

# 不均匀等离子体中电磁波与 Langmuir 波的相互作用\*

周 磊 唐昌建†

(四川大学物理科学与技术学院, 成都 610064)  
(2009 年 2 月 11 日收到, 2009 年 3 月 21 日收到修改稿)

通过理论与数值计算, 不均匀等离子体中 Langmuir 波与电磁波的相互作用及其线性模式转换规律得到了充分的展示. 导出了不均匀等离子体中的电磁色散关系, 研究了入射电磁波或 Langmuir 波在通过不均匀等离子体的过程中发生转换的物理过程, 以及波的传播矢量随空间坐标变化的关系, 并对电磁波与 Langmuir 波相互作用的机理进行了讨论. 研究结果对密度梯度所驱动的等离子体波产生电磁辐射的研究具有重要意义.

关键词: 电磁波, Langmuir 波, 不均匀等离子体, 线性模式转换

PACC: 4110H, 5240D

## 1. 引 言

电磁波转换为 Langmuir 波及其逆转换的线性转换在等离子体研究中是一个十分重要的基础性问题. 当电磁波入射到一个密度不均匀的等离子体中, 如果其传播方向与等离子体的密度梯度方向成一不为零的锐角, 则能通过线性模式转换产生 Langmuir 波<sup>[1-5]</sup>. 这个过程称为共振吸收<sup>[6]</sup>, 但其逆过程<sup>[7,8]</sup>却因为普遍认为 Langmuir 波是一种没有磁场参与的非 Maxwell 波而很少有人考虑. Ginzberg<sup>[1]</sup>在提及了电磁波-Langmuir 波的这个现象的重要性后, 并没有深入研究. Tidman<sup>[9]</sup>用 Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) 近似计算了逆转换的效率. 由于采用的是 WKB 近似, 在反射点之后波的变化没有能够加以研究.

Stenzel 等<sup>[10]</sup>用实验研究了存在密度梯度的等离子体中电磁波-Langmuir 波的线性转换, 没有报告逆过程的实验. 在实验室中难以解释对以相当于等离子体振荡频率产生的电磁辐射. 文献<sup>[11]</sup>试图解释在托卡马克中等离子体频率的强非热辐射是由 Langmuir 波-电磁波转换引起的. 借此机理, Langmuir 波转换为电磁波的研究对新一类等离子体电磁辐射源的形成具有重要的意义. 同时在电磁波转换为 Langmuir 波的过程中, 降低或抑制共振吸收能够尽可能减少超热电子的产生, 这对于提高激光约束聚

变的效率也具有重要的价值.

## 2. 非均匀等离子体中的波动方程

电磁波斜入射到密度梯度方向沿  $x$  轴正向的非均匀等离子体, 波矢的方向与  $x$  轴正向成  $\theta \neq 0$ , 且电场的极化方向位于入射平面内<sup>[12]</sup>, 于是

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{E} \cdot \nabla \epsilon}{\epsilon} = -\frac{E_x}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dx}, \quad (1)$$

其中  $\epsilon$  为等离子体介电常数. 显然, 这里的  $E_x \neq 0$ , 且  $d\epsilon/dx \neq 0$ , 所以  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 = e\Delta n/\epsilon_0 \neq 0$ ,  $\Delta n$  为电子密度对平衡值的偏离, 即在波的作用下出现电荷  $\rho$ . 这样, 入射到不均匀等离子体上的  $E_x \neq 0$  的波引起等离子体振荡, 通过热运动传递到邻近区域, 形成 Langmuir 波, 并随着向共振点  $\epsilon = 0$  的趋近而增大. 因而, 非均匀等离子体中的入射波不再是纯电磁波<sup>[1,5]</sup>. 为研究电磁波与 Langmuir 波的正逆转换, 在非磁化等离子体中有

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}, \quad (2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2b)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{\nabla P}{mn}, \quad (2c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = en_1/\epsilon_0. \quad (2d)$$

其中  $P$  为等离子体热压力,  $n$  为等离子体电子密度, 写为扰动密度  $n_1$  与平衡密度  $n_0$  之和. 方程组

\* 国家自然科学基金(批准号: 60871063)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: tchangjian@scu.edu.cn

(2)是 Maxwell 方程与电子流体的动力学方程联立,揭示了电磁波与 Langmuir 波相互作用的规律.通过合适的边界条件可以数值求解电磁波与 Langmuir 波的相互转换.

