

# 声场作用下两空化泡相互作用的研究\*

张鹏利 林书玉†

(陕西师范大学应用声学研究所, 西安 710062)  
(2008 年 11 月 28 日收到, 2009 年 3 月 4 日收到修改稿)

建立了声场作用下两空化泡泡壁的运动方程, 得出了双空化泡的共振频率, 振动半径及空化噪声声压. 由频率方程, 振动半径和声压方程可以看出两气泡的运动情况与单气泡的运动情况有着明显的不同. 共振频率, 共振振幅及声压与两气泡之间的间距有关. 在一定的简化条件下, 运用 MATLAB 语言对共振频率, 共振振幅及空化噪声声压进行了数值求解, 发现共振频率和共振振幅随空泡间距的增大而增大, 空化噪声声压随距离增大先增大后减小.

关键词: 超声, 空化, 频率, 声压

PACC: 6260, 6210

## 1. 引 言

超声空化是指液体中的微小泡核在超声波作用下被激活, 表现为泡核的振荡、生长、收缩及崩溃等一系列动力学过程. 在液体中空化泡在崩溃时产生的高温高压对物体产生很大破坏, 因此可用于工业清洗、切割和钻探等. 空化泡可因声波而产生, 发展和破碎, 产生高温、高压、强噪声, 有时还能发出低频电磁波. 超声空化是一个复杂的物理过程, 在超声技术应用中也是十分重要的. 人们对它作过许多研究<sup>[1-4]</sup>目前对单气泡的研究已非常深入. 而实际的空泡总是以空化云形式存在. 本文讨论了任意大小两空化泡的运动方程、频率方程和空化噪声声压并运用 MATLAB 语言对共振频率, 共振振幅及声压进行了数值求解.

## 2. 两空泡运动的理论分析

### 2.1. 两空化泡的运动方程

如图 1 所示, 建立分别以空泡球心  $O_1, O_2$  为球心的球坐标系, 两空泡的初始半径分别为  $R_{10}, R_{20}$ . 球心之间的距离为  $L$ ,  $P$  为空泡周围的任一点, 空泡 1 空泡 2 距  $P$  点的距离分别为  $r$  和  $s$ . 假定空泡溃灭时

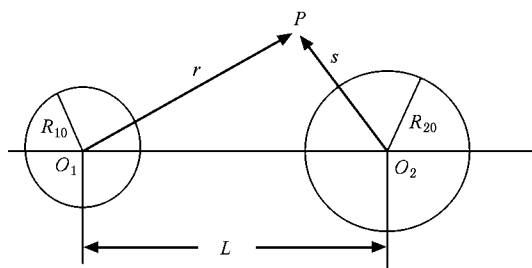


图 1 双空泡球坐标系

的泡壁运动速度远小于声波在流体中传播的速度, 空泡周围流体运动可用线性波动方程描述<sup>[5,6]</sup>:

$$\left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] \phi = 0, \quad (1)$$

式中  $\nabla^2$  为 Laplace 算子,  $\phi$  为流体的速度势函数,  $c$  为声速. 流体的速度势  $\phi$  可用空泡 1 周围的速度势  $\phi_1$  和空泡 2 周围的速度势  $\phi_2$  表示, 即

$$\phi = \phi_1 + \phi_2, \quad \phi_1 = \frac{R_1^2}{r_1} \frac{dR_1}{2dt}, \quad \phi_2 = \frac{R_2^2}{r_2} \frac{dR_2}{2dt}, \quad (2)$$

式中  $R_1, R_2$  为任意时刻两泡的半径,  $r_1, r_2$  为从气泡中心计起的径向距离,  $t$  为时间. 由这两式可以得到双空泡的运动方程. 考虑含气量, 液体黏性及表面张力等因素并假定流体不可压缩, 得到两空泡的运动方程为<sup>[5-7]</sup>.

