第 58 卷 第 2 期 2009 年 2 月
1000-3290/2009/58(02)/0729-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.2,February,2009

二维周期光子晶格中的非线性 Landau-Zener 隧穿*

王 沙 杨志安†

(济南大学理学院,济南 250022)

(2008 年 5 月 12 日收到;2008 年 5 月 27 日收到修改稿)

在二维周期光子晶格中研究了 Kerr 型非线性 Landau-Zener 隧穿. 首先在六方晶系光子晶格中推导出非线性三能级 Landau-Zener 隧穿模型, 在特殊初值条件下将其转化为非线性二能级模型. 对于三能级隧穿模型, 选择特殊初值, 研究了隧穿率随参数的变化规律.

关键词:光子晶格,Kerr 型非线性,Landau-Zener 隧穿
PACC:0365,4265S,4250

1. 引　言

电磁波在带有周期势场的电介质中传播时的行为和粒子在晶格势中的行为十分相似.因此,许多粒子在光学晶格中的效应也可以通过检测光在光子晶体结构中的传播而观察到.这正是量子力学中波粒二象性这一基本概念的体现. 倾斜周期势中的 Landau-Zener(LZ)隧穿即是这样一个著名的现象,它既可以描述周期势场中的粒子在不同能带间的跃迁,又可以描述电磁波在光子晶格中不同能带间的跃迁. 最早的 LZ 隧穿是研究粒子在一维周期结构中的两个 Bloch 能带之间的非绝热隧穿, Zener[1], Landau[2], Majorana[3] 分别独立研究了这个模型. LZ 隧穿的研究已经应用于多种物理系统中,包括电子在半导体超晶格中的运动[4]、光子在多孔硅制成的光学超晶格中的传播[5]和冷原子在光学晶格中的运动[6,7].

非线性 Landau-Zener 隧穿最早由吴飙等[8]在 2000 年提出,刘杰等[9]对其做出了详细的解析研究. 由于许多系统中非线性效应对系统的影响不能忽略,甚至影响很大,越来越多的人们在不同系统中研究了不同情况下的非线性 LZ 隧穿[10—13],并由此引出大量相关的研究及其可能的应用[14—23].

最近的报道显示,已在实验上观察到光在二维光子晶格中的 LZ 隧穿[24],并在方晶格和六方晶格中研究了推广的 LZ 模型[25,26]. 该模型描述了 Brillouin 区高对称点上的跨能带的隧穿,并且用数值模拟分析了跨能带的隧穿率. 上述研究在理论分析时忽略了光折变晶体中的非线性效应,仅对线性情况做了分析.

本文在六方晶系光子晶格中推导了 Kerr 型的非线性三能级 LZ 隧穿模型,并将其在满足某种初值条件时简化为二能级非线性 LZ 模型. 对于三能级隧穿模型,取特殊初值,数值地研究了隧穿率的变化规律.

2. 六方晶系光子晶格中的非线性三能级 LZ 隧穿模型

在二维光子晶格中,归一化的电场振幅满足的演化方程为[26,27]

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)+\chi\Delta n(\boldsymbol{r})\psi, \quad (1)$$

其中 z 是光束传播方向的坐标,$\boldsymbol{r}=(x,y)$是无量纲的横向坐标. 对于 Kerr 型非线性介质,(1)式右边最后一项为

$$\chi\Delta n(\boldsymbol{r}) = V(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r}+g|\psi|^2, \quad (2)$$

其中矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 为指数梯度. (2)式代入(1)式中,得到近轴近似下描述场振幅的非线性方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)+[V(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r}]\psi+g|\psi|^2\psi. \quad (3)$$

* 国家自然科学基金(批准号:10725521,10604009)资助的课题.
† 通讯联系人.E-mail:ss_yangza@ujn.edu.cn

二维的六方晶系光子晶格是由 6 束位置相对的相干自然偏振宽光束照射在一块有偏压的光折变晶体上产生的，其中的周期势场 $V(\boldsymbol{r})$ 如图 1(a)所示，具有如下形式[26]：

$$V(\boldsymbol{r}) = 8V_0\cos^2\left(\frac{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{r}}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{r}}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{r}}{2}\right), \tag{4}$$

其中两个矢量 $\boldsymbol{b}_{1,2}$ 定义了晶格的对称性(见图 1(b))，且 $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1$，$|\boldsymbol{b}_j| = b \quad (j = 1,2,3)$.

