第 58 卷 第 2 期 2009 年 2 月
1000-3290/2009/58(02)/0744-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.2,February,2009

Vaidya-Bonner 黑洞的费米子隧穿*

林 恺† 杨树政

(西华师范大学理论物理研究所,南充 637002)

(2008 年 5 月 27 日收到;2008 年 7 月 17 日收到修改稿)

运用费米子隧穿的理论,对 Vaidya-Bonner 黑洞的费米子 Hawking 辐射进行研究.使用随动坐标变换,并假设 γ^μ 矩阵的一个合理形式,从而得到了 Vaidya-Bonner 黑洞的自旋为 1/2 的粒子的隧穿辐射行为.

关键词:Vaidya-Bonner 黑洞, Dirac 方程, Hawking 辐射, 费米子隧穿
PACC:0470, 9760L

1.引 言

Hawking[1,2]于 1974 年对黑洞的研究表明黑洞可能辐射出热辐射,此即 Hawking 辐射.随后人们对各种黑洞的 Hawking 辐射进行了一系列有意义的研究[3—18].与此同时,由于黑洞的 Hawking 辐射的存在,也出现了一些新的疑难,其中最著名的一个疑难就是信息丢失疑难.但是,近年来,Robinson 和 Wilczek 等在考虑了 Hawking 辐射的变化背景时空和自引力相互作用及能量守恒之后的研究表明,就静态和稳态黑洞而言,黑洞的信息是守恒的.但是,这一方法对动态黑洞的研究表明,动态黑洞的信息守恒问题仍然是需要进一步讨论的前沿课题.Yang 和 Chen[17,18]提出了研究一般动态黑洞 Hawking 隧穿的方法,并对信息丢失的问题进行了一些初步的研究.就 Hawking 隧穿而言,费米子的隧穿具有一定的特殊性,然而,近来 Kerner 和 Mann[19,20]提出了一种研究自旋为 1/2 的费米子粒子的 Hawking 辐射的方法,这一方法在视界附近将作用量分解,接着应用 Dirac 方程求得一种解,在保留到 $\hbar$ 的零级近似时,考虑径向 Hawking 辐射,得到了入射和出射粒子的作用量的可能解,并由这两个可能解得到了 Dirac 粒子的隧穿率,进而可以确定 Dirac 粒子隧穿辐射相应的 Hawking 温度.虽然自旋为 1/2 的费米子可分为自旋向上和自旋向下两种情况,但是这两种情况下对费米子隧穿的研究方法和其结论是类似的.随后人们运用这一方法研究了各种四维和低维的黑洞[21—25].他们的研究仅仅限于静态和稳态黑洞的情形.但是,来自动态黑洞事件视界的费米子隧穿行为至今未被深入研究,其中一个重要的原因是动态黑洞的视界是变化的,用一般的线元形式无法适用 WKB 近似,并且在 Dirac 方程中对其 γ^μ 矩阵的选择有一定的困难.我们在本文中使用了随动坐标变换并科学地选择了 Dirac 方程中的 γ^μ 矩阵,使得这一问题得以解决,对于其他的动态黑洞的研究提出了一种可靠的研究方法.下面我们就具体对 Vaidya-Bonner 黑洞的费米子隧穿行为进行研究.

2. Dirac 方程和 γ^μ 矩阵

我们知道描述费米子动力学行为的 Dirac 方程可写为

$$\mathrm{i}\gamma^\mu \boldsymbol{D}_\mu \boldsymbol{\Psi} + \frac{m}{\hbar}\boldsymbol{\Psi} = 0, \tag{1}$$

其中,

$$\boldsymbol{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{\Gamma}_\mu^{\alpha\beta}\boldsymbol{\Pi}_{\alpha\beta} - \frac{\mathrm{i}q\boldsymbol{A}_\mu}{\hbar}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\Pi}_{\alpha\beta} = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]. \tag{3}$$

而各 γ^μ 矩阵之间需要满足

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2g^{\alpha\beta}\boldsymbol{I}, \tag{4}$$

其中 $g^{\alpha\beta}$是具体的时空逆变度规.在解 Dirac 方程(1)时,关键是要选择满足(4)式的 γ^μ 矩阵,在这里我们先列出四维 γ^μ 矩阵的四个基本元素

* 国家自然基金(批准号:10773008)资助的课题.

