

# 永磁同步电机的混沌分析及其电路实现\*

薛 薇<sup>1)†</sup> 郭彦岭<sup>1)</sup> 陈增强<sup>2)</sup>

1) 天津科技大学自动化系, 天津 300222)

2) 南开大学自动化系, 天津 300071)

(2009 年 2 月 20 日收到, 2009 年 3 月 18 日收到修改稿)

作为一个非线性动力学系统, 在一定参数范围和外部输入下永磁同步电机可以呈现非常复杂的混沌运动或极限环, 其混沌特性较为显著. 在永磁同步电机的非线性数学模型基础上, 分析其分叉图、Lyapunov 指数图谱和平衡点性质等非线性运动特性, 并通过数字仿真得到验证. 最后基于该模型设计了相应的模拟电路, 实验结果和数字仿真一致.

关键词: 永磁同步电机, 混沌, 分形分析, 电路实现

PACC: 0545

## 1. 引 言

20 世纪 60 年代 Lorenz 在数值天气预报模型中发现了“蝴蝶效应”<sup>[1]</sup>. 从此非线性研究领域中有混沌的研究吸引了许多学者<sup>[2-10]</sup>. 现在混沌研究已不仅仅局限于数学和物理学领域, 实际工程中的应用研究也取得了很大的进展, 例如混沌在数字加密、保密通信和电机混沌状态控制等应用<sup>[11-15]</sup>.

永磁同步电机是多变量强耦合的非线性系统, 在某些参数工作条件下出现混沌运动<sup>[16,17]</sup>. 其主要表现为转速或转矩的剧烈振荡、控制性能的不稳定、系统不规则的电磁噪声等. 因而对永磁同步电机进行混沌分析有很重要的现实意义.

本文首先对永磁同步电机的数学模型进行数字仿真. 利用 Matlab 给出永磁同步电机的相图, 并对其分叉图和 Lyapunov 指数图谱进行分析, 解释该系统的动力学特性, 验证其产生混沌的参数范围. 最后给出了设计的实际电路及其仿真结果, 进一步从物理实现上验证数字仿真结果.

## 2. 永磁同步电机的混沌模型以及数字仿真

以  $i_d, i_q, w$  为状态变量, 利用  $d-q$  坐标轴, 永磁

同步电机的数学模型可以写为

$$\begin{aligned} \frac{di_d}{dt} &= (u_d - R_1 i_d + wL_q i_q) / L_q, \\ \frac{di_q}{dt} &= (u_q - R_1 i_q - wL_d i_d - w\Psi_r) / L_q, \\ \frac{dw}{dt} &= [n_p \Psi_r i_q + n_p (L_d - L_q) i_d i_q - T_1 - \beta\omega] / J. \end{aligned} \quad (1)$$

上述模型经过仿射变换和时间尺度变换, 得到永磁同步电机的无量纲状态模型如下<sup>[18]</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + zy + \tilde{u}_d, \\ \dot{y} &= -y - zx + \gamma z + \tilde{u}_q, \\ \dot{z} &= \alpha(y - z) - \tilde{T}_1, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 (1) 式与 (2) 式的参数对应关系如下:

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{n_p \Psi_r^2}{\beta R_1}, \\ \sigma &= \frac{\beta L_q}{J R_1}. \end{aligned}$$

对于  $\tilde{u}_d = \tilde{u}_q = \tilde{T}_1 = 0$  的情形有

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + zy, \\ \dot{y} &= -y - zx + \gamma z, \\ \dot{z} &= \alpha(y - z). \end{aligned} \quad (3)$$

(3) 式可以看作永磁同步电机运行一段时间后突然断电的情形. 取  $\sigma = 4, \gamma$  分别为 16, 50, 140 时, 系统 (3) 在不同的参数下呈现不同的动态特性, 其仿真结果如图 1 所示.

\* 国家自然科学基金(批准号: 10772135, 60774088), 教育部科学技术研究重点项目(批准号: 207005)和天津市应用基础研究计划(批准号: 07JCYBJC05800, 08JCZDJC91200)资助的课题.