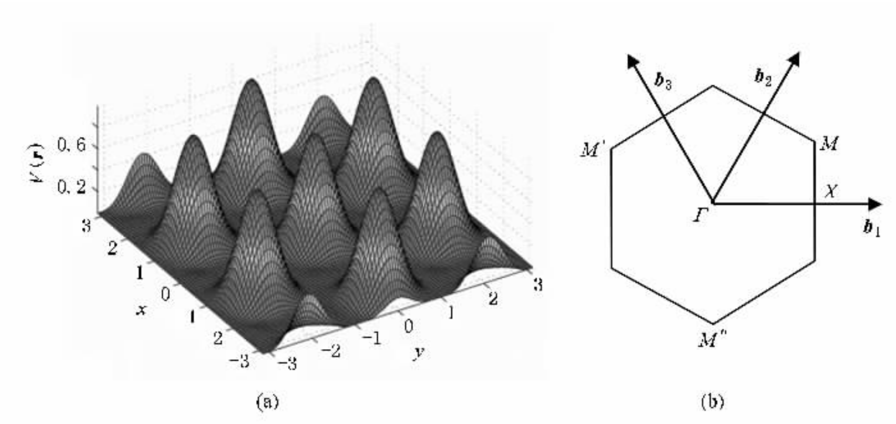

图 1 (4)式表示的晶格势(a)和第一 Brilouin 区(b)

对波函数和晶格势做傅里叶分析，波函数展开为 $\psi(\boldsymbol{r},z) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}C(\boldsymbol{k},z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\alpha}z)\boldsymbol{r}}$，晶格势展开为 $V(\boldsymbol{r}) = \sum_Q V_Q \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q\boldsymbol{r}}$. 并只保留满足 Bragg 共振条件的傅里叶分量，则波函数可写为 $\psi = C_1(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\boldsymbol{q}_M-\boldsymbol{\alpha}z]\boldsymbol{r}} + C_2(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\boldsymbol{q}_{M'}-\boldsymbol{\alpha}z]\boldsymbol{r}} + C_3(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\boldsymbol{q}_{M''}-\boldsymbol{\alpha}z]\boldsymbol{r}}$，势场可写为 $V = \frac{3V_0}{4}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\boldsymbol{q}_{M'}-\boldsymbol{q}_M]\boldsymbol{r}} + C_2(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\boldsymbol{q}_{M''}-\boldsymbol{q}_M]\boldsymbol{r}} + C_3(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\boldsymbol{q}_{M''}-\boldsymbol{q}_{M'}]\boldsymbol{r}}\right]$，其中 $\boldsymbol{q}_M$，$\boldsymbol{q}_{M'}$，$\boldsymbol{q}_{M''}$ 是第一 Brilouin 区连接 Γ 到 M，M'，M'' 的矢量. 把 ψ 和 V 的表达式代入(1)式，并做变换：$C_j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(z)}c_j\ (j = 1,2,3)$，$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}z = -(\boldsymbol{q}_M^2 + \boldsymbol{\alpha}^2z^2)/2$. 可得如下非线性三能级 LZ 系统：

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}z} &= -\boldsymbol{q}_M\boldsymbol{\alpha}zc_1 + \frac{3V_0}{4}(c_2 + c_3) - g|c_1|^2c_1,\\
\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}z} &= -\boldsymbol{q}_{M'}\boldsymbol{\alpha}zc_2 + \frac{3V_0}{4}(c_1 + c_3) - g|c_2|^2c_2,\\
\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}c_3}{\mathrm{d}z} &= -\boldsymbol{q}_{M''}\boldsymbol{\alpha}zc_3 + \frac{3V_0}{4}(c_1 + c_2) - g|c_3|^2c_3.
\end{aligned} \tag{5}$$