### 3. 数值计算

建立如下的模型来考虑电磁波与 Langmuir 波的相互作用过程.在  $x < 0$  区域为均匀等离子体,  $x > 0$  的区域为密度随  $x$  轴线性增加,即介电常数随  $x$  坐标线性减小的等离子体.考虑图 1 中  $x < 0$  的区域,电磁波与 Langmuir 波的色散关系<sup>[13]</sup>写为

$$k_{\perp}^2 = (\omega^2 - \omega_p^2) / c^2 - k_y^2, \quad (3)$$

$$k_{\parallel}^2 = (\omega^2 - \omega_p^2) / 3\beta c^2 - k_y^2, \quad (4)$$

其中,  $k_{\perp}$ ,  $k_{\parallel}$  分别为 Langmuir 波和电磁波波矢的  $x$  分量,  $k_y$  为  $y$  方向电磁波波矢的分量,  $c$  为光速,  $\beta = v_t^2 / c^2$ ,  $v_t$  为电子的热速度.在  $x > 0$  的区域,等离子体密度随  $x$  轴线性增加,等离子体介电常数  $\epsilon(x)$  只是  $x$  的函数,所以  $k_y$  为常数.对方程组(2)做变换,将电子流体的动力学方程(2c)与泊松方程(2d)代入到电场与磁场的旋度方程(2a)和(2b)中,可得

$$3\beta \frac{d^2 E_x}{dx^2} - (1 - 3\beta) \kappa k_y \frac{dE_x}{dx} + \left( \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} - k_y^2 \right) E_x = 3\beta \kappa \left( \frac{dE_x}{dx} + i k_y E_x \right) \quad (5)$$

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} - (1 - 3\beta) \kappa k_y \frac{dE_y}{dx} + \left( \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} - 3\beta k_y^2 \right) E_y = 0. \quad (6)$$

这与文献 2 的结果一致.(5)式中  $\kappa = \Delta n_0 / n_0$  表现不均匀背景密度的特点,  $n_0$  为等离子体密度.因为

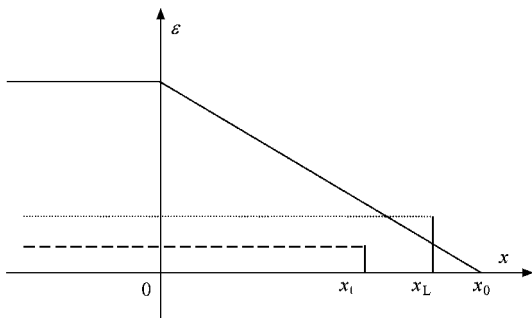


图 1 不均匀等离子体模型剖面.短划线代表电磁波,点线代表 Langmuir 波,  $x_1$  和  $x_L$  点分别代表电磁波与 Langmuir 波的反射点,  $x_0$  为临界密度点