$$R_1 \frac{d^2 R_1}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dR_1}{dt} \right)^2 + \frac{R_2}{L} \left[ R_2 \frac{d^2 R_2}{dt^2} + 2 \left( \frac{dR_2}{dt} \right)^2 \right]$$

\* 国家自然科学基金(批准号:10674090)资助的课题

† 通讯联系人, E-mail: zhangjin\_loveyou@yahoo.com.cn

$$= \frac{1}{\rho} \left[ p_v - P_\infty + P_{1g_0} \left( \frac{R_{10}}{R_1} \right)^{3\gamma} - \frac{2\delta}{R_1} - 4 \frac{u}{R_1} \frac{dR_1}{dt} \right], \quad (3)$$

$$R_2 \frac{d^2 R_2}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dR_2}{dt} \right)^2 + \frac{R_1}{L} \left[ R_1 \frac{d^2 R_1}{dt^2} + 2 \left( \frac{dR_1}{dt} \right)^2 \right] \\ = \frac{1}{\rho} \left[ p_v - P_\infty + P_{2g_0} \left( \frac{R_{20}}{R_2} \right)^{3\gamma} - \frac{2\delta}{R_2} - 4 \frac{u}{R_2} \frac{dR_2}{dt} \right]. \quad (4)$$

(3)(4)式可解释双空泡在若干声压周期内的稳态运动,两式左边第三项体现了两个空泡之间的相互作用对空泡运动的影响,其中 $P_{1g_0}$ 、 $P_{2g_0}$ 分别为两空泡起始时内部气体的压强, $R_{10}$ 、 $R_{20}$ 为空泡1、2的初始半径, $R_1$ 、 $R_2$ 为任意时刻气泡的半径, $\delta$ 为液体表面张力系数, $u$ 为液体的黏滞系数, $p_v$ 为泡内蒸汽压, $P_\infty$ 为外界环境压力, $\gamma$ 为气体的比热比(绝热条件下).

## 2.2. 两气泡的共振频率

在负声压 $-p_a \sin \omega_a t$ 相内的某一时刻,有 $P_\infty = p_h + \frac{2\delta}{R_{n0}} + p_a \sin \omega_a t$ ,泡内压力为 $P_{\text{内}} = p_v + p_{ng0} \left( \frac{R_{n0}}{R_n} \right)^3$ ,又 $p_{ng0} = p_h + \frac{2\delta}{R_{n0}} - p_v$ ( $n$ 取1、2),其中 $p_h$ 、 $\frac{2\delta}{R_{n0}}$ 、 $p_a$ 分别为流体静压力、空化泡的表面张力及声压幅值.为了简化计算,我们略去蒸汽压(即 $p_v = 0$ )和黏滞阻力.空泡半径在外力作用下增长或减小 $r_n$ 变为 $R_n = R_{n0} \pm r_n$ ;且有 $R_n \gg r_n$ ( $n$ 取1、2),我们把 $R_1 = R_{10} + r_1$ 、 $R_2 = R_{20} + r_2$ 代入(3)(4)两式,并按 $\frac{1}{R_{10}}$ 和 $\frac{1}{R_{20}}$ 的幂次方展开保留其一次方项,那么(3)(4)式可化为

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \omega_{r1}^2 r_1 = \frac{IK(L - R_{20})}{\rho(L^2 R_{10} - R_{10}^2 R_{20})} p_a \sin \omega_a t \quad (5)$$

$$\frac{d^2 r_2}{dt^2} + \omega_{r2}^2 r_2 = \frac{IK(R_{10} - L)}{\rho(R_{10} R_{20}^2 - L^2 R_{20})} p_a \sin \omega_a t \quad (6)$$