† E-mail: xuewei@tust.edu.cn

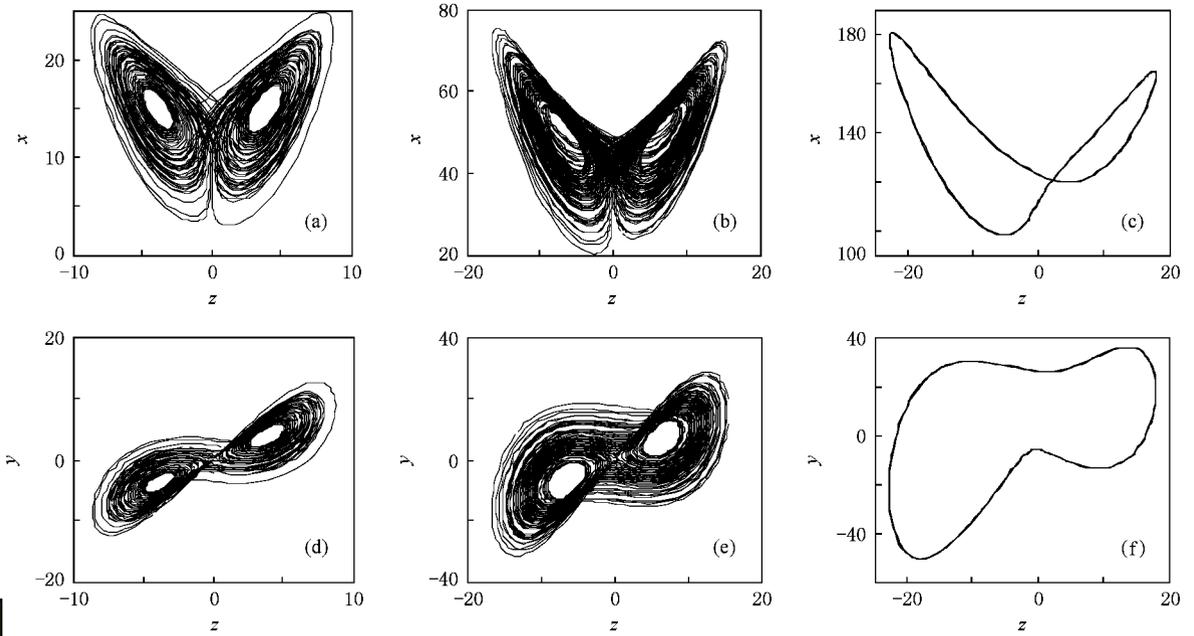


图1 系统(3)在  $\sigma=4$ ,  $\gamma$  分别为 16, 50, 140 时相图 (a)(b)(c) 为  $\gamma$  分别是 16, 50, 140 时的  $z-x$  二维相图 (d)(e)(f) 为  $\gamma$  分别是 16, 50, 140 时的  $z-y$  二维相图

### 3. 分形分析

为了更准确地认识永磁同步电机的动力学特性与参数  $\gamma$  的关系, 我们从分形图确定不同参数下的系统运动轨迹的形式. 系统(3)中, 若  $0 < \gamma < 1$ , 则系统有一个实数平衡点  $P_1(0, 0, 0)$ , 此时系统(3)在  $P_1$  处的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} dx/dx & dx/dy & dx/dz \\ dy/dx & dy/dy & dy/dz \\ dz/dx & dz/dy & dz/dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \gamma \\ 0 & \sigma & -\sigma \end{bmatrix}. \quad (4)$$

$J$  的特征方程为

$$(1 + \lambda)(\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma - \sigma\gamma) = 0. \quad (5)$$

从而得出 3 个特征值分别为

$$\lambda_1 = -1,$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} [ -(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(\gamma - 1)} ].$$

3 个特征根都满足  $\text{Re}(\lambda) < 0$ , 因此  $P_1$  为唯一稳定的平衡点.