在不十分靠近临界密度点的等离子体薄层中,色散关系(3)和(4)式依然成立,所以,在方程中令  $k_{\perp} = 0$  或  $k_{\parallel} = 0$  的点,就是电磁波或 Langmuir 波的反射点,且分别满足  $\omega_p^2 = \omega^2 - k_y^2 c^2$  和  $\omega_p^2 = \omega^2 - 3\beta k_y^2 c^2$ .现在考虑入射波为电磁波的情况,在左半空间( $x < 0$ ),入射电磁波的  $E_y$  分量可以写为

$$E_y = \exp(i k_{\parallel} x). \quad (7)$$

$E_x$  分量可以写为

$$E_x = (-k_y / k_{\parallel}) \exp(i k_{\parallel} x). \quad (8)$$

在  $x = 0$  点对方程(7)和(8)分别求导,且微分取弱变化形式

$$\frac{dE_y(0_+)}{dx} = i k_{\parallel}, \quad (9)$$

$$\frac{dE_x(0_+)}{dx} = -i k_y. \quad (10)$$

将边值条件分别代入方程(5)和(6),求出电磁波的电场散度和磁场随  $x$  坐标变化的数值解如图 2 所示.计算中对电场进行了如下归一化处理:

$$E'_y = E_y / E, E'_x = E_x / E, E' = E'_y + E'_x.$$

取  $k_y = 8.4250$ ,且  $x = 0$  时电子密度  $n = 2 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$ ,  $x = x_0 = 2 \text{ m}$  时为临界点,其电子密度  $n_c = 5 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$ .磁场  $\mathbf{B} = \mathbf{V} \times \mathbf{E} = \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z$  作相同的

归一化处理,即  $B' = \frac{\partial E'_y}{\partial x} - \frac{\partial E'_x}{\partial y}$ ,电子温度  $T_e = 3.9 \text{ eV}$ .由图 2(a)可以看出,电磁波在不均匀等离子体中传播的过程中,高频电场的散度在到达电磁波的反射点  $x_1$  (即满足  $\omega_p^2(x) = \omega^2 - k_y^2 c^2$  的点)之前很小,在反射点  $x_1$  之后有了明显的增长.根据  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 = e \Delta n / \epsilon_0$ ,说明电磁波入射到不均匀等离子体中一开始就有等离子体振荡伴随产生,在热等离子体中这种振荡不是孤立的,会形成等离子体波.由图 2(b)可以看出,电磁波在接近临界密度点的过程中高频磁场逐渐减小,说明电磁波在逐渐转换为 Langmuir 波.在反射点之后电磁波转换为 Langmuir 波的效率随着向临界密度点  $n_c$  靠近而增大.在电磁波入射不均匀等离子体时,  $y$  方向的波矢不变,但  $x$  方向的波矢  $k_{\parallel}$  也会随  $x$  坐标的增大而逐步减小,如图 3 所示.由图 3 可以看出,电磁波在到达反射点  $x_1$  之前  $k_{\parallel}$  的虚部为零,实部虽然不断减小但并不为零,表示电磁波能传播.在到达反射点之后  $k_{\parallel}$  的实部为零,但虚部急剧增加,表明电磁波衰减,不能传播.