† E-mail:lk314159@126.com

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

对于一个动态球对称的黑洞度规，因为这样的度规中具体的有交叉项的只是 $\mathrm{d}v\mathrm{d}r$ 部分，因此由(4)式我们可以首先设出 γ^μ 矩阵中的与角度对应的项为

$$\gamma^\theta = \frac{\gamma^1}{r} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\gamma^\varphi &= \frac{\gamma^2}{r\sin\theta} \\ &= \frac{1}{r\sin\theta}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{10}$$

接着，考虑到 $\mathrm{d}v$ 和 $\mathrm{d}r$ 部分对应的 γ^μ 矩阵不应该再与 γ^1 和 γ^2 有关，我们可以设 γ^μ 矩阵中的与时间和径向对应的项的形式为

$$\gamma^v = Q\gamma^0 + P\gamma^3, \tag{11}$$

$$\gamma^r = G\gamma^0 + H\gamma^3. \tag{12}$$

于是根据(4)式，我们可以得到

$$Q^2 + P^2 = g^{vv}, \tag{13}$$

$$Q^2 + H^2 = g^{rr}, \tag{14}$$

$$QG + PH = g^{vr}. \tag{15}$$

另外，各参数选取的原则是，选取的参数要能回到平直或没有交叉项时的 γ^μ 矩阵形式. 所以一般而言，(13)式中的 $Q\neq 0$，(14)式中的 $H\neq 0$，在此前提下我们可以对 γ^μ 矩阵进行选择. 现在，我们看到这是一个四个未知数三个方程的方程组，所以还需要进一步假设其中一个参数的形式. 在以下的研究中，我们将说明这一点.

3. Vaidya-Bonner 黑洞的费米子隧穿

Vaidya-Bonner 黑洞的时空度规可写为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &- F(r,v)\mathrm{d}v^2 + 2\mathrm{d}r\mathrm{d}v \\ &+ r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2),\end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$F(r,v) = 1 - \frac{2M(v)}{r} + \frac{Q^2(v)}{r^2}. \tag{17}$$

这一黑洞由于荷电而产生的电磁四维势为

$$\boldsymbol{A}_\mu = (Q/r,0,0,0). \tag{18}$$

为了消除视界面运动带来的不便，我们做随动坐标变换，使得此黑洞无限红移面和视界相互重合[26]，令

$$R = r - r_0(v),$$

$$\mathrm{d}R = \mathrm{d}r - \dot{r}_0(v)\mathrm{d}v, \tag{19}$$

其中 r_0 是黑洞的视界. 进行这一变换后，黑洞的线元可写为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &- f(r,v)\mathrm{d}v^2 + 2\mathrm{d}R\mathrm{d}v \\ &+ r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2),\end{aligned} \tag{20}$$

其中

$$f(r,v) = 1 - 2\dot{r}_0 - \frac{2M(v)}{r} + \frac{Q^2(v)}{r^2}. \tag{21}$$

此黑洞的视界 r_0 所满足的方程 $f|_{r\to r_0} = 0$，即

$$1 - 2\dot{r}_0 - \frac{2M(v)}{r_0} + \frac{Q^2(v)}{r^2} = 0. \tag{22}$$

由(20)式可见，无限红移面方程与(22)式一致. 所以，随动坐标系中的 Vaidya-Bonner 黑洞的事件视界面和无限红移面重合. 现在我们需要先定出 γ^μ 矩阵的各分量. 由(13)—(15)式，我们有

$$Q^2 + P^2 = 0, \tag{23}$$

$$G^2 + H^2 = f, \tag{24}$$

$$QG + PH = 1. \tag{25}$$

这里为了得到一个合理的 γ^μ 矩阵，我们可以设 $G = 0$，对这个方程组进行求解，因此

$$\begin{aligned}\gamma^r &= \sqrt{f}\gamma^3 \\ &= \sqrt{f}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{26}$$

$$\gamma^t = \frac{\mathrm{i}\gamma^0 + \gamma^3}{\sqrt{f}} = \frac{1}{\sqrt{f}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