若  $\gamma > 1$ , 则系统有 3 个实数平衡点, 分别为  $P_1(0, 0, 0)$ ,  $P_2(\gamma - 1, \sqrt{\gamma - 1}, \sqrt{\gamma - 1})$ ,  $P_3(\gamma - 1, -$

$$\sqrt{\gamma - 1}, -\sqrt{\gamma - 1}).$$

利用上述分析方法,  $P_1$  不再稳定, 分出两个新的平衡点  $P_2$  和  $P_3$ . 此时系统在  $P_2$  和  $P_3$  处的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} dx/dx & dx/dy & dx/dz \\ dy/dx & dy/dy & dy/dz \\ dz/dx & dz/dy & dz/dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \pm\sqrt{\gamma-1} & \pm\sqrt{\gamma-1} \\ \mp\sqrt{\gamma-1} & -1 & 1 \\ 0 & \sigma & -\sigma \end{bmatrix}. \quad (6)$$

其特征方程为

$$\lambda^3 + (\sigma + 2)\lambda^2 + (\gamma + \sigma)\lambda + 2\sigma(\gamma - 1) = 0. \quad (7)$$

对于任意实数  $\lambda > 0$ , 都有  $|\lambda I - J| > 0$ , 因此(7)式必有一对共轭复特征根. 对于临界状态, 复特征根为  $\lambda_{1,2} = \pm ib$ , 其中  $b$  为实数, 则

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= -(\sigma + 2) - (\lambda_1 + \lambda_2) \\ &= -(\sigma + 2). \end{aligned}$$

把  $\lambda_3$  代入(7)式得

$$-(\sigma + 2)^3 + (\sigma + 2)^2 - (\gamma + \sigma)(\sigma + 2) + 2\sigma(\gamma - 1) = 0. \quad (8)$$

求解得

$$\gamma = \frac{\sigma^2 + 4\sigma}{\sigma - 2}.$$

当  $\gamma > 1$  时系统出现 Hopf 分叉. 图 2 是状态变量  $y$  关于系统参数  $\gamma$  的分叉图, 其中  $\sigma = 4, \gamma \in (0, 20]$ . 从图 2 可以看出, 在  $0 < \gamma < 1$  的范围内, 只有一个平

衡点  $P_1$ ; 当  $\gamma = 1$  分出两个平衡点  $P_2$  和  $P_3$ , 系统是否稳定到  $P_2$  或  $P_3$  由初值决定; 当  $\gamma \geq 16$  时, 系统出现混沌.

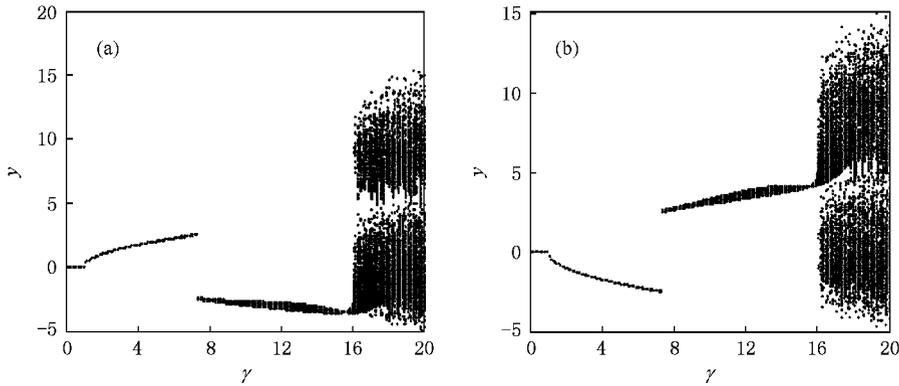


图 2 分叉图 (a)初值为(0.01, 0.01, 0.01)(b)初值为(0.01, -0.01, -0.01)

图 3 是  $\sigma = 4$  以  $\gamma$  为变量参数的 Lyapunov 指数谱图,  $LE_1, LE_2, LE_3$  分别表示第一、第二、第三 Lyapunov 指数. 从图 3 可以看出  $\gamma = 16$  时系统出现混沌;  $\gamma = 94$  时系统回到规则运动, 随后又进入混沌运动;  $\gamma = 131$  时系统由混沌运动变为规则运动. 分叉图和 Lyapunov 指数证实了永磁同步电机具有丰富的非线性动力学行为. 表 1 是不同  $\gamma$  下的 Lyapunov 指数.