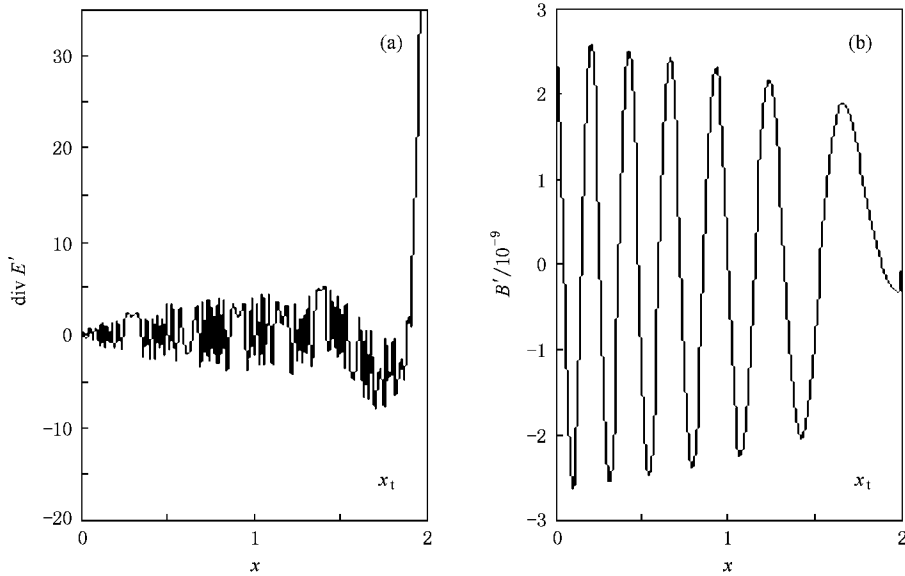


图2 入射电磁波高频电场的散度和磁场随  $x$  变化的关系 (a)高频电场的散度随  $x$  变化的关系 ,(b)高频磁场随  $x$  变化的关系

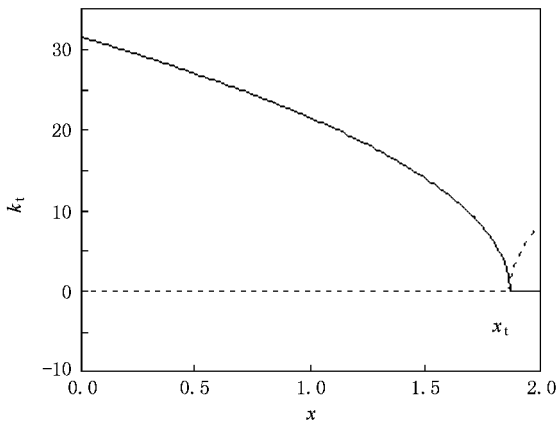


图3 斜入射电磁波  $x$  方向波矢  $k_x$  随  $x$  坐标的变化关系 实线为  $k_x$  的实部 ,虚线为  $k_x$  的虚部

考虑入射波为 Langmuir 波的情况 .在左半空间 ,Langmuir 波的电场分量  $E_y$  可以写为

$$E_y = \exp(ik_L x). \tag{11}$$

Langmuir 波的电场分量  $E_x$  可以写为

$$E_x = (k_L/k_y) \exp(ik_L x). \tag{12}$$

在  $x = 0$  点对方程 (11) 和 (12) 分别求导 ,微分取弱变化形式

$$\frac{dE_y(0_+)}{dx} = ik_L, \tag{13}$$

$$\frac{dE_x(0_+)}{dx} = ik_L^2/k_y. \tag{14}$$

将边值条件代入微分方程 (5) 和 (6) 求出电场的散度

和磁场随  $x$  坐标变化的数值解如图 4 所示 .电场与磁场进行了如同图 2 的归一化处理 .  $k_y = 8.4250$  ,  $x = 0$  时电子密度  $n = 2 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$  ,  $x = x_0$  时电子密度  $n_c = 5 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$  ,  $x = x_0 = 2 \text{ m}$  ,电子温度  $T_e = 3.9 \text{ eV}$  .由图 4 (a)可以看出 ,高频电场的散度逐步减小 ,并且反射点  $x_L$  较电磁波反射点  $x_t$  向后移动 .由方程  $\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0 = e\Delta n/\epsilon_0$  可知 ,Langmuir 波在接近临界密度点的过程中逐步衰减 .由图 4 (b)可以看出 ,入射到不均匀等离子体中后 ,Langmuir 波的电场产生了旋度有了电磁分量 ,不再是纯的静电波 .

在过了反射点  $x_L$  点之后磁场急速增大 ,表明电磁波快速增长 ,即 Langmuir 波转换为电磁波 .在 Langmuir 波入射不均匀等离子体时 ,  $y$  方向的波矢不变 ,但  $x$  方向的波矢  $k_L$  也会随  $x$  坐标的增大而逐步减小 ,如图 5 所示 .由图 5 可以看出 ,Langmuir 波在到达反射点  $x_L$  之前  $k_L$  的虚部为零 ,实部虽然不断减小但并不为零 ,表示 Langmuir 波能传播 .在到达反射点之后  $k_L$  的实部为零 ,但虚部急剧增加 ,表明 Langmuir 波衰减 ,不能传播 .另外 ,在其他条件保持不变的情况下 ,当改变等离子体电子温度时 ,高频磁场随  $x$  坐标变化的关系如图 6 所示 .由图 6 可以看出 ,在入射 Langmuir 波频率、等离子体密度标长以及入射角度不变的条件下 ,高温等离子体中 Langmuir 波向电磁波转换的变化过程更剧烈 .这说明温度升高后逆转换的效率更高 ( $v_1 \ll c$ ) .