(5)(6)两式即为泡1、2在外界周期声压的作用下的振动方程.其中 $\omega_{r1}$ 、 $\omega_{r2}$ 分别为气泡1、气泡2的共振频率.在小振幅的情况下, $\omega_{r1}$ 、 $\omega_{r2}$ 可由下两式给出:

$$\omega_{r1}^2 = \frac{L^2}{L^2 R_{10} - R_{10}^2 R_{20}} \\ \times \left\{ \frac{1}{\rho R_{10}} \left[ 3K \left( p_h + \frac{2\delta}{R_{10}} \right) - \frac{2\delta}{R_{10}} \right] \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\rho L} \left[ 3K \left( p_h + \frac{2\delta}{R_{20}} \right) - \frac{2\delta}{R_{20}} \right] \right\}, \quad (7)$$

$$\omega_{r2}^2 = \frac{L^2}{R_{10} R_{20}^2 - L^2 R_{20}} \\ \times \left\{ \frac{1}{\rho L} \left[ 3K \left( p_h + \frac{2\delta}{R_{10}} \right) - \frac{2\delta}{R_{10}} \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{\rho R_{20}} \left[ 3K \left( p_h + \frac{2\delta}{R_{20}} \right) - \frac{2\delta}{R_{20}} \right] \right\}, \quad (8)$$

式中 $K$ 为多变指数,它可以从 $\gamma$ (绝热条件下)比热比变到1(等温条件下),或者写成

$$f_{r1}^2 = \frac{L^2}{4\pi^2(L^2 R_{10} - R_{10}^2 R_{20})} \\ \times \left\{ \frac{1}{\rho R_{10}} \left[ 3K \left( p_h + \frac{2\delta}{R_{10}} \right) - \frac{2\delta}{R_{10}} \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{\rho L} \left[ 3K \left( p_h + \frac{2\delta}{R_{20}} \right) - \frac{2\delta}{R_{20}} \right] \right\}, \quad (9)$$

$$f_{r2}^2 = \frac{L^2}{4\pi^2(R_{10} R_{20}^2 - L^2 R_{20})} \\ \times \left\{ \frac{1}{\rho L} \left[ 3K \left( p_h + \frac{2\delta}{R_{10}} \right) - \frac{2\delta}{R_{10}} \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{\rho R_{20}} \left[ 3K \left( p_h + \frac{2\delta}{R_{20}} \right) - \frac{2\delta}{R_{20}} \right] \right\}, \quad (10)$$

式中 $\omega_r = 2\pi f_r$ , $f_r$ 为液体中空泡的共振频率.

由上两式我们可以看出在密度为 $\rho$ 的液体中,由于考虑到两泡的相互作用,两泡的共振频率与单泡的共振频率有明显的不同.气泡的共振频率随着两泡之间的距离 $L$ 的增大而增大,起始半径大的共振频率小.

气泡2在无穷远处时, $L \rightarrow \infty$ ,对(9)式右边同时除以 $L^2$ ,可得

$$f_{r1}^2 = \frac{1}{4\pi^2 R_{10}^2 \rho} \left[ 3K \left( p_h + \frac{2\delta}{R_{10}} \right) - \frac{2\delta}{R_{10}} \right]. \quad (11)$$

(11)式与 Minneart 给出的单泡理论的共振频率符合得很好.

## 2.3. 两气泡的振动

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \omega_{r1}^2 r_1 = \frac{IK(L - R_{20})}{\rho(L^2 R_{10} - R_{10}^2 R_{20})} p_a \sin \omega_a t, \quad (12)$$

$$\frac{d^2 r_2}{dt^2} + \omega_{r2}^2 r_2 = \frac{IK(R_{10} - L)}{\rho(R_{10} R_{20}^2 - L^2 R_{20})} p_a \sin \omega_a t, \quad (13)$$

我们求解上两式可得

$$r_1 = \frac{p_a I (L - R_{20})}{\rho (L^2 R_{10} - R_{10}^2 R_{20}) (\omega_{r1}^2 - \omega_a^2)}$$

$$\times \left[ \sin \omega_a t + \frac{\omega_a}{\omega_{r1}} \sin \omega_{r1} t \right], \quad (14)$$

$$r_2 = \frac{P_a I (R_{10} - L)}{\rho (R_{10} R_{20}^2 - L^2 R_{20} (\omega_{r2}^2 - \omega_a^2))} \times \left[ \sin \omega_a t + \frac{\omega_a}{\omega_{r2}} \sin \omega_{r2} t \right]. \quad (15)$$