表 1 不同  $\gamma$  对应的 Lyapunov 指数

$\gamma$	$LE_1$	$LE_2$	$LE_3$
16	0.32	-0.01	-6.31
50	0.72	-0.00	-6.72
94	0	-0.78	-5.23
140	0	-0.26	-5.78

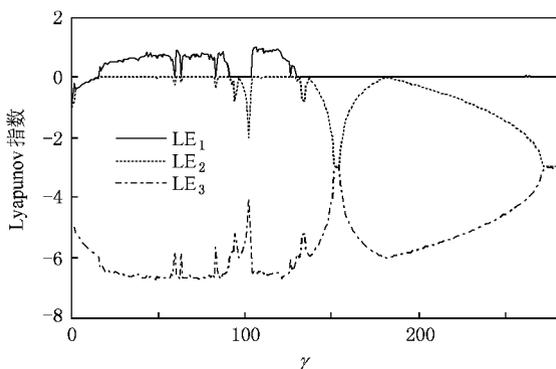


图 3 在不同  $\gamma$  下系统的 Lyapunov 指数谱

### 4. 系统的电路设计

混沌系统简单而又直接的物理实现是通过电路来完成的, 许多混沌系统的动力学特性也都通过电路得到了验证<sup>[19-23]</sup>. 由于混沌系统微分方程的解空间范围比较大, 因此不能对其直接电路实现. 需要在原微分方程(2)的基础上对其进行变换. 此处的电路实现仅考虑  $\tilde{u}_d = \tilde{u}_q = \tilde{T}_L = 0$  的情形.

令新的状态变量为原状态变量的 1/10, 调整后得到的新系统方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 10zy, \\ \dot{y} &= -y - 10zx + \gamma z, \\ \dot{z} &= \alpha(y - z). \end{aligned} \tag{9}$$

调整后的系统(9)与原系统(3)等价, 并不改变系统的物理特性. 基于系统(9), 设计的电路如图 4 所示. 它包含 3 个通道, 分别表示系统(9)中的  $x, y, z$ . 其中的放大器 LF347 实现加减法和积分运算, 系统中的非线性部分由模拟乘法器 AD633 实现, 并不改变原系统的非线性特性. 图 4 给出的  $R_7$  和  $R_{10}$  的值是  $\gamma = 20$  的情况. 当  $\gamma$  不同时,  $R_7$  和  $R_{10}$  对应关系见表 2.

按图 4 中所标识的元器件参数值, 经过化简的电路动态方程为

$$\begin{aligned} R_4 C_1 \dot{x} &= -x + 10zy, \\ R_8 C_2 \dot{y} &= -y - 10zx + \gamma z, \\ R_{15} C_3 \dot{z} &= \alpha(y - z). \end{aligned} \tag{10}$$