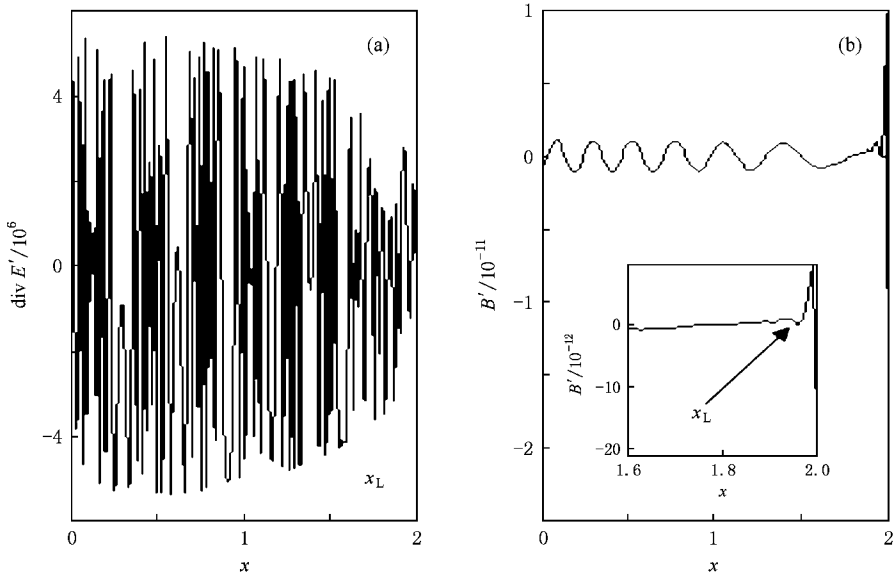


图 4 入射 Langmuir 波电场的散度和磁场随  $x$  坐标变化的关系 (a) 高频电场的散度, (b) 高频磁场

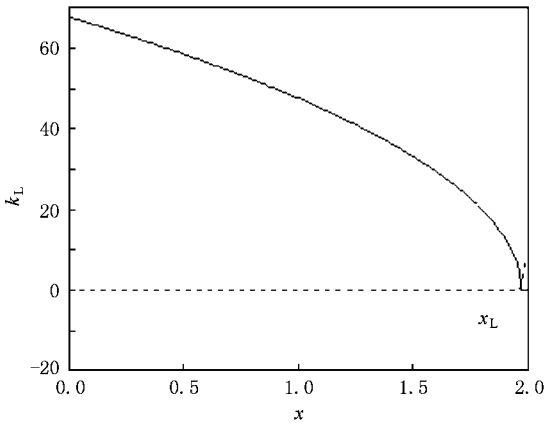


图 5 斜入射 Langmuir 波  $x$  方向波矢  $k_L$  随  $x$  坐标的变化关系  
实线为  $k_L$  的实部, 虚线为  $k_L$  的虚部. 电子温度  $T_e$  取  $3.9 \times 10^4$  eV

### 4. 等离子体产生电磁辐射

电磁波在不均匀等离子体中转换成 Langmuir 波的机制已有许多阐述<sup>[1-5]</sup>, 但却极少有人去研究逆转换<sup>[6,7]</sup>. Langmuir 波从均匀等离子体入射到不均匀等离子体的过程中满足  $k_y/k_x = E_y/E_x$ , 而 Langmuir 波在不均匀等离子体中的旋度为