在共振 (即  $\omega_a = \omega_{r1}$  或  $\omega_a = \omega_{r2}$ ) 条件下, 我们解得 (12) (13) 式为

$$r_1 = \frac{p_a I (L - R_{20})}{2 \rho (L^2 R_{10} - R_{10}^2 R_{20}) \omega_a^2} \times [\sin \omega_a t - \omega_a t \cos \omega_a t], \quad (16)$$

$$r_2 = \frac{P_a I (R_{10} - L)}{2 \rho (R_{10} R_{20}^2 - L^2 R_{20}) \omega_a^2} \times [\sin \omega_a t - \omega_a t \cos \omega_a t]. \quad (17)$$

(16) (17) 式表明,  $r_1, r_2$  相对  $P_a$  的相位在通过共振时将发生变化, 共振的解变为不稳定, 振幅随时间增大. 由于我们忽略了能量损耗, 所以从理论上讲, 振幅的增大是无止境的. 此外共振振幅还与两泡的初始半径及它们之间的距离有关. 当  $L \rightarrow \infty$  时 (16), (17) 式近似为单泡共振时的解 (求解过程见附录).

### 2.4. 两气泡的空化噪声声压

空化的发展伴随着空化泡的体积变化, 基本上是一个单极子噪声源. 忽略二阶及二阶以上极子的作用, 空泡的声压方程可写为<sup>[6,9]</sup>

$$\nabla^2 p - c^{-2} \ddot{p} = -\dot{q}, \quad (18)$$

式中  $q$  液体中单位体积内质量的脉动速率 (在本文中  $q$  是由空泡的体积脉动而产生的),  $p$  为声压,  $c$  为声速. 若声源尺寸远小于噪声波长且密度起伏可以忽略不计, 对于球形空泡, 通过上式可得到两空泡在  $P$  点的声压规律:

$$p_1 = \frac{\rho}{r} [2R_1 \dot{R}_1^2 + R_1^2 \ddot{R}_1], \quad (19)$$

$$p_2 = \frac{\rho}{s} [2R_2 \dot{R}_2^2 + R_2^2 \ddot{R}_2], \quad (20)$$

其中  $p_1, p_2$  分别为空泡 1、空泡 2 在  $P$  点产生的声压.  $r, s$  分别为空泡 1、空泡 2 距  $P$  的距离,  $\rho$  为密度. 由 (3) (4) (19) (20) 式可解得两泡在  $P$  点产生的声压

$$p = R_1 \left( \frac{R_1 \rho}{r} - \frac{\rho L}{s} \right) \ddot{R}_1 + \left( \frac{2R_1 \rho}{r} - \frac{2\rho L}{s} \right) \dot{R}_1^2 + \frac{L}{s} \left( P_V - P_\infty + P_{1s_0} \left( \frac{R_{10}}{R_1} \right)^{3\gamma} - \frac{2\delta}{R_1} \right) \quad (21)$$

$R_1 = R_{10} + r_1, R_2 = R_{20} + r_2, r_1, r_2$  我们在上边

已经求出, 从而可求得  $P$  点的声压.

## 3. 计算结果的数值分析

### 3.1. 共振频率的数值分析

考虑到 (9) 式和 (10) 式相似, 我们仅对 (9) 式用 MATLAB 进行了数值求解, 并得到图 2. 其中空泡 1 半径为  $R_{10} = 10 \mu\text{m}$ , 空泡 2 半径为  $R_{20} = 50 \mu\text{m}$ ,  $\rho_h = 1.013 \times 10^5, K$  取 1.3, 由图 2 可以看出共振频率随两泡之间的距离增大而增大, 最后趋于一定值, 这个值就是单泡的共振频率.

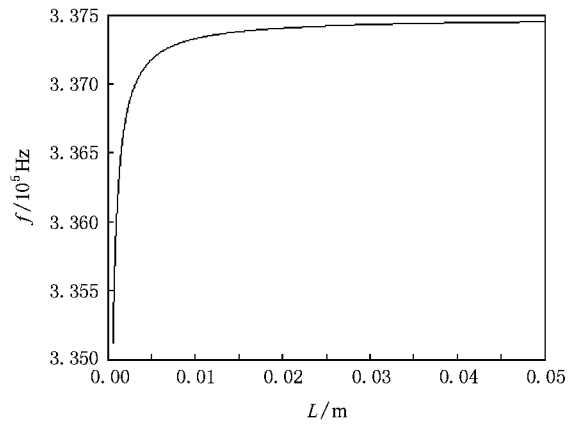


图 2 气泡的共振频率与气泡之间距离的关系

### 3.2. 气泡的共振振幅

因为 (14) (15) 式是相似的, 所以我们仅对 (14) 式的振幅  $\frac{p_a I (L - R_{20})}{\rho (L^2 R_{10} - R_{10}^2 R_{20}) \omega_a^2}$  做了数值求解. 并得到图 3 其中  $\omega_a = 2\pi f_a, f_a = 5\text{MHz}, R_{10} = 10 \mu\text{m}, R_{20} = 50 \mu\text{m}$ , 观察图像, 我们发现振幅随距离的增大而增大, 最后趋于一定值.

### 3.3. 气泡的共振

对 (13) 式进行数值求解, 得到图 4. 其中  $p_a = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}, R_{10} = 0.8 \mu\text{m}, R_{20} = 1 \mu\text{m}, L = 0.001 \text{ m}$ , 气泡在声波周期内稳定振荡, 且振荡形式复杂, 如图 4 所示. 与文献 10 给出气泡共振情况的基本相似, 但要比单泡的振动情况复杂.