由于费米子所满足的 Dirac 方程的自旋向上和自旋向下的解分别为

$$\boldsymbol{\Psi}_\uparrow = \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ B \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}I_\uparrow}, \tag{28}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_\downarrow = \begin{bmatrix} 0 \\ C \\ 0 \\ D \end{bmatrix} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}I_\downarrow}. \tag{29}$$

再考虑到自旋向下的情形只是自旋向上情形的反演，这样我们只解自旋向上的情形的解就可以说明问题.把 γ^μ 矩阵的具体形式带入 Dirac 方程，并考虑把自旋向上的费米子的作用量分解为

$$I_\uparrow = W(r,v) + Y(\theta,\varphi), \tag{30}$$

其中$\frac{\partial W}{\partial v} = -\omega$，$\omega$ 是辐射费米子的能量.接着我们可以把(27)代入(1)式，在视界附近，精确到 $\hbar$ 的第零级，可得

$$Am\sqrt{f} = fBW' - (\mathrm{i}A + B)(\omega - qA_t) \tag{31}$$

$$-\frac{B}{r}\left(\partial_\theta I_\uparrow + \frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\partial_\varphi I_\uparrow\right) = 0, \tag{32}$$

$$Bm\sqrt{f} = fAW' - (A - \mathrm{i}B)(\omega - qA_t) \tag{33}$$

$$-\frac{A}{r}\left(\partial_\theta I_\uparrow + \frac{\mathrm{i}}{\sin\theta}\partial_\varphi I_\uparrow\right) = 0. \tag{34}$$

于是就可以得到半经典的费米子隧穿方程.考虑到辐射费米子的径向运动，当 $m = 0$ 时，方程(30)和(32)退偶，这样两个方程是等价的，于是我们得到在视界 $f(r_0) = 0$ 附近，有

$$W = \frac{(\mathrm{i}A + B)(\omega - qA_v)}{B}\int \frac{\mathrm{d}r}{f} = \frac{\mathrm{i}\pi(\mathrm{i}A + B)(\omega - qA_v)}{Bf'(r_0)}. \tag{35}$$

由于 A，B 的关系的有两个可能的解，对应着出射解和入射解

$$A = -\mathrm{i}B \Rightarrow W_+ = \frac{\mathrm{i}2\pi(\omega - qA_v)}{f'(r_0)}, \tag{36}$$

$$A = \mathrm{i}B \Rightarrow W_- = 0, \tag{37}$$

其中，W_+ 是出射解，而 W_- 是入射解，我们就可以得到总的作用量的虚部为

$$\mathrm{Im}(I_\uparrow) = \mathrm{Im}(W_+) - \mathrm{Im}(W_-) = \frac{\pi(\omega - qA_v)}{(M/r_0^2) - (Q^2/r_0^3)}. \tag{38}$$

如果 m 不为 0，方程(30)和(32)不再退偶，但是在视界附近有 $f|_{r\to r_0} = 0$，这一结果却是与退耦时的结果相一致.同时，自旋向下情形时的求解也是类似于自旋向上的情形，所得的自旋向下的粒子的总作用量的虚部也应该是(37)的形式.

4. 变化的背景时空与 Bekenstein-Hawking 熵变

在我们前面的讨论中，我们并没有考虑到粒子的自引力相互作用和黑洞变化的背景时空.但是，由于粒子隧穿，黑洞视界面必将随之变化.于是，我们设一个能量和电荷分别为 ω，q 的粒子以 s 波的形式隧穿出黑洞，黑洞的能量和电荷分别将变成 $M(v) - \omega$和 $Q(v) - q$，而视界由 r_0 变成 r_0'.以上这一过程实际上是瞬时完成的，所以我们可以认为这一过程中黑洞并未吸收和发出其他粒子.由于在视界附近自旋向上和自旋向下的各种质量的粒子的 Hawking 辐射都是相同的，所以(37)式所表示的总的作用量适用于任何自旋为 1/2 的 Dirac 粒子的 Hawking 辐射，这样在考虑到背景时空变化的性质后，各种自旋为 1/2 的 Dirac 粒子 Hawking 辐射的作用量的虚部可以写为