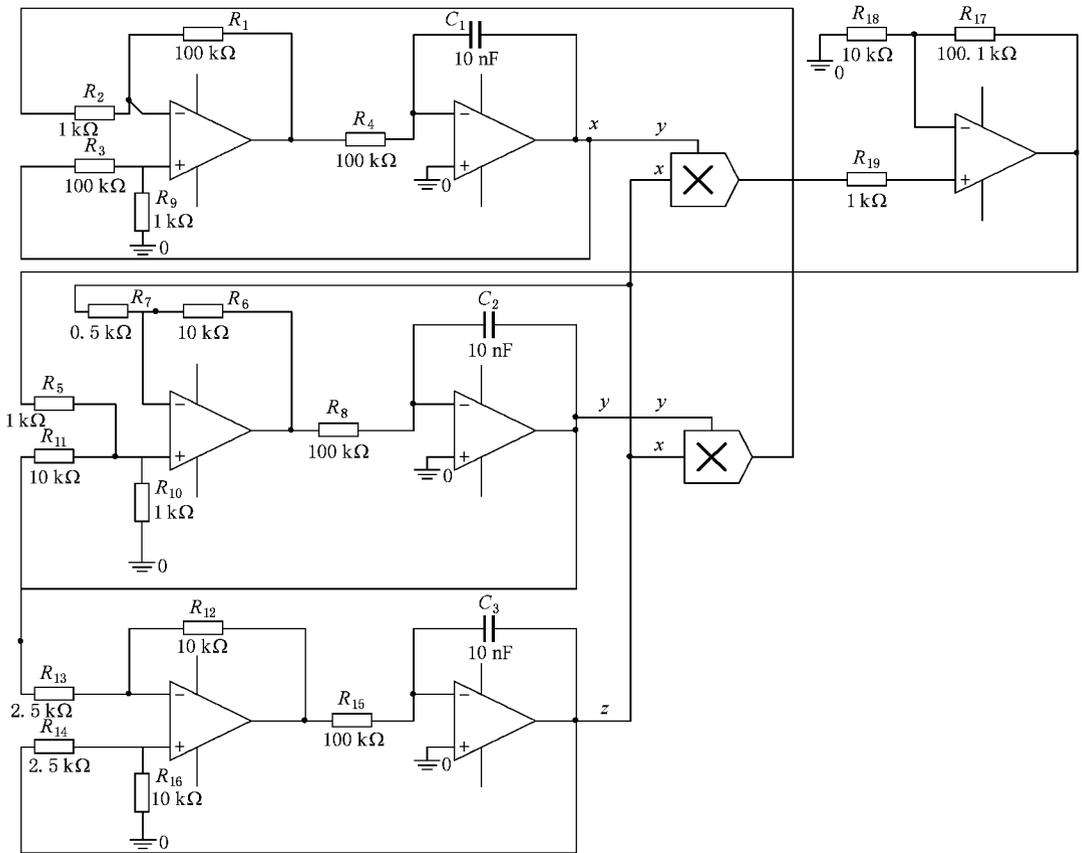


图4 永磁同步电机系统(9)的电路实现 所有的工作电压均为 $\pm 15\text{ V}$ , LF347是运算放大器, AD633是模拟乘法器

表2 不同 $\gamma$ 对应的 $R_7$ 和 $R_{10}$ 电阻值

$\gamma$	$R_7/\text{k}\Omega$	$R_{10}/\text{k}\Omega$
16	0.625	1.67
50	0.2	0.25
140	0.07	0.08

若取 $R_4 C_1 = R_8 C_2 = R_{15} C_3 = RC = 1$ , 系统(10)和系统(9)完全等价. 但是由于实际的测量信号频率相当低, 只有几赫兹, 用普通的模拟示波器很难捕捉到波形, 于是需要调整 $RC$ 的值使得普通的模拟示波器可以捕捉到信号. 调整 $RC = 10^{-3}$ , 选择 $R = 100\text{ k}\Omega$ , 则 $C = 10\text{ nF}$ . 这相当于将电路输出信号的频率提高到原来的1000倍. 实验结果表明, 在这样的充放电系数下, 能够得到理想的输出波形. 这样的调整并不改变系统的相平面图, 只是改变了状态变量的变化率, 得到的系统仍然和原系统是相似的.

模拟电路的初始状态很难进行人为控制. 同时,

混沌系统对初始条件的敏感性和实验过程中容易受到随机噪声的干扰, 这会使实验结果和仿真分析存在误差. 实验过程中采用的示波器为YB4325. 示波器所显示的结果如图5所示. 比较图1和图5可知, 系统(3)中出现的混沌在电路中很好地得到了验证.

## 5. 结 论

通过对永磁同步电机系统的数字仿真和电路实现实验, 得到了数字仿真结果和电路实验结果. 观察到永磁同步电机具有丰富的非线性特性. 在一定的参数范围内, 系统会出现复杂的非线性运动——混沌或极限环, 这会使电机转速和转矩剧烈振荡, 控制性能不稳定, 系统出现不规则的电磁噪声等, 影响了电机的正常工作. 同时, 对永磁同步电机的非线性研究也为将来的永磁同步电机的运动控制找准了方向和目标. 其模型的电路实现也为实际应用中电机进行调节提供了一种参考方法.