令 $\boldsymbol{q}_M\boldsymbol{\alpha} = \alpha$，$\boldsymbol{q}_{M'}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{q}_{M'}\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1$，$v_0 = 3V_0/4$，方程组(5)变为

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}z} &= -\alpha zc_1 + v_0(c_2 + c_3) - g|c_1|^2c_1,\\
\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}z} &= -\alpha_1 zc_2 + v_0(c_1 + c_3) - g|c_2|^2c_2,\\
\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}c_3}{\mathrm{d}z} &= -\alpha_1 zc_3 + v_0(c_1 + c_2) - g|c_3|^2c_3.
\end{aligned} \tag{6}$$

3. 简化的标准非线性二能级 LZ 模型

方程组(6)在特殊条件下可以简化为二能级的形式. 令 $\phi_1 = c_1$，$\phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_2 + c_3)$，$\phi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_2 - c_3)$，取 $\alpha_1 = -\alpha$，并令 $\gamma = \alpha z$，系统的哈密顿量变为

$$H(\gamma) = \begin{pmatrix}
-\gamma - g|\phi_1|^2 & \sqrt{2}v_0 & 0\\
\sqrt{2}v_0 & \gamma + v_0 - \frac{g}{2}(|\phi_2|^2 + 2|\phi_3|^2) & -\frac{g}{2}\phi_2^*\phi_3\\
0 & -\frac{g}{2}\phi_3^*\phi_2 & \gamma - v_0 - \frac{g}{2}(|\phi_3|^2 + 2|\phi_2|^2)
\end{pmatrix}. \tag{7}$$

观察(7)式可发现，若入射到晶格势中的探测光束场强满足初始条件 $\phi_3 = 0$，那么在传播过程中光束将一直保持 $\phi_3 = 0$ 不变. 因此，此时体系可等效为一个二能级非线性 LZ 系统，哈密顿量为

$$H(\gamma)=\begin{pmatrix}-\gamma-g|\phi_1|^2 & \sqrt{2}v_0\\ \sqrt{2}v_0 & \gamma+v_0-\frac{g}{2}|\phi_2|^2\end{pmatrix}.\tag{8}$$

将哈密顿量(8) 对角化，可得到此二能级系统的绝热能级 $\varepsilon(\gamma)$(见图 2). 研究发现，当非线性参数较小时，系统的能级相对于线性情况没有拓扑上的改变，如图 2(a)，(b)所示；当非线性参数较大时，系统的能级结构会有质的变化，一个环状结构出现在低能级上，如图 2(c)所示. 环状结构造成了系统在绝热极限下的奇特行为. 为进一步研究非线性参数对于隧穿的影响，考虑把系统转化成文献[9]中的标准非线性二能级 LZ 模型.

哈密顿量(8)满足的演化方程为

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}z}=(-\gamma-g|\phi_1|^2)\phi_1+\sqrt{2}v_0\phi_2,$$

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}z}=\sqrt{2}v_0\phi_1+\left(\gamma+v_0-\frac{g}{2}|\phi_2|^2\right)\phi_2.$$

作变换 $\phi_j=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(z)}\phi'_j\,(j=1,2)$. 令 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}=\frac{g}{4}|\phi_1|^2+\frac{g}{16}$，并考虑到 $|\phi_1|^2+|\phi_2|^2=1$. 此时系统的哈密顿量变为

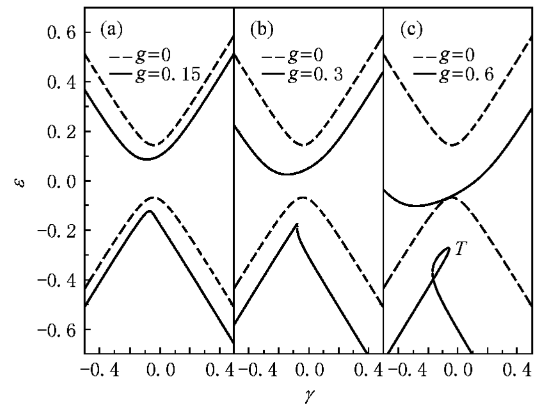

图 2　系统的绝热能级图　虚线表示线性情况下系统的绝热能级，v_0 取值为 0.075

$$H(\gamma)=\begin{pmatrix}-\left(\gamma+\frac{v_0}{2}+\frac{g}{8}\right)+\frac{3g}{8}(|\phi_2|^2-|\phi_1|^2)+\frac{v_0}{2}-\frac{3g}{16} & \sqrt{2}v_0\\ \sqrt{2}v_0 & \left(\gamma+\frac{v_0}{2}+\frac{g}{8}\right)-\frac{3g}{8}(|\phi_2|^2-|\phi_1|^2)+\frac{v_0}{2}-\frac{3g}{16}\end{pmatrix}.$$