### 3.4. 气泡的空化噪声声压

我们对 (21) 式做了数值求解, 其中  $R_{10} = R_{20} =$

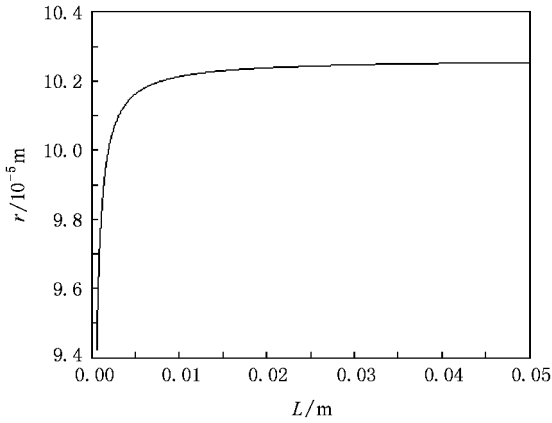


图 3 气泡的振幅随气泡之间距离的变化

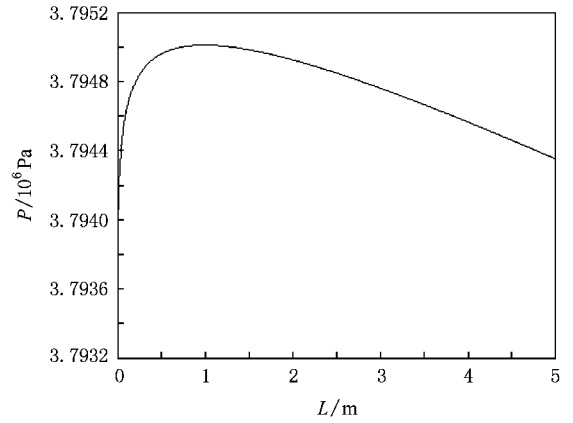


图 6 空化噪声声压随两泡之间距离的变化图

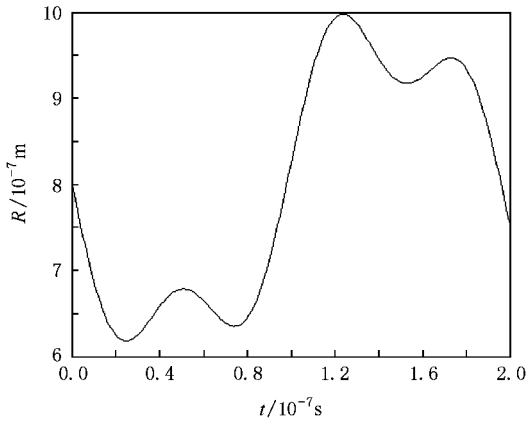


图 4 共振情况时水中空气泡半径的时间曲线

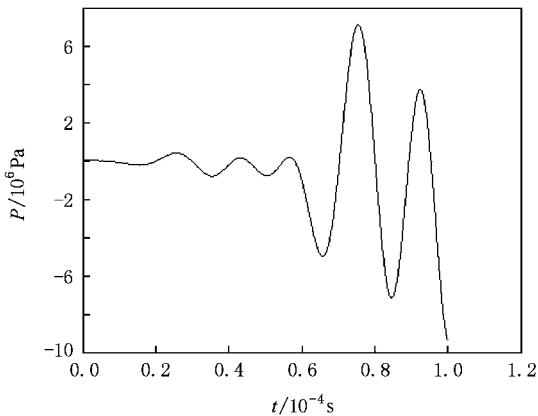


图 5 空化噪声声压随时间变化图

$10 \mu\text{m}$ ,  $r = 0.02 \text{ m}$ ,  $s = 0.03 \text{ m}$ ; 当  $L = 0.01 \text{ m}$  时, 两空泡在  $P$  点的声压随时间的变化如图 5 所示, 当  $t = 5 \times 10^{-5} \text{ s}$  时,  $P$  点的声压随两泡之间距离的变化如图 6 所示.

观察图 5 发现随时间延迟, 气泡开始共振并逐

渐增强, 空化噪声声压增大. 由图 6 我们看到, 起始时的空化噪声声压随着两泡之间距离的增大而增大, 但当距离增大到一定值时声压却随距离增大而减小. 图 6 表明, 当气泡之间距离增大时, 气泡之间的相互作用先增强后减弱.

## 4. 结 论

本文建立了双空泡的运动方程, 推导出了共振频率, 共振半径及空化噪声声压, 并做了数值计算. 计算结果表明, 对于两空化泡的运动, 气泡的共振频率, 共振振幅及空化噪声声压与气泡之间的距离有关. 随气泡之间距离的增大, 气泡的共振频率和共振振幅都将增大, 空化噪声声压随气泡之间的距离先增大后减小.

## 附录

(16)(17)式的具体求解过程:

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} + w_{r1}^2 r_1 = \frac{K(L - R_{20})}{(\rho L^2 R_{10} - R_{10}^2 R_{20})} p_a \sin \omega_a t, \quad (12)$$

$$\frac{d^2 r_2}{dt^2} + w_{r2}^2 r_2 = \frac{K(R_{10} - L)}{(\rho R_{10} R_{20}^2 - L^2 R_{20})} p_a \sin \omega_a t, \quad (13)$$

我们仅对(12)式求解,  $\omega_a = \omega_{r1}$ , 方程为

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} + w_{r1}^2 r_1 = \frac{K(L - R_{20})}{(\rho L^2 R_{10} - R_{10}^2 R_{20})} p_a \sin \omega_a t,$$

其特解为

$$r_1 = (A \sin \omega_a t + B \cos \omega_a t),$$

代入(12)式可求得

$$A = 0, B = -\frac{p_a K(L - R_{20})}{2(\rho L^2 R_{10} - R_{10}^2 R_{20}) \omega_a},$$