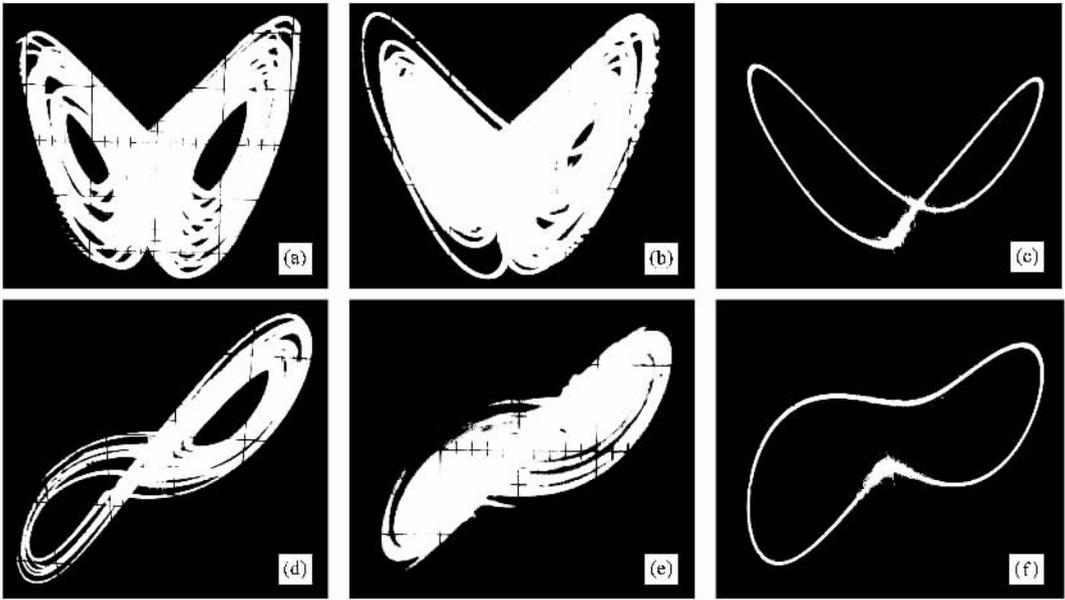


图 5 用模拟示波器 YB4325 观测到的相图 (a)(b)(c)分别为  $\gamma = 16, 20, 140$   $z-x$  的相图 (d)(e)(f)为  $\gamma = 16, 20, 140$  时  $z-y$  相图