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z \\ &= \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - ik_x E_x \right) \mathbf{a}_z \\ &= \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - ik_x E_y \right) \mathbf{a}_z \neq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

分析 (15) 式可以看出, Langmuir 波入射到不均匀等离子体后, 不能保持纯粹的静电性质, 会有电磁振荡伴随产生. 虽然在 Langmuir 波入射不均匀等离子体就能产生电磁振荡, 但是由于 Langmuir 波与电磁波在不均匀等离子体中的色散关系 (3) 和 (4) 式在反射点  $x_1$  或  $x_L$  之前不重合 (在 Langmuir 波的反射点  $\omega_p^2(x_L) = \omega^2 - 3\beta k_y^2 c^2$  之前均匀等离子体中的色散关系在不均匀等离子体中任意薄层中仍然成立, 所以电磁波与 Langmuir 波的色散关系不重合), 所以两种波不能耦合, 也就没有能量的交换. 另外, 色散关系重合也并不是模式转换发生的唯一条件. 由计算可以看出, 在反射点  $x_L$  之前, 电磁振荡没有增强, 在反射点之后电磁振荡的幅度才有明显变化. 这是由于在 Langmuir 波的反射点  $x_L$  之前, Langmuir 波的波矢  $k_L$  为实数, 与电磁波没有能量的交换, 也就不能产生模式转换. 而在反射点之后, 沿  $x$  方向的 Langmuir 波波矢  $k_L$  为虚数, 如图 5 所示. 所以, 此时 Langmuir 波衰减并与电磁波产生能量交换. 在反射点之后, Langmuir 波在  $x$  方向快速衰减, 成为一个沿  $y$  方向传播的表面波. 从能量守恒的角度看, 考虑无碰撞等离子体, 在分界面  $x=0$  入射的能量等于出射的能量, 而存在角度入射的 Langmuir 波的反射率小于 1, 所以有一部分能量在临界密度点附近转换成了电磁波, 并将沿  $x$  轴负方向传播, 且随着向临界密度点  $n_c$  的趋近电磁波的振幅增大. 产生的电磁辐射沿  $x$  轴的负方向从不均匀等离子体的低密度区出射.

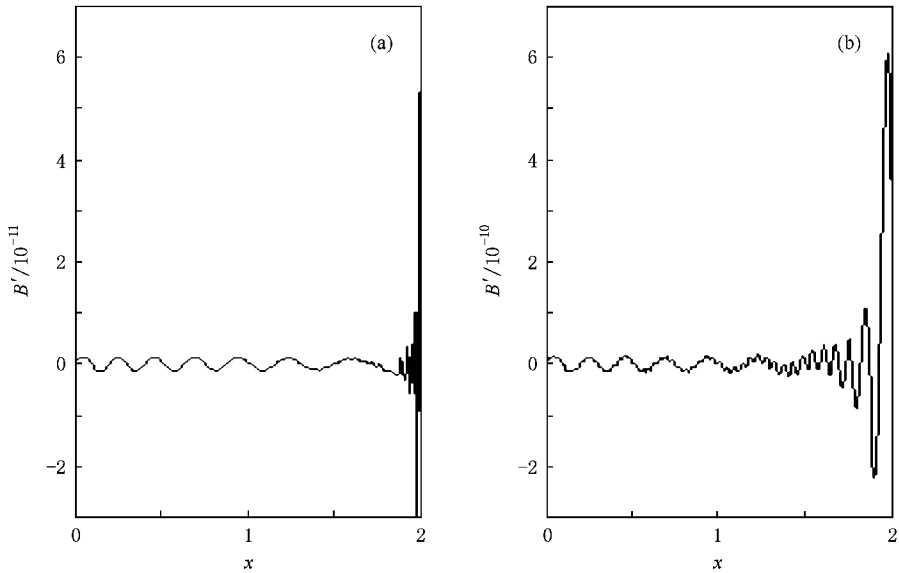


图 6 高频磁场在不同电子温度条件下随  $x$  坐标变化的关系 (a) 电子温度取 39 eV, (b) 电子温度取 3900 eV

## 5. 结 论

用数值计算与理论推导证明了电磁波与 Langmuir 波在不均匀等离子体中能够相互作用并发生模式的转换. Langmuir 波入射到不均匀等离子体时, 由于  $\nabla \times E \neq 0$ , 在波的作用下就产生了电与磁