再次作变换 $\phi'_j=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(z)}\phi''_j\quad(j=1,2)$. 令 $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}=-\frac{v_0}{2}+\frac{3g}{16}$，得

$$H(\gamma)=\begin{pmatrix}-\left(\gamma+\frac{v_0}{2}+\frac{g}{8}\right)+\frac{3g}{8}(|\phi_2|^2-|\phi_1|^2) & \sqrt{2}v_0\\ \sqrt{2}v_0 & \left(\gamma+\frac{v_0}{2}+\frac{g}{8}\right)-\frac{3g}{8}(|\phi_2|^2-|\phi_1|^2)\end{pmatrix}.$$

令 $-\left(\gamma+\frac{v_0}{2}+\frac{g}{8}\right)=\frac{\gamma'}{2}$，$g'=\frac{3}{4}g$，$v'=2\sqrt{2}v_0$，我们可以得到

$$H(\gamma)=\begin{pmatrix}\frac{\gamma'}{2}+\frac{g'}{2}(|\phi_2|^2-|\phi_1|^2) & v'\\ v' & -\frac{\gamma'}{2}-\frac{g'}{2}(|\phi_2|^2-|\phi_1|^2)\end{pmatrix},$$

系统化为一个标准的非线性二能级 LZ 模型[9]. 当 $\alpha'\to0$ 时($\alpha'=\gamma'/z$)，对应于绝热过程，在线性情况下，绝热隧穿率应为 0. 分析绝热能级图发现，系统存在一个临界点 $g'/v'=1$(即 $g/v_0=8\sqrt{2}/3$). 在临界点前后，绝热能级图的拓扑结构有所改变. 当 $g'/v'<1$ 时，系统能量有两个本征值；当 $g'/v'>1$ 时，系统能量最多可以有四个本征值，此时，能级结构图出现了环状结构，见图 2(c). 这意味着，即使在绝热极限下，隧穿率也不为 0. 即当量子态从低能级开始演化至 T 点处，只能向高能级或低能级跃迁. 此种模型下非线性 LZ 隧穿的解析隧穿率及详细分析见文献[9].

4. 三能级模型特殊初始条件下的隧穿率

当系统初值不满足 $\phi_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(c_2-c_3)=0$ 的时候，系统不能简化为二能级模型，需数值求解隧穿率.

我们只研究满足特定初值条件下的隧穿率. 选初值为 $z\to-\infty$ 时，$(c_1,c_2,c_3)\to\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)$，定

义隧穿率为 $z\to\infty$ 时的 $P=|c_1|^2$.初相位差 φ 从 0 到 2π 变化的过程中，隧穿率的变化如图 3 所示.而隧穿率 P 作为 g,φ 的函数,满足如下规律：

$$P(g,\varphi)=(1-|\phi_3(\gamma\to\infty)|^2)P(g,\varphi=0),$$

其中 $\phi_3(\gamma\to\infty)=\frac{1}{\sqrt{2}}(c_2-c_3)|_{\gamma\to\infty}$.

通过数值计算隧穿率 $P(g,\varphi)$ 及 $(1-|\phi_3(\gamma\to\infty)|^2)P(g,\varphi=0)$ 的值，发现二者图线基本吻合(如图 3 所示)，满足上述规律. 当初相位差 $\varphi=0$ 或 2π 时，系统有最大的隧穿率；当 $\varphi=\pi$ 时，隧穿率为 0. 非线性参数 g 的作用是对隧穿率有一个周期性的扰动，且 g 的绝对值越大，扰动越强烈.