$$\mathrm{Im}(I) = \pi\int_{(0,0)}^{(\omega,q)} \frac{(\mathrm{d}\omega' - A_v'\mathrm{d}q')}{((M - \omega')/r_0'^2) - ((Q - q')^2/r_0'^3)} = -\pi\int_{(M,Q)}^{(M-\omega,Q-q)} \frac{\left(\mathrm{d}M' - \frac{Q'}{r_0'}\mathrm{d}Q'\right)}{(M'/r_0'^2) - (Q'^2/r_0'^3)}, \tag{39}$$

其中，$2\dot{r}'_0 = 2(M - \omega')r'^{-1} - 1$，$M' = M - \omega'$，$Q' = Q - q'$.这样 $\dot{r}_0$ 就成了 M，Q 和 r_0 的函数.另一方面，四维黑洞的熵与黑洞面积的关系成正比

$$S = \frac{A}{4}. \tag{40}$$

而 Vaidya-Bonner 黑洞的面积为

$$A = \int \mathrm{d}A = \int_{r=r_0}\sqrt{\begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = 4\pi r_0^2. \tag{41}$$

所以我们得到

$$\mathrm{d}S = 2\pi\left[\frac{\mathrm{d}M - \frac{Q}{r_0}\mathrm{d}Q + \frac{\partial \dot{r}_0}{\partial M}\mathrm{d}M + \frac{\partial \dot{r}_0}{\partial Q}\mathrm{d}Q}{(M/r_0^2) - (Q^2/r_0^3)}\right]. \tag{42}$$

比较(39)式和(42)式，我们得到

$$\mathrm{Im}(I) = -\frac{\Delta S}{2} + \pi\int_{(M(v),Q(v))}^{(M(v)-\omega,Q(v)-q)} \frac{\frac{\partial \dot{r}_0}{\partial M}\mathrm{d}M + \frac{\partial \dot{r}_0}{\partial Q}\mathrm{d}Q}{(M/r_0^2) - (Q^2/r_0^3)}, \tag{43}$$

其中，$\Delta S = S(M(v) - \omega, Q(v) - q) - S(M(v), Q(v))$，表示黑洞辐射粒子前后的 Bakenstein-Hawking 熵变．这样我们得到粒子的隧穿率为

$$\begin{aligned}\Gamma &\to \exp(-2\mathrm{Im}(I)) \\ &= \exp\left(\Delta S - 2\pi\int_{(M(v),Q(v))}^{(M(v)-\omega,Q(v)-q)} \frac{\frac{\partial \dot{r}_0}{\partial M}\mathrm{d}M + \frac{\partial \dot{r}_0}{\partial Q}\mathrm{d}Q}{(M/r_0^2) - (Q^2/r_0^3)}\right).\end{aligned} \tag{44}$$

我们的结论表明，Vaidya-Bonner 黑洞的隧穿率和熵变并不是一个简单的关系．一般而言，隧穿率不仅与 Bakenstein-Hawking 熵变有关，而且还与一个积分表达式有关．从这一结果来看，这里联系着与信息疑难有关的内容．有关的问题尚需要进一步的深入研究．

