第 58 卷 第 12 期 2009 年 12 月
1000-3290/2009/58(12)/8123-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.58, No.12, December, 2009

一类扰动非线性发展方程的类孤子同伦近似解析解*

石兰芳[1)] 莫嘉琪[2)†]

1)(南京信息工程大学数理学院,南京 210044)

2)(安徽师范大学数学系,芜湖 241000)

(2009 年 5 月 11 日收到;2009 年 5 月 24 日收到修改稿)

采用一个简单而有效的技巧,研究了一类扰动非线性发展方程.首先,引入一个相应典型方程的孤子近似解.然后,利用同伦映射方法得到了原扰动非线性发展方程的近似解.

关键词:孤子,扰动发展方程,同伦映射

PACC:0230

1. 引 言

孤子理论在自然科学许多领域都有重要的应用,诸如流体力学、场论、光学、等离子体物理学等[1—8].近来研究孤子解出现了许多新的方法,例如双曲正切法、齐次平衡法、Jacobi 椭圆函数法、辅助函数法等,并在散射光波、量子力学、大气物理、神经网络等方面也做了许多有关孤子方面的工作[9—15].求解一类非线性问题的方法也不断产生和优化,包括平均法、边界层校正法、匹配法、多重尺度法等.同伦映射法[16,17]也是其中一种有效的新方法.近来许多学者,如 Ni 和 Wei[18],Bartier[19],Libre 和 da Silva 和 Teixeira[20] 以及 Guarguaglini 和 Natalini[21] 在非线性问题方面做了大量的工作.利用微分不等式等方法,我们也在反应扩散系统[22]、催化控制系统[23]、生态环境[24]、激波[25]、孤波[26—29]、激光脉冲[30]、海洋科学[31—33]和大气物理[34—37]等方面做了一些工作.本文讨论与近代物理有关的一个扰动发展方程,利用简单而有效的同伦映射方法得到了相应系统的类孤子解的近似展开式.

2. 扰动发展方程和同伦映射

考虑如下一个特殊的扰动发展方程[14,15]:

$$u_t - \alpha u u_x + m u^2 u_x + \beta u_{xxx} = f(t, x, u), \tag{1}$$

其中 β 为常数,$m = -\alpha = 96\beta$,而 f 为扰动项,在对应的区域内为充分光滑的函数.方程(1)在等离子体物理、固体物理、原子物理、流体力学中具有广泛的应用.

首先考虑与(1)式对应的无扰动项情形下的发展方程为

$$u_t - \alpha u u_x + m u^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0. \tag{2}$$

方程(2)有类孤子精确解[15]

$$\bar{u}(t, x) = \frac{\tanh^2(x - 20\beta t)}{1 + \tanh^2(x - 20\beta t)}. \tag{3}$$

由于方程(1)还具有非零扰动项 $f(t, x, u)$,一般不能求得显式解析精确解.为此,需要构造其近似解.为了得到方程(1)的近似解析解,我们引入如下的一个同伦映射 $H(u, s): R \times I \to R$[16,17],则

$$H(u, s) = Lu - L\tilde{u}_0 + s[L\tilde{u}_0 - \alpha u u_x + m u^2 u_x - f(t, x, u)], \tag{4}$$

其中 $R \in (-\infty, +\infty)$,$I \in [0,1]$,$\tilde{u}_0$ 为方程(1)的初始近似函数,而线性算子 L 为

$$Lu = u_t + \beta u_{xxx}.$$

显然,由关系式(4)可知,$H(u, 1) = 0$ 与方程(1)相同.故方程(1)的解 $u(t, x)$ 就是 $H(u, s) = 0$ 在 $s \to 1$ 情形的解.

* 国家自然科学基金(批准号:40676016,40876010)和中国科学院知识创新工程重要方向性项目(批准号:KZCX2-YW-Q03-08)资助的课题.

† 通讯联系人.E-mail:mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

3. 类孤子近似解的计算

令

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(t,x) s^i, \tag{5}$$

将(5)式代入 $H(u,s)=0$，比较方程 $H(u,s)=0$ 关于 s 的同次幂的系数. 由 s 的零次幂的系数得

$$L(u_0) = L(\tilde{u}_0). \tag{6}$$

取 $\tilde{u}_0$ 为方程(2)的类孤子精确解 $\bar{u}$，于是由(3)和(6)式得

$$u_0(t,x) = \frac{\tanh^2(x-20\beta t)}{1+\tanh^2(x-20\beta t)}. \tag{7}$$

在 $H(u,s)=0$ 中，取关于 s 的一次幂的系数得

$$L(u_1) = f(t,x,u_0). \tag{8}$$

利用 Fourier 变换法,可以求得线性方程(8)的解为

$$u_1(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau,\xi,u_0) \times [\cos(-\lambda^3\beta(t-\tau)+\lambda(x-\xi))]\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \tag{9}$$