- [ 1 ] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [ 2 ] Qi G Y, van Wyk M A, van Wyk B J 2008 *Phys. Lett. A* **372** 124
- [ 3 ] Qi G Y, Chen G R, Zhang Y H 2008 *Chaos Solitons Fract.* **37** 409
- [ 4 ] Zhou Q, Chen Z Q, Yuan Z Z 2008 *Kybernetika* **44** 469
- [ 5 ] Wu W J, Chen Z Q, Yuan Z Z 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2420
- [ 6 ] Sun Y X, Wang Z H, Chen Z Q, Qi G Y 2008 *J. Sys. Sim.* **20** 5920 (in Chinese) [ 孙艳霞、王增会、陈增强、齐国元 2008 系统仿真学报 **20** 5920 ]
- [ 7 ] Wang F Z, Qi G Y, Chen Z Q, Yuan Z Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3137 (in Chinese) [ 王繁珍、齐国元、陈增强、袁著祉 2007 物理学报 **56** 3137 ]
- [ 8 ] Qi G Y, Chen G R, Li S W, Zhang Y H 2006 *Int. J. Bif. Chaos* **16** 859
- [ 9 ] Li W L, Song Y Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 51 (in Chinese) [ 李文林、宋运忠 2008 物理学报 **57** 51 ]
- [ 10 ] Zhou Q, Li L, Chen Z Q, Zhao J X 2008 *Chin. Phys.* **17** 3609
- [ 11 ] Liu F, Chen X L, Mu Z L, Qiu Z L 2000 *Acta Electron. Sin.* **28** 73 (in Chinese) [ 刘 峰、陈小利、穆肇骊、邱祖廉 2000 电子学报 **28** 73 ]
- [ 12 ] Kuang J Y, Deng K, Huang R H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1856 (in Chinese) [ 匡锦瑜、邓 昆、黄荣怀 2001 物理学报 **50** 1856 ]
- [ 13 ] Kong Q Y, An Y J, Sun C Z, Cao J W 2007 *Techniq. Auto. Appl.* **27** 8 (in Chinese) [ 孔庆媛、安跃军、孙昌志、曹继伟 2007 自动化技术与应用 **27** 8 ]
- [ 14 ] Li Z, Zhang B, Shan F, Mao Z Y, Pang M X 2000 *J. Jinan Univ. (Nat. Sci. Med. Ed.)* **21** 64 (in Chinese) [ 李 忠、张 波、单 方、毛宗源、庞敏熙 2000 暨南大学学报(自然科学与医学版) **21** 64 ]
- [ 15 ] Song Y Z, Zhao G Z, Qi D L 2006 *Pro. CSU-EPSA* **18** 5 (in Chinese) [ 宋运忠、赵光宙、齐冬莲 2006 电力系统及其自动化学报 **18** 5 ]
- [ 16 ] Zhang B, Li Z, Mao Z Y, Pang M X 2001 *Contr. Theor. Appl.* **18** 796 (in Chinese) [ 张 波、李 忠、毛宗源、庞敏熙 2001 控制理论与应用 **18** 796 ]
- [ 17 ] Zhang B, Li Z, Mao Z Y, Hou X M, Pang M X 2001 *Contr. Theor. Appl.* **18** 589 (in Chinese) [ 张 波、李 忠、毛宗源、侯小梅、庞敏熙 2001 控制理论与应用 **18** 589 ]
- [ 18 ] Zhang B, Li Z, Mao Z Y 2002 *Contr. Theor. Appl.* **19** 841 (in Chinese) [ 张 波、李 忠、毛宗源 2002 控制理论与应用 **19** 841 ]
- [ 19 ] Cang S J, Chen Z Q, Yuan Z Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1493 (in Chinese) [ 仓诗建、陈增强、袁著祉 2008 物理学报 **57** 1493 ]
- [ 20 ] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3922 (in Chinese) [ 王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 3922 ]
- [ 21 ] Liu L, Su Y C, Liu C X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1966 (in Chinese) [ 刘 凌、苏燕辰、刘崇新 2007 物理学报 **56** 1966 ]
- [ 22 ] Liu L, Su Y C, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3933 (in Chinese) [ 刘 凌、苏燕辰、刘崇新 2006 物理学报 **55** 3933 ]
- [ 23 ] Chen X R, Liu C X, Wang F Q, Li Y X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1416 (in Chinese) [ 陈向荣、刘崇新、王发强、李永勋 2008 物理学报 **57** 1416 ]

# Analysis of chaos and circuit implementation of a permanent magnet synchronous motor<sup>\*</sup>

Xue Wei<sup>1)†</sup> Guo Yan-Ling<sup>1)</sup> Chen Zeng-Qiang<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> *Department of Automation, Tianjin University of Science and Technology, Tianjin 300222, China*

<sup>2)</sup> *Department of Automation, Nankai University, Tianjin 300071, China*

( Received 20 February 2009 ; revised manuscript received 18 March 2008 )

## Abstract

The permanent magnet synchronous motor, which is a nonlinear dynamic system, can exhibit a variety of chaotic or limit cycle phenomenon under some choices of system parameters and external inputs, and its chaotic characteristics are more prominent. Based on the mathematical model of a permanent magnet synchronous motor, its nonlinear characteristics are analysed with respect to the bifurcation diagram, Lyapunov exponent map and the nature of its equilibrium point in this paper, and the results in well demonstrated by numerical simulations. Finally, an analog electronic circuit is designed to implement the mathematical model of a permanent magnet synchronous motor, and the experimental results of the system well agreed with the simulation results.

**Keywords** : permanent magnet synchronous motor, chaos, fractal analysis, circuit implementation

**PACC** : 0545

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 10772135, 60774088 ), the Key Program of Science and Technology Research of Ministry of Education, China ( Grant No. 207005 ) and the Applied Basic Research Program of Tianjin, China ( Grant Nos. 07JCYBJC05800, 08JCZDJC91200 ).

<sup>†</sup> E-mail : xuewei@tust.edu.cn