对应的其次微分方程的通解为

$$r_2 = (C_1 \sin \omega_a t + C_2 \cos \omega_a t),$$

$t=0$  时,  $r=0$ . 泡壁受力有  $-p_a \sin(\omega_a t)S = m\ddot{r}$ , 由此可得

$$C_1 = \frac{p_a I(L - R_{20})}{2\alpha(L^2 R_{10} - R_{10}^2 R_{20})\omega_a}, \quad C_2 = 0,$$

$$r = r_1 + r_2 = \frac{p_a I(L - R_{20})}{2\alpha(L^2 R_{10} - R_{10}^2 R_{20})\omega_a} [\sin \omega_a t - \omega_a t \cos \omega_a t].$$

- [ 1 ] Chen Q, Zou X Y, Cheng J C 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6476 (in Chinese) [ 陈 谦、邹欣晔、程建春 2006 物理学报 **55** 6476 ]
- [ 2 ] Li C, Wu X M, Yin C F 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 999 (in Chinese) [ 李 超、吴先梅、应崇福 2005 物理学报 **54** 999 ]
- [ 3 ] Cai Y B, Lu C J, He Y S 1995 *Water Dynamics Research and Development* **10** 22 (in Chinese) [ 蔡悦斌、鲁传敬、何友声 1995 水动力学研究与进展 **10** 22 ]
- [ 4 ] Huang J Q 1989 *Applied Mathematics and Mechanics* **10** 155 (in Chinese) [ 黄景泉 1989 应用数学和力学 **10** 155 ]
- [ 5 ] Ross D 1983 *Mechanics of Underwater Noise* (Beijing: Ocean Press) (in Chinese) [ D·罗斯,《水下噪声原理》翻译组 1983 水下噪声原理(北京:海洋出版社) ]
- [ 6 ] Pu Z Q, Zhang W, Shi K R, Zhang J H, Wu Y L 2005 *Journal of Tsinghua University* **11** 1450 (in Chinese) [ 蒲中奇、张伟、施克仁、张俊华、吴玉林 2005 清华大学学报 **11** 1450 ]
- [ 7 ] Fujikawa S, Thkahlira H 1986 *A Custica* **61** 188
- [ 8 ] Mason T J, Lorimer J P 1988 *Sonochemistry: Theory, Application and Use of Ultrasound in Chenmistry*, Ellis horwood Limited
- [ 9 ] Huang J Q 1990 *Applied Mathematics and Mechanics* **11** 155 (in Chinese) [ 黄景泉 1990 应用数学和力学 **11** 155 ]
- [ 10 ] Feng R, Li H M 1992 *Voice of Chemical and Its Application* (Hefei: Anhui Science and Technology Press) 67—69 (in Chinese) [ 冯若、李化茂 1992 声化学及其应用(合肥:安徽科技出版社) 第 67—99 页 ]

## Two-bubble interaction under the sound field<sup>\*</sup>

Zhang Peng-Li Lin Shu-Yu<sup>†</sup>

(Institute of Applied Acoustics Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

(Received 28 November 2008; revised manuscript received 4 March 2009)

### Abstract

The paper established the motion equation of two-bubble walls under the sound field, and obtained the resonant frequency, vibration radius and radiation pressure of the double-bubble cavitation. From the frequency equation, radius of vibration and sound pressure equation we can see that the movement of two-bubble is different from a single bubble. Resonance frequency, resonance amplitude and radiation pressure are related to the distance between the bubble. By carrying out the numerical solution by MATLAB, we found that the resonance frequency and amplitude resonance increased with the distance between the two-bubble.

**Keywords:** ultrasound, cavitation, frequency, sound pressure

**PACC:** 6260, 6210

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10674090).

† Corresponding author. E-mail: zhangjin\_loveyou@yahoo.com.cn