由(4)式,比较 $H(u,s)=0$ 关于 s 的二次幂的系数得

$$L(u_2) = \alpha(1-mu_0)u_0u_{1x} + (\alpha u_{0x} - 2mu_0u_{0x})u_1 + F(u_0,u_1), \tag{10}$$

其中 u_0 和 u_1 分别由(7)和(9)式表示，

$$F(u_0,u_1) = \left[\frac{\partial}{\partial s}\left(f\left(t,x,\sum_{i=0}^{\infty}u_is^i\right)\right)\right]_{s=0}.$$

同样，不难得到方程(10)的解为

$$u_2(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\alpha(1-mu_0)u_0u_{1\xi} + (\alpha u_{0\xi}-2mu_0u_{0\xi})u_1 + F(u_0,u_1)] \times [\cos(-\lambda^3\beta(t-\tau)+\lambda(x-\xi))]\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \tag{11}$$

于是由(5)，(7)，(9)和(11)式得到扰动发展方程(1)类孤子解的二次近似解 $u_{2\mathrm{hom}}$ 为

$$\begin{aligned} u_{2\mathrm{hom}}(t,x) = {} & \frac{\tanh^2(x-20\beta t)}{1+\tanh^2(x-20\beta t)} + \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[f(\tau,\xi,u_0) \\ & + \alpha(1-mu_0)u_0u_{1\xi} + (\alpha u_{0\xi}-2mu_0u_{0\xi})u_1 + F(u_0,u_1)] \\ & \times[\cos(-\lambda^3\beta(t-\tau) + \lambda(x-\xi))]\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{12}$$

其中 β 为常数,u_0 和 u_1 分别由(7)和(9)式表示.

用同样的方法比较关系式 $H(u,s)=0$ 关于 s 的更高次幂的系数,可得到扰动非线性发展方程(1)的更高次扰动类孤子近似解.

4. 举 例

现讨论一个特殊的扰动发展方程,它的扰动项为 $f=\sin u$. 这时方程(1)为

$$u_t - \alpha uu_x + mu^2u_x + \beta u_{xxx} = \sin u, \tag{13}$$

其中 $m=-\alpha=96\beta$，这时由(7)和(13)式的类孤子解的零次近似 $u_{0\mathrm{hom}}(t,x)$ 为

$$u_{0\mathrm{hom}}(t,x) = \frac{\tanh^2(x-20\beta t)}{1+\tanh^2(x-20\beta t)}. \tag{14}$$

利用同伦映射方法，由(9)和(14)式得到类孤子解的一次近似 $u_{1\mathrm{hom}}(t,x)$ 为

$$u_{1\mathrm{hom}}(t,x) = \frac{\tanh^2(x-20\beta t)}{1+\tanh^2(x-20\beta t)} + \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sin u_0[\cos(-\lambda^3\beta(t-\tau) + \lambda(x-\xi))]\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \tag{15}$$

再由(12)式得到类孤子解的二次近似 $u_{2\mathrm{hom}}(t,x)$ 为

$$\begin{aligned} u_{2\mathrm{hom}}(t,x) = {} & \frac{\tanh^2(x-20\beta t)}{1+\tanh^2(x-20\beta t)} + \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{\tanh^2(\xi-20\beta\tau)}{1+\tanh^2(\xi-20\beta\tau)}\right)\right. \\ & - 96\beta\left[\left(1-96\beta\frac{\tanh^2(\xi-20\beta\tau)}{1+\tanh^2(\xi-20\beta\tau)}\right)\frac{\tanh^2(\xi-20\beta\tau)}{1+\tanh^2(\xi-20\beta\tau)}\right. \\ & \times\int_0^\tau\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\left(\frac{\tanh^2(\xi_1-20\beta\tau_1)}{1+\tanh^2(\xi_1-20\beta\tau_1)}\right)\cos(-\lambda_1^3\beta(\tau-\tau_1)+\lambda_1(\xi-\xi_1))\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_1 \\ & \left.\left. + \left(\frac{\tanh^2(\xi-20\beta^\tau)}{1+\tanh^2(\xi-20\beta\tau)} + \left(\frac{\tanh^2(\xi-20\beta\tau)}{1+\tanh^2(\xi-20\beta\tau)}\right)^2\right)_x + \cos\left(\frac{\tanh^2(\xi-20\beta\tau)}{1+\tanh^2(\xi-20\beta\tau)}\right)\right]\right] \end{aligned}$$

$$\times \int_0^{\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{\tanh^2(\xi_1 - 20\beta\tau_1)}{1 + \tanh^2(\xi_1 - 20\beta\tau_1)}\right)[\cos(-\lambda_1^3\beta(\tau - \tau_1) + \lambda_1(\xi - \xi_1))]\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_1$$

$$\times [\cos(-\lambda^3\beta(t - \tau) + \lambda(x - \xi))]\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau, \quad (16)$$

式中 β 为常数.