的相互作用并形成电磁振荡, 振荡在反射点之后被放大, 并随着向共振点  $\epsilon = 0$  的趋近而增大. 反射电磁波沿  $x$  轴负方向传播并最终从不均匀等离子体的低密度区出射. 逆转换 (Langmuir 波-电磁波) 的效率不仅受入射波频率、等离子体密度标长以及入射角度影响, 也与等离子体电子温度有关. 在  $\nu_1 \ll c$  的条件下, 电子温度越高, 逆转换的效率越高.

- [ 1 ] Ginzberg V L 1970 *The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas* (2nd Ed) (New York : Pergamon)
- [ 2 ] Forslund D W, Kindel J M, Kennel C A, Lindman E L, Morse R L 1975 *Phys. Rev. A* **11** 679
- [ 3 ] Freidberg J P, Mitchell R W, Morse R L, Rudsinski L I 1972 *Phys. Rev. Lett.* **28** 795
- [ 4 ] Speziale T, Catto P J 1977 *Phys. Fluids* **20** 990
- [ 5 ] Kruer W L 1988 *The Physics of Laser Plasma Interactions* ( Boston : Addison-Wesley Publishing Company ) p39
- [ 6 ] Xu H, Sheng Z M, Zhang J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5354 ( in Chinese ) [ 徐 慧、盛政明、张 杰 2006 物理学报 **55** 5354 ]
- [ 7 ] Sheng Z M, Mima K, Zhang J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 095003
- [ 8 ] Means R W, Muschietti L 1981 *Phys. Fluids* **24** 2197
- [ 9 ] Tidman D A 1960 *Phys. Rev.* **117** 336
- [ 10 ] Stenzel R L, Wong A Y 1974 *Phys. Rev. Lett.* **32** 654
- [ 11 ] Fidone I, Ramponi G 1978 *Phys. Fluids* **21** 237
- [ 12 ] Sheng Z M, Zhang J, Yu W 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 125 ( in Chinese ) [ 盛政明、张 杰、余 玮 2003 物理学报 **52** 125 ]
- [ 13 ] Li D, Chen Y H 2006 *Physics of Plasmas* ( Beijing : Higher Education Press ) p90 ( in Chinese ) [ 李 定、陈银华 2006 等离子体物理学 ( 北京 : 高等教育出版社 ) 第 90 页 ]

# Interactions of electromagnetic wave and Langmuir wave in an inhomogeneous plasma<sup>\*</sup>

Zhou Lei Tang Chang-Jian<sup>†</sup>

( *College of Physical Science and Technology, Sichuan University, Chengdu 610064, China* )

( Received 11 February 2009 ; revised manuscript received 21 March 2009 )

## Abstract

The linear conversion and interactions of Langmuir and electromagnetic waves in an inhomogeneous plasma has been demonstrated by numerical and theoretical methods adequately. The dispersion relation of electromagnetic wave in an inhomogeneous plasma has been deduced. The physical processes of conversion of incident electromagnetic or Langmuir wave in an inhomogeneous plasma and the relationship of the spread vector with the coordinates have been researched, and the mechanism of interactions between the electromagnetic and Langmuir waves have been discussed. The results are of significance for the generation of electromagnetic radiation from density gradient-driven plasma.

**Keywords** : electromagnetic wave , Langmuir wave , inhomogeneous plasma , linear conversion

**PACC** : 4110H , 5240D

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grand No. 60871063 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : tchangjian@scu.edu.cn