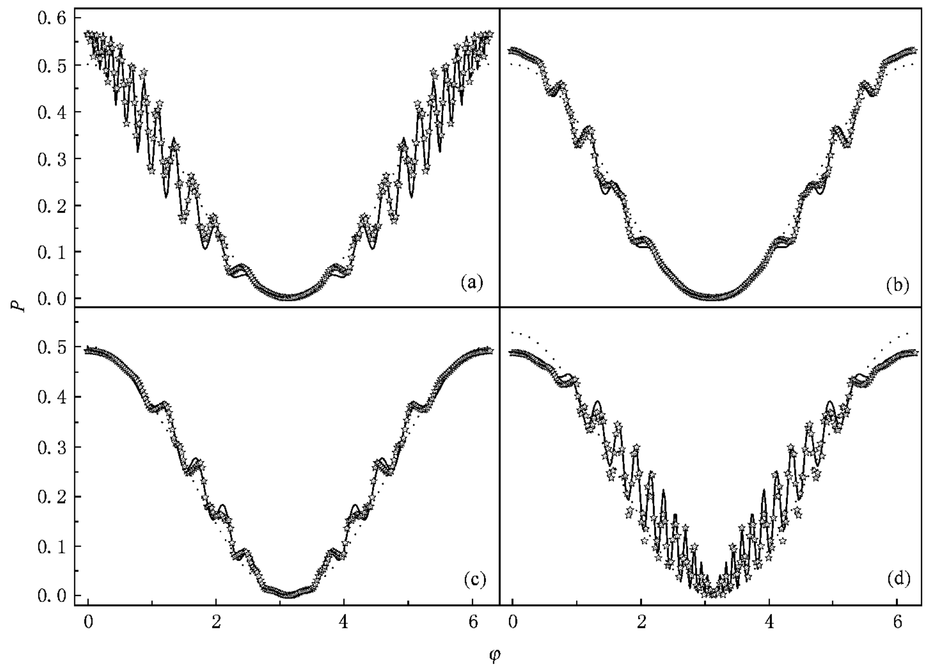

图 3 隧穿率随初相位差 φ 的变化图 实线为隧穿率 P,星形线为 $(1-|\phi_3(\gamma\to\infty)|^2)P(g,\varphi=0)$ 的图线,点线为 $g=0$ 时的隧穿率,α 取值为 0.05 (a) $g/V_0=-2$,(b) $g/V_0=-1$,(c) $g/V_0=1$,(d) $g/V_0=2$

5. 讨 论

本文在六方晶系二维光子晶格中推导了 Kerr 型非线性的三能级 LZ 模型，并在特殊初值条件下化为标准的二能级非线性 LZ 模型. 对于不满足转化条件时的三能级模型，求解隧穿率较为复杂. 本文仅选取初值为 $z\to-\infty$ 时 $(c_1,c_2,c_3)\to\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\varphi}\right)$ 的情况，数值研究了隧穿率随非线性参数 g 及初相位差 φ 的变化关系. Kerr 型非线性介质中的空间光孤子是准稳态孤子，不能在块状介质中稳定存在，因而实验上不易观察到. 光在饱和非线性介质(如屏蔽介质、光伏介质及半导体介质)中可以形成稳态孤子[28]，但因其非线性形式较为复杂，目前还没有相应的标准二能级 LZ 模型,因此有待于进一步的研究.

感谢北京应用物理与计算数学研究所傅立斌研究员的指导及叶地发同学和孟少英同学的有益讨论.

[1] Zener C 1932 *Proc. Soc. London* A **137** 696
[2] Landau L D 1932 *Phys. Z. Sowjetunion* **2** 46
[3] Majorana E 1932 *Nuovo Cimento* **9** 43
[4] Feldmann J, Leo K, Shah J, Miller D A B, Cunningham J E 1992 *Phys. Rev.* B **46** 7252
[5] Ghulinyan M, Oton C J, Gaburro Z, Pavesi L, Toninelli C, Wiersma D 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 127401
[6] Dahan M B, Peik E, Reichel J, Castin Y, Salomon C 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 4508
[7] Anderson B P, Kasevich M A 1998 *Science* **282** 1686
[8] Wu B, Niu Q 2000 *Phys. Rev.* A **61** 023402