5．结　论

通过找到合适的 γ^{μ} 矩阵使得 Vaidya-Bonner 黑洞 Hawking 辐射的 Dirac 方程具体形式得以最终确定．文中假设了 $\gamma^r = \sqrt{g^{rr}}\gamma^3$ 的形式，从而确定了 γ^t 的具体形式．当然我们实际上也可以把 γ^r 的形式写为其他的线性组合 $G\gamma^0 + H\gamma^3$ 形式，这样可能会得到 γ^t 的另一些形式，使得我们的计算过程有所不同．但是，出于最简化的要求，我们选取 $G = 0$ 的形式使得我们研究的 Dirac 方程是最简单的．在动态情况之下建立起 Dirac 方程后，又做了一个随动坐标变换，这意味着观测者随着视界面的变化而变化．观测者在这一坐标系中将看到 Vaidya-Bonner 黑洞的视界面和无限红移面会重合在一起．所以，在这一变换下，我们可以在视界面附近使用 WKB 近似．文中所用的方法是我们用半经典理论对 Vaidya-Bonner 黑洞研究的关键，对于其他的动态黑洞可以用类似的方法进行研究．

[1] Hawking S W 1974 *Nature* **30** 248

[2] Hawking S W 1975 *Commun*. *Math*. *Phys*. **43** 199

[3] Robinson S P，Wilczek F 2005 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **95** 011303

[4] Jiang Q Q，Wu S Q，Cai X 2007 *Phys*. *Rev*. D **75** 064029

[5] Jiang Q Q，Wu S Q 2007 *Phys*. *Lett*. B **647** 200

[6] Zhu Y F，Yu H W 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1933 (in Chinese)[朱云峰、余洪伟 2002 物理学报 **51** 1933]

[7] Yang S Z，Chen D Y 2007 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **24** 1479

[8] Yang S Z 2004 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **53** 4007 (in Chinese)[杨树政 2004 物理学报 **53** 4007]

[9] Han Y W 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 0923

[10] Liu W B，Xiao K 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 3044

[11] Iso S，Umetsu H，Wilczek F 2006 *Phys*. *Rev*. D **74** 044017

[12] Iso S，Morita T，Umetsu H 2007 *J*. *High*. *Energy*. *Phys*. **04** 068

[13] Zhang J Y，Zhao Z 2006 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **55** 3796 (in Chinese)[张靖仪、赵　峥 2006 物理学报 **55** 3796]

[14] Zhang J Y，Zhao Z 2005 *Nucl*. *Phys*. B **725** 173

[15] Jing J L，Pan Q Y 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 268

[16] Yang S Z，Li H L，Jiang Q Q，Liu M Q 2007 *Sci*. *China* (*Ser*. G) **50** 249

[17] Yang S Z，Chen D Y 2008 *Chin*. *Phys*. B **17** 817

[18] Chen D Y，Yang S Z 2008 *New J*. *Phys*. **9** 252

[19] Kerner R，Mann R B 2008 *Class*. *Quantum*. *Grav*. **25** 095014

[20] Kerner R，Mann R B 2008 *Phys*. *Lett*. B **665** 277

[21] Li R，Ren J R，Wei S W 2008 arxiv：0803.1410VI [gr-qc]

[22] Li R，Ren J R 2008 *Phys*. *Lett*. B **661** 370

[23] Chen D Y，Jiang Q Q，Yang S Z，Zhu X T 2008 *Class*. *Quantum*. *Grav*. **25** 205022

[24] Chen D Y，Jiang Q Q，Zhu X T 2008 *Phys*. *Lett*. B **665** 106

[25] Zeng X X，Yang S Z 2008 *General Relativity and Gravity* **40** 2107 (DOI：10.1007/s10714-008- 0618-4)

[26] Ren J，Zhang J Y，Zhao Z 2006 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **23** 2019

Fermions tunneling of the Vaidya-Bonner black hole*

Lin Kai† Yang Shu-Zheng

(*Institute of Theoretical Physics, China West Normal University, Nanchong* 637002, *China*)

(Received 27 May 2008; revised manuscript received 17 July 2008)

Abstract

The Hawking radiation of the Vaidya-Bonner black hole is studied by the theory of fermions tunnelling. By applying the following coordinate transformation and assuming proper γ^{μ} matrixes, we study the tunneling characteristics of the fermions with 1/2 spin from the Vaidya-Bonner black hole.

Keywords: Vaidya-Bonner black hole, Dirac equation, Hawking radiation, fermions tunnelling

PACC: 0470, 9760L

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10773008).

† E-mail: lk314159@126.com