值附近, 力的最大值和最小值相差非常大, 这是一种“拱效应”.

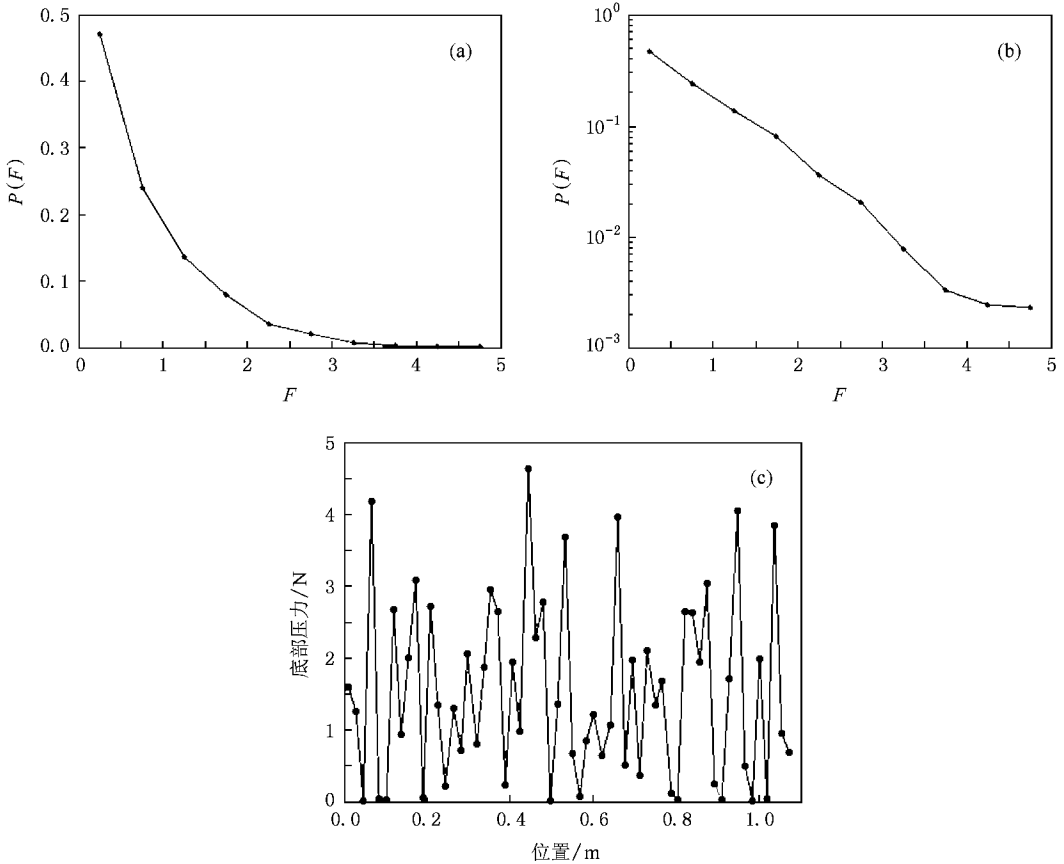


图 9 力的分布图 (a)力的概率分布 (b)力概率分布的半对数坐标 (c)底部力的分布图

5. 结 论

本研究通过离散元模拟了重力作用下的二维颗粒系统内部应力链的分布情况. 根据计算得到的应力链, 与颗粒介质研究中的两个著名数学模型 q 模型和 α 模型作了对比, 并与光弹实验的结果作了比较. 结果表明, 我们的数值模拟结果与实验结果更接近. 而两种理论模型则与模拟结果和实验结果都有

一定的差异, 说明两个模型还不能很好的解释在此条件下颗粒之间的相互作用, 这主要是由于模型受其本身的传递系数和不能考虑系统均匀性限制. 计算结果还表明, 颗粒介质中的力概率分布极为不均匀, 较大的力概率呈指数衰减, 而力链的分布具有分形特征. 另外, 在图 6 中, 还可以发现粒子的沉积过程中形成了许多空隙, 湿陷性黄土的形成可能与此物理过程有关.

[1] Jaeger H M, Nagel S R, Behringer R P 1996 *Rev. Mod. Phys.* **68** 1259

[2] Herrmann H J 2002 *Physica A* **313** 188

[3] Hou M Y, Chen W, Zhang T, Lu K Q, Chan C K 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 204301

[4] Jiang Z H, Lu K Q, Hou M Y, Chen W, Chen X J 2003 *Acta*

- Phys. Sin.* **52** 2244 (in Chinese)[姜泽辉、陆坤权、厚美瑛、陈唯、陈相君 2003 物理学报 **52** 2244]
- [5] Bao D S, Zhou Y, Zhang X S, Tang X W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 0798 (in Chinese)[鲍德松、周英、张训生、唐孝威 2005 物理学报 **54** 0798]
- [6] Xie X M, Jiang Y M, Wang H Y, Cao X P, Liu Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2194 (in Chinese)[谢晓明、蒋亦民、王焕友、曹晓平、刘佑 2003 物理学报 **52** 2194]
- [7] Miao T D, Liu Y, Miao F X, Mu Q S 2005 *Chinese Science Bulletin* **50** 726
- [8] Maio T D, Yi C H, Qi Y L, Mu Q S, Liu Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4713 (in Chinese)[苗天德、宜晨虹、齐艳丽、慕青松、刘源 2007 物理学报 **56** 4713]
- [9] Yi C H, Liu Y, Miao T D, Mu Q S, Qi Y L 2007 *Granular Matter*. **9** No. 3
- [10] Coppersmith S N, Liu C H *et al* 1996 *Physical Review E* **53** 4673
- [11] Socolar J E S 1998 *Physical Review E* **57** 3204
- [12] Xu Y, Sun Q C, Zhang L, Huang W B 2003 *Advances in Mechanics* **33** 251 (in Chinese)[徐泳、孙其诚、张凌、黄文彬 2003 力学进展 **33** 251]
- [13] Wei Q 1991 *The program and numerical method of granular element method* (Beijing: Science Press) (in Chinese)[魏群 散体单元法的基本原理数值方法及程序(北京:科学出版社) 1991]
- [14] Haff P K, Anderson R S 1993 *Sedimentology* **40** 175
- [15] Clement E, Reydellet G, Vanel L, Howell D W, Geng J, Behringer R P 2000 *Experiments on stress propagation in granular* XIIIth International Congress on Rheolog

Discrete element method simulation on the force chains in the two-dimensional granular system under gravity^{*}

Yi Chen-Hong^{1)†} Mu Qing-Song²⁾ Miao Tian-De²⁾

1) *Laboratory for Shock Wave and Detonation Physics Research, Institute of Fluid Physics, China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621900, China*

2) *Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China*

(Received 6 January 2009; revised manuscript received 16 February 2009)

Abstract

The discrete element method is used to research the distribution of forces within the two-dimensional granular system under gravity. The force chains among the particles are generated according to the magnitudes of the forces. Then the simulation results are compared with the well-known q -model, α -model and experimental results obtained through the photoelastic test under the same conditions. According to the computational solution, we conclude that the simulation results are similar to the experimental results are somewhat different from the two probability models. In addition, we also obtained that the probability distribution of the force is very uneven. The probability of the large force decays exponentially and the distribution of the force chains takes on a fractal character.

Keywords: granular system, discrete element method (DEM), force chains, photoelastic test

PACC: 4610, 6170, 6210

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10172041) and the National Science Foundation for Young Scientists of China (Grant No. 10402012).

[†] E-mail: yichh04@st.lzu.edu.cn