[9] Liu J，Fu L B，Ou B Y，Chen S G，Choi D I，Wu B，Niu Q 2002 *Phys*. *Rev*. A **66** 023404
[10] Brazhnyi V A，Konotop V V，Kuzmiak V 2006 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **96** 150402
[11] Shchesnovich V S，Cavalcanti S B 2006 *J*. *Phys*. B **39** 1997
[12] Wang G F，Ye D F，Fu L B，Chen X Z，Liu J 2006 *Phys*. *Rev*. A **74** 033414
[13] Wang G F，Liu B，Fu L B，Zhao H 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 3733 (in Chinese)［王冠芳、刘　斌、傅立斌、赵　鸿 2007 物理学报 **56** 3733］
[14] Ye D F，Fu L B，Zhao H，Liu J 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 5071 (in Chinese)［叶地发、傅立斌、赵　鸿、刘　杰 2007 物理学报 **56** 5071］
[15] Wang G F，Fu L B，Zhao H，Liu J 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 5003 (in Chinese)［王冠芳、傅立斌、赵　鸿、刘　杰 2005 物理学报 **54** 5003］
[16] Ma Y，Fu L B，Yang Z A 2006 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **55** 5628 (in Chinese)［马　云、傅立斌、杨志安 2006 物理学报 **55** 5628］
[17] Liu Z Z，Yang Z A 2007 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **56** 1245 (in Chinese)［刘泽专、杨志安 2007 物理学报 **56** 1245］
[18] Fang Y C，Yang Z A，Yang L Y 2008 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **57** 661 (in Chinese)［房永翠、杨志安、杨丽云 2008 物理学报 **57** 661］
[19] Liu J，Wang W G，Zhang C W，Niu Q，Li B W 2005 *Phys*. *Rev*. A **72** 063623
[20] Liu J，Zhang C W，Raizen M G，Niu Q 2006 *Phys*. *Rev*. A **73** 013601
[21] Wu B，Liu J，Niu Q 2005 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **94** 140402
[22] Wang G F，Fu L B，Liu J 2006 *Phys*. *Rev*. A **73** 013619
[23] Wu B，Liu J 2006 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **96** 020405
[24] Trompeter H，Krolikowski W，Neshev D N，Desyatnikov A S，Sukhorukov A A，Kivshar Y S，Pertsch T，Peschel U，Lederer F 2006 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **96** 053903
[25] Shchesnovich V S，Cavalcanti S B，Hickmann J M，Kivshar Y S 2006 *Phys*. *Rev*. E **74** 056602
[26] Desyatnikov A S，Kivshar Y S，Shchesnovich V S，Cavalcanti S B，Hickmann J M 2007 *Opt*. *Lett*. **32** 325
[27] Shchesnovich V S，Cavalcanti S B，Hickmann J M，Kivshar Y S 2006 *Phys*. *Rev*. E **74** 056602
[28] Hou C F，Li S Q，Li B，Sun X D 2001 *Prog*. *Phys*. **21** 2 (in Chinese)［侯春风、李师群、李　斌、孙秀冬 2001 物理学进展 **21** 2］

Nonlinear Landau-Zener tunneling in two-dimensional photonic lattices*

Wang Sha　Yang Zhi-An†

(*School of Science*，*University of Jinan*，*Jinan*　250022，*China*)

(Received 12 May 2008；revised manuscript received 27 May 2008)

Abstract

Nonlinear Landau-Zener tunneling in two-dimensional photonic lattices of Kerr nonlinearity media is investigated. We first derive the nonlinear three-level Landau-Zener model in photonic lattices for the case of hexagonal symmetry，and then simplify this model to a nonlinear two-level Landau-Zener model under a certain initial condition. For the three-level tunneling model，we calculate the tunneling probability numerically and study its changing rules under the specific initial condition.

Keywords：photonic lattices，Kerr nonlinearity，Landau-Zener tunneling

PACC：0365，4265S，4250

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10725521，10604009).

† Corresponding author. E-mail：ss_yangza@ujn.edu.cn