继续利用同伦映射关系式(4)，可以得到扰动非线性发展方程(1)在 $f = \sin u$ 情况下的类孤子解任意次近似表达式.

5. 结 论

孤子理论描述的是一类复杂的自然现象，往往需要将它建立并简化为基本模式并利用近似方法去求解它. 同伦映射方法就是一个简单而有效的方法，同伦映射方法不同于一般的数值方法. 用同伦映射方法求得的解还可以继续进行解析运算. 所以我们还能进一步通过解析运算对类孤子解(12)式作相应的定性和定量方面的分析. 本文用同伦映射方法,选取的初始近似 $u_0(t,x)$ 是采用非扰动情形下的典型发展方程(2)的类孤子解 $\bar{u}(t,x)$. 它保证了对应于扰动情形下的发展方程较快地求得在要求的精度范围内的近似解析解，故所得的结果更加实用、简捷.

[1] McPhaden M J, Zhang D 2002 *Nature* **415** 603

[2] Gu D F, Philander S G H 1997 *Science* **275** 805

[3] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 620 (in Chinese) [马松华、强继业、方建平 2007 物理学报 **56** 620]

[4] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 662

[5] Loutsenko I 2006 *Commun. Math. Phys.* **268** 465

[6] Gedalin M 1998 *Phys. Plasmas* **5** 127

[7] Parkes E J 2008 *Chaos Soliton. Fract.* **38** 154

[8] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[9] Sirendaoreji J S 2003 *Phys. Lett.* A **309** 387

[10] Yang J R, Mao J J 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1527

[11] Gao Y, Tang X Y 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 961

[12] Yang J R, Mao J J 2008 *Chin. Phys.* **17** 4337

[13] Pan L X, Zuo W M, Yan J R 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1 (in Chinese) [潘留仙、左伟明、颜家壬 2005 物理学报 **54** 1]

[14] Lu D C, Hong B J, Tian L X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5617 (in Chinese) [卢殿臣、洪宝剑、田立新 2006 物理学报 **55** 5617]

[15] Taogetusang, Sirendaoerji 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2121 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2009 物理学报 **58** 2121]

[16] Liao S J 2004 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* (New York: CRC Press)

[17] He J H 2002 *Approximate Nonlinear Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Press) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法 (郑州:河南科学技术出版社)]

[18] Ni W M, Wei J C 2006 *J. Diff. Eq.* **221** 158

[19] Bartier J P 2006 *Asymp. Anal.* **46** 325

[20] Libre J, da Silva P R, Teixeira M A 2007 *J. Dyn. Diff. Eq.* **19** 309

[21] Guarguaglini F R, Natalini R 2007 *Commun. Part. Diff. Eq.* **32** 163

[22] Mo J Q 1989 *Sci. China* A **32** 1306

[23] Mo J Q, Lin W T 2008 *J. Sys. Sci. Complex.* **20** 119

[24] Mo J Q, Wang H 2007 *Acta Ecol. Sin.* **27** 4366

[25] Mo J Q, Zhu J, Wang H 2003 *Prog. Nat. Sci.* **13** 768

[26] Mo J Q, Zhang W J, He M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1843 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、何 铭 2007 物理学报 **56** 1843]

[27] Mo J Q, Zhang W J, Chen X F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6169 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、陈贤峰 2007 物理学报 **56** 6169]

[28] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 010204

[29] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 695 (in Chinese) [莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 695]

[30] Mo J Q, Zhang W J, He M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3233 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、何 铭 2006 物理学报 **55** 3233]

[31] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2008 *Chin. Geogr. Sci.* **18** 193

[32] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Prog. Nat. Sci.* **17** 230

[33] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3127 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛、林一骅 2007 物理学报 **56** 3127]

[34] Mo J Q, Wang H, Lin W T, Lin Y H 2006 *Chin. Phys.* **15** 671

[35] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Chin. Phys.* **16** 951

[36] Mo J Q, Lin W T 2008 *Chin. Phys.* **17** 370

[37] Mo J Q, Lin W T 2008 *Chin. Phys.* **17** 743

Soliton-like homotopic approximate analytic solution for a class of disturbed nonlinear evolution equation*

Shi Lan-Fang[1)] Mo Jia-Qi[2)†]

1) College of Mathematics and Physics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China)

2) (Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)

(Received 11 May 2009; revised manuscript received 24 May 2009)

Abstract

The approximate solution for a class of disturbed nonlinear evolution equation is considered taking a simple and valid technique. We first introduce approximate solution of a corresponding typical differential equation. And then the approximate solution for a original disturbed nonlinear evolution equation is obtained using the homotopic mapping method.

Keywords: soliton, disturbed evolution equation, homotopic mapping

PACC: 0230

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40676016, 40876010) and the Main Direction Program of the Knowledge Innovation of Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX2-YW-Q03-08).

† Corresponding author. E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn