

# 耦合系统的混沌相位同步\*

刘 勇†

(盐城师范学院数学科学学院, 盐城 224051)

(2008 年 2 月 24 日收到, 2008 年 7 月 23 日收到修改稿)

通过引入混沌运动的相位定义分析了线性与非线性耦合参数对两个主共振子系统之间的混沌相位同步的影响. 讨论了在近似于主共振条件下, 两子系统不同步、不完全相位同步和完全相位同步之间的演化过程, 揭示了不同状态相互转化与 Lyapunov 指数变化之间的关系. 指出随着线性耦合力的增加, 相位同步效应增强, 然而随着非线性耦合力的增加, 相位同步效应减弱.

关键词: 相位同步, Rössler 振子, 耦合, Lyapunov 指数

PACC: 0545

## 1. 引 言

20 世纪 90 年代美国海军实验室的 Pecora 和 Carroll<sup>[1]</sup> 提出相同混沌子系统之间在不同的初始条件下, 通过某种驱动或耦合仍可以实现混沌轨道的同步化, 并且在电子线路实验中首次观察到了混沌同步现象. 之后对混沌同步的研究才蓬勃展开, 掀起新的高潮. 混沌同步的方法不断涌现, 其应用领域也从物理学迅速扩展到生物学、电子电气工程、保密通讯等领域<sup>[2-9]</sup>. 随着研究工作的不断深入, 混沌同步的概念也从完全同步拓展到弱耦合下的混沌相位同步<sup>[10, 11]</sup>. 混沌相位同步是指系统的运动是混沌的, 但参与弱耦合的子系统之间存在着相位同步特性. 由于混沌运动的相位不能直接从其时间历程上得到, 而描述混沌信号之间的相位同步首先要解决的问题是如何确定混沌信号的振幅和相位, 因此, 人们提出了一些方法从混沌信号的时间历程上计算混沌运动的相位<sup>[10]</sup>. 近年来, Pikovsky 等<sup>[12]</sup> 提出了基于 Poincaré 映射的计算混沌信号相位的方法, 其基本思想是, 当相轨迹每穿越 Poincaré 截面一次, 其相应的相位增加  $2\pi$ , 而在其他时间, 其相位则随时间的变化均匀分布, 用公式表示为

$$\phi(t) = 2\pi k + 2\pi(t - t_k)(t_{k+1} - t_k) \\ (t_k < t < t_{k+1}), \quad (1)$$

其中  $t_k$  和  $t_{k+1}$  分别表示第  $k$  次和第  $k+1$  次与 Poincaré 截面相交的时间. 这样经过长时间(通常至少达到无量纲  $10^8$  左右)的统计平均, 混沌运动的平均频率, 即混沌运动相位的平均增长率可表示为

$$\omega = \lim_{N \rightarrow \infty} 2\pi N / t(N), \quad (2)$$

其中  $t(N)$  表示相点第  $N$  次相交到 Poincaré 截面时所需要的时间. 如果  $|n\phi_1 - m\phi_2| < \text{const.}$ , 则产生  $n:m$  的混沌相位同步, 即两个子系统的平均频率比锁定在  $n:m$  附近.  $n:m$  的混沌相位同步也可以从扩散云图(与 Poincaré 截面相交的相点)来解释, 当扩散云图中的相点集中在相空间的较小(较大、几乎整个相空间)区域内时, 两个系统完全相位同步(不完全相位同步、不同步).

基于混沌运动的相位及相应的频率定义, 周期激励的混沌系统以及线性耦合混沌系统的相位同步现象得到了广泛研究<sup>[13-16]</sup>. 近年来, 我们也讨论了线性耦合下不同比率的混沌相位同步, 分析了耦合系统随参数的变化从完全相位同步到不完全相位同步, 最终到不同步的演化过程<sup>[17]</sup>, 揭示了其中涉及到的不同相位动力学行为. 虽然至今在混沌相位同步方面取得了大量成果, 但是这些结果大都是基于两混沌子系统之间的线性耦合, 而实际系统之间的耦合关系是复杂的. 本文探讨两 Rössler 系统在线性

\* 国家自然科学基金(批准号 20476041, 10602020)和江苏省教育厅自然科学基金(批准号 08KJD110018)资助的课题.

† E-mail: yongliumath@hotmail.com

尤其是在非线性耦合下的混沌相位同步,有

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega_1 y_1 - z_1 + \varepsilon_1(x_2 - x_1) \\ &\quad + \varepsilon_2(x_2^2 - x_1^2), \\ \dot{y}_1 &= \omega_1 x_1 + ay_1, \\ \dot{z}_1 &= f + z_1(x_1 - c), \\ \dot{x}_2 &= -\omega_2 y_2 - z_2 + \varepsilon_1(x_1 - x_2) \\ &\quad + \varepsilon_2(x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{y}_2 &= \omega_2 x_2 + ay_2, \\ \dot{z}_2 &= f + z_2(x_2 - c), \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $a = 0.15$ ,  $f = 0.2$ ,  $c = 10.0$  是为了保证参与耦合的两子系统产生混沌现象. 参数  $\omega_1, \omega_2$  分别表示两个 Rössler 系统的固有频率<sup>[18]</sup>,  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  表示耦合力. 如果  $\varepsilon_2 = 0$ , 耦合系统是线性耦合系统; 如果  $\varepsilon_1 = 0.0$  耦合系统是非线性耦合系统. 本文考虑两子系统在  $\omega_1 : \omega_2$  近似于 1:1 时两子系统之间的相位同步效应. 定义  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  分别表示两子系统状态变量的平均频率, 同时令

$$\Delta\omega = \Omega_1 - \Omega_2 \quad (4)$$

表示两子系统在 1:1 下的平均频率之间的差值. 显然, 当两子系统均处在混沌状态, 而且  $|\Delta\omega|$  非常小, 甚至趋于零时, 则产生混沌同步效应. 本文主要研究线性及非线性耦合力  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  如何影响耦合系统的相位同步行为. 结合 Lyapunov 指数揭示两子系统不同步、不完全相位同步和完全相位同步之间的相互演化过程. 耦合系统的 Lyapunov 指数的具体计算参见文献 [19]. 本文 Lyapunov 指数用  $\lambda$  表示.

## 2. 线性耦合振子相位同步

为了研究两个固有频率比  $\omega_1 : \omega_2$  接近 1:1 的混沌相位同步, 取  $\omega_1 = 1.0 + \sigma$ ,  $\omega_2 = 1.0$ , 其中  $\sigma$  是两个子系统固有频率的调谐参数, 以下计算我们取  $\sigma = 0.02$ . 两个 Rössler 系统的平均频率可根据(2)式直接计算, 即在单位时间内系统振动的数目. 两个子系统的平均频率差随着耦合力  $\varepsilon_1$  的变化如图 1 所示. 从图 1 可知随着耦合力  $\varepsilon_1$  的增加, 两个 Rössler 系统的平均频率差急剧下降到零, 说明耦合程度对混沌吸引子的结构有很大影响, 导致两个 Rössler 系统从不同步向完全同步转化.

为了研究相位同步的本质, 耦合的 Rössler 系统的四个较大的 Lyapunov 指数随着  $\varepsilon_1$  变化的曲线见

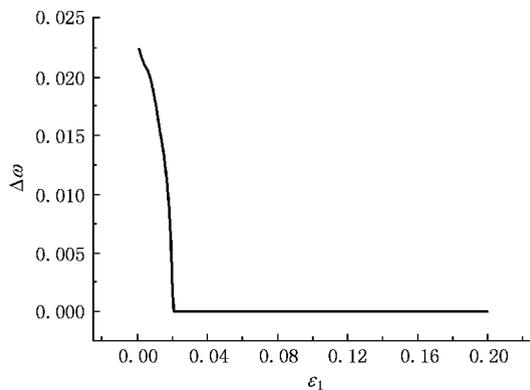


图 1 两个子系统平均频率差随  $\varepsilon_1$  的变化

图 2. 当耦合力  $\varepsilon_1$  较小时, 即  $\varepsilon_1 < 0.016$  耦合系统总有两个正的和两个零 Lyapunov 指数. 第二个零 Lyapunov 指数非常小, 对应于“拟周期”的相位动力学行为, 两者之间可以相互转化. 两个较大的 Lyapunov 指数在整个耦合区域里保持为正, 意味着耦合系统的振幅是混沌的和独立的, 且耦合系统处于超混沌状态. 进一步的研究表明当  $0.016 < \varepsilon_1 < 0.105$  时, 耦合的系统总有两个正的、一个零和一个负的 Lyapunov 指数, 除了一个小区域  $\varepsilon_1 \in [0.031, 0.035]$  外, 在这个区域里, 耦合系统的正 Lyapunov 指数接近于零. 当  $\varepsilon_1 > 0.105$  时, 耦合系统最初的两个正的 Lyapunov 指数中的一个变为负的, 说明耦合系统的运动从超混沌状态变化到一般混沌状态, 两个 Rössler 系统完全相位同步, 且随着耦合力  $\varepsilon_1$  的增加, 同步效应一直保持下去.

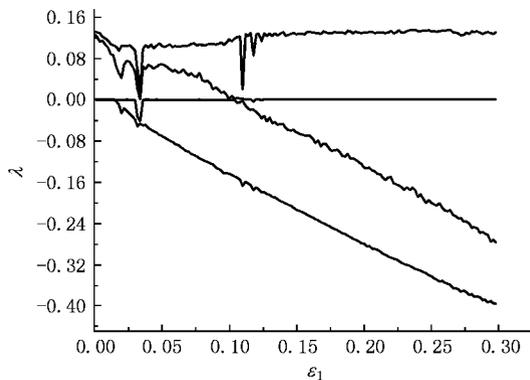


图 2 耦合系统 4 个较大的 Lyapunov 指数随  $\varepsilon_1$  的变化

这个现象也可以用扩散云来证实(见图 3). 当  $\varepsilon_1 < 0.016$  时, 两线性耦合的 Rössler 系统的相点分布在整个相空间中的一个确定的矩形区域里(见图

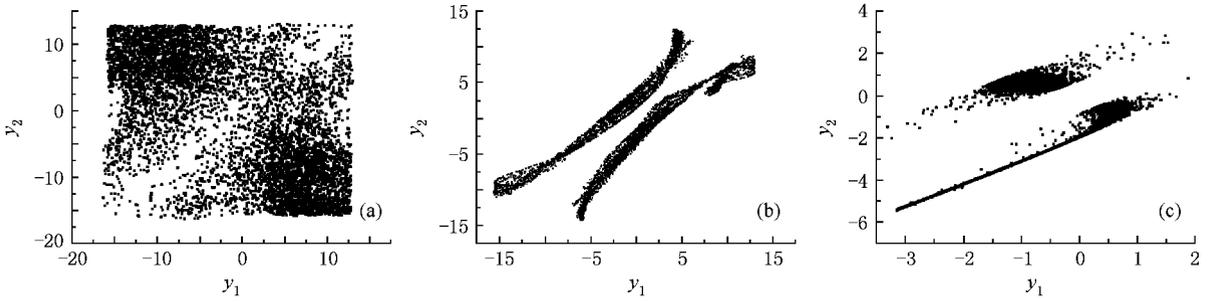


图 3 线性耦合系统的扩散云图 (a)不同步  $\epsilon_1 = 0.01$  (b)不完全相位同步  $\epsilon_1 = 0.08$  (c)完全相位同步  $\epsilon_1 = 0.14$

图 3(a))，说明随着时间的变化，两个 Rössler 振子的相位差趋于无穷，即两个系统是不同步的。随着耦合力  $\epsilon_1$  的增加，耦合系统的相点很快收缩到一个相对小的区域内(见图 3(b))，两个 Rössler 系统不完全相位同步。随着耦合力  $\epsilon_1$  的进一步增加，这两个小区域进一步收缩，耦合系统的相点分布在一些特殊的区域内，这个区域包含一条直线，对应于锁相动力学行为(见图 3(c))。即随着耦合力  $\epsilon_1$  的增加，相位同步得到加强。

### 3. 非线性耦合振子相位同步

非线性耦合系统的两个子系统的平均频率随耦合力  $\epsilon_2$  变化关系见图 4。从图 4 可以看出，当  $\epsilon_2 < 0.0155$  时，两个子系统的平均频率差逐步减少。当  $\epsilon_2 > 0.0155$  时，两个子系统的平均频率差突然增加，这说明调谐参数  $\sigma$  对混沌结构的影响非常大。

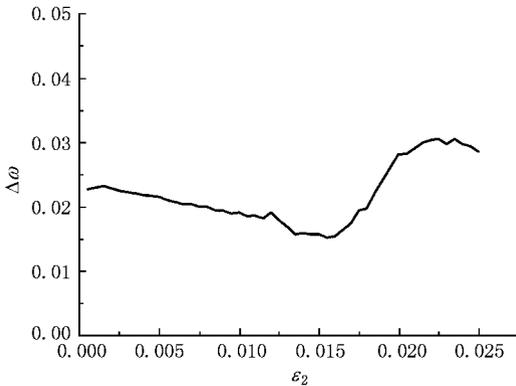


图 4 两个子系统平均频率差随  $\epsilon_2$  的变化

混沌相位同步也可以从 Lyapunov 指数的变化来解释，非线性耦合混沌系统的四个较大的 Lyapunov 指数随着非线性耦合力的变化曲线见图

5。从图 5 可以发现随着非线性耦合力的增加，耦合系统总有两个正的 Lyapunov 指数，另两个 Lyapunov 指数总在 0.0 的较小区域里变化，且没有明显的变化，这证实了非线性耦合振子的相位不同步现象。

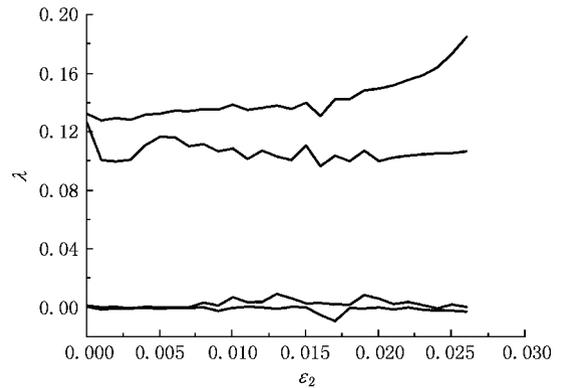


图 5 耦合系统 4 个较大的 Lyapunov 指数随  $\epsilon_2$  的变化

非线性耦合振子的相位不同步现象也可以用扩散云来证实(见图 6)。耦合系统的相点几乎分布在相平面  $(y_1, y_2)$  的某个确定的矩形区域里，说明两个振子的相位差随着时间的变化趋于无穷，说明了两个振子之间的相位不同步。

### 4. 一般耦合振子相位同步

#### 4.1. 情形 A $\epsilon_2 = 0.005$

两个 Rössler 系统的平均频率差随着线性耦合力  $\epsilon_1$  的变化如图 7 所示。两个子系统的平均频率差随着参数  $\epsilon_1$  的增加而急剧下降，当  $\epsilon_1 > 0.015$  时，两个 Rössler 系统的平均频率差很快下降到零，即耦合程度对混沌吸引子的结构影响非常大，导致两个 Rössler 系统从不同步向完全相位同步转化。对于弱

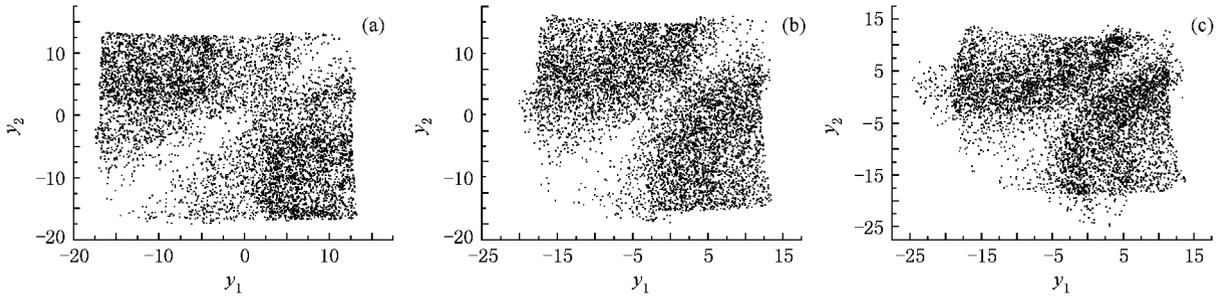


图 6 非线性耦合系统的扩散云图 (a)不同步  $\epsilon_2 = 0.003$  (b)不同步  $\epsilon_2 = 0.008$  (c)不同步  $\epsilon_2 = 0.014$

线性耦合,在  $\omega_1:\omega_2 \approx 1:1$  情形下,两个 Rössler 系统的相位相差很大,但随着线性耦合力  $\epsilon_1$  的增加,两个 Rössler 系统的相差逐渐接近于零.换句话说,在  $\omega_1:\omega_2 \approx 1:1$  情形下,耦合系统在相对大的线性耦合力  $\epsilon_1$  的作用下达到同步.

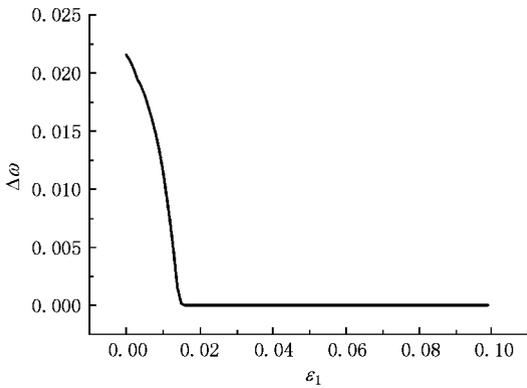


图 7 两个子系统平均频率差随  $\epsilon_1$  的变化

耦合系统的四个较大的 Lyapunov 指数随参数  $\epsilon_1$  的变化曲线见图 8.对于很小的线性耦合力,即  $\epsilon_1 \in [0.0, 0.015]$  耦合系统总有两个正的和两个零 Lyapunov 指数.第二个零 Lyapunov 指数非常小,与“拟周期”相位动力学对应.在整个耦合区域里,两个较大的 Lyapunov 指数始终是正的,意味着耦合系统

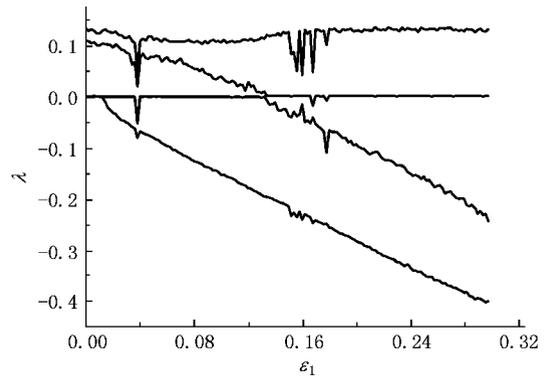


图 8 耦合系统 4 个较大的 Lyapunov 指数随  $\epsilon_1$  的变化

的振幅是混沌的和独立的,耦合系统处于超混沌状态,这时耦合系统不同步(见图 9(a)).然而,当  $\epsilon_1$  在区间  $[0.015, 0.133]$  内,耦合系统最初的正 Lyapunov 指数中的一个变为负的,这时耦合系统不完全相位同步(见图 9(b)).耦合系统在临界值  $\epsilon_1 = 0.015$  处,从不同步向不完全相位同步变化,对应于零 Lyapunov 指数在这一点发生关键性的变化.而且,当  $\epsilon_1 = 0.133$  时,耦合系统最初正 Lyapunov 指数中的一个开始变为负的,耦合系统转化为简单混沌系统.当  $\epsilon_1 > 0.133$  时,耦合系统完全相位同步(见图 9(c)).从不完全同步向完全相位同步转化的临界值

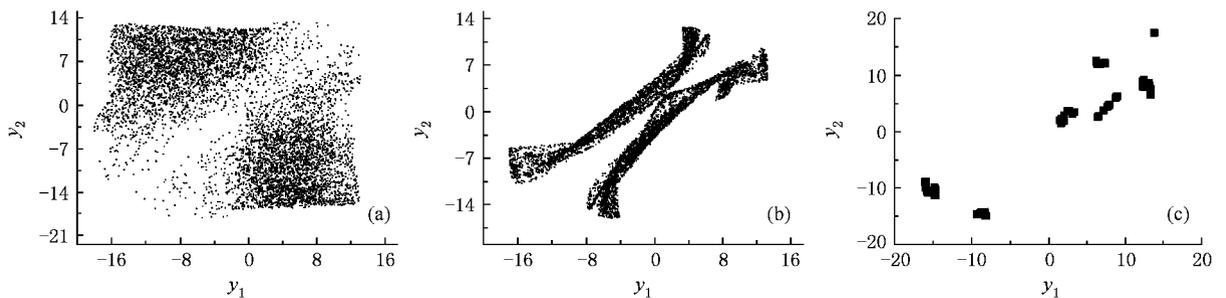


图 9 耦合系统的扩散云图  $\epsilon_2 = 0.005$  (a)不同步  $\epsilon_1 = 0.01$  (b)不完全相位同步  $\epsilon_1 = 0.07$  (c)完全相位同步  $\epsilon_1 = 0.15$

为  $\epsilon_1 = 0.133$  ,即在这一点处 ,耦合系统最初正的 Lyapunov 指数中的一个变为负的 .

### 4.2. 情形 B $\epsilon_2 = 0.02$

当非线性耦合力  $\epsilon_2 = 0.02$  时 ,耦合系统从不同步到不完全相位同步 ,直至完全相位同步之间的转化可以从图 10 中很明显的看出来 .两个临界值  $\epsilon_1 =$

$0.026$  和  $\epsilon_1 = 0.184$  ,对应于耦合系统的 Lyapunov 指数发生量的变化 ,这两个点把  $\epsilon_1$  划分为三个区域 (见图 11) ,三个不同区域对应于耦合系统不同的相位动力学 ,即  $\epsilon_1 \in [0.0, 0.026]$  耦合系统不同步 (见图 12(a)) ;  $\epsilon_1 \in (0.026, 0.184]$  ,耦合系统不完全相位同步 (见图 12(b)) ;  $\epsilon_1 > 0.184$  耦合系统完全相位同步 (见图 12(c)) .

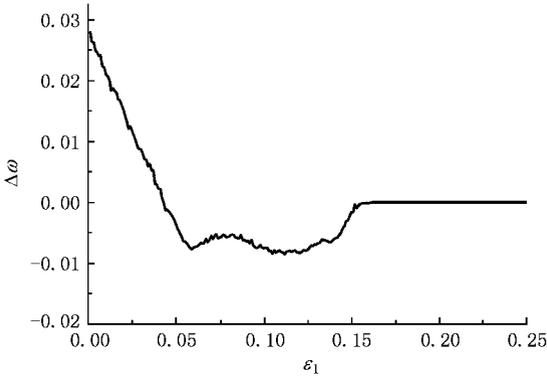


图 10 两个子系统平均频率差随  $\epsilon_1$  的变化

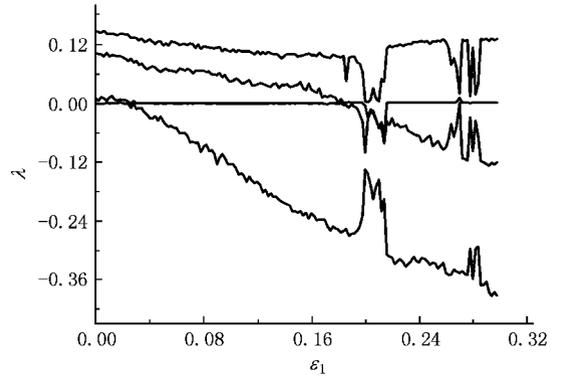


图 11 耦合系统 4 个较大的 Lyapunov 指数随  $\epsilon_1$  的变化

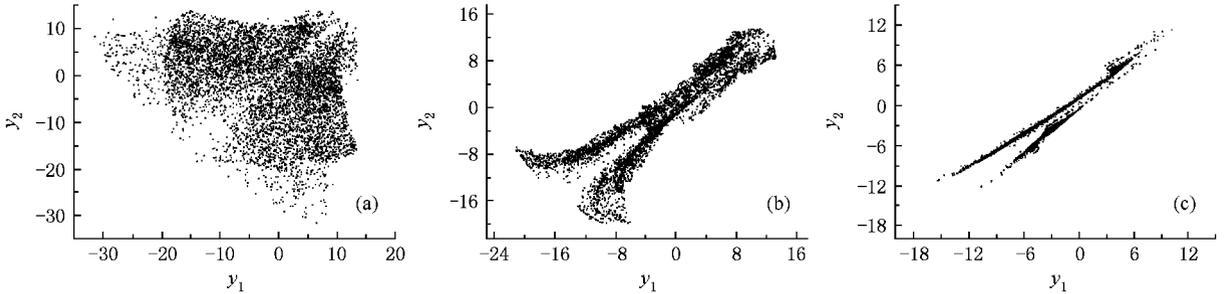


图 12 耦合系统的扩散云图  $\epsilon_2 = 0.02$  (a) 不同步  $\epsilon_1 = 0.01$  (b) 不完全相位同步  $\epsilon_1 = 0.15$  (c) 完全相位同步  $\epsilon_1 = 0.25$

### 4.3. 情形 C $\epsilon_1 = 0.05$

当线性耦合力  $\epsilon_1 = 0.05$  时 , $\epsilon_2 < 0.01$  ,两个 Rössler 系统的平均频率差接近于零 (见图 13) ,即耦合系统相位同步 (见图 14(a)) .当  $\epsilon_2 > 0.01$  时 ,两个 Rössler 系统的平均频率或接近或分离 ,即耦合系统由相位同步向不同步变化 (见图 14(b)) .耦合系统状态变化的临界值为  $\epsilon_2 = 0.085$  ,对应于耦合系统负的 Lyapunov 指数快速增加 (见图 15) .

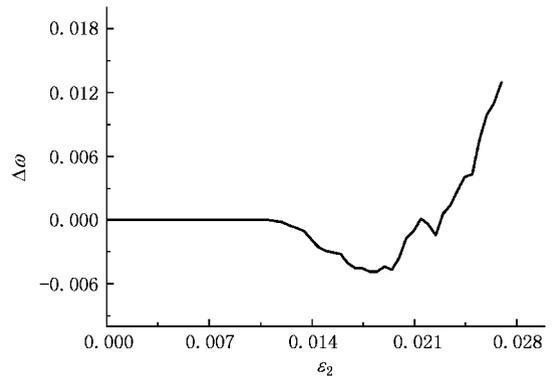


图 13 两个子系统平均频率差随  $\epsilon_2$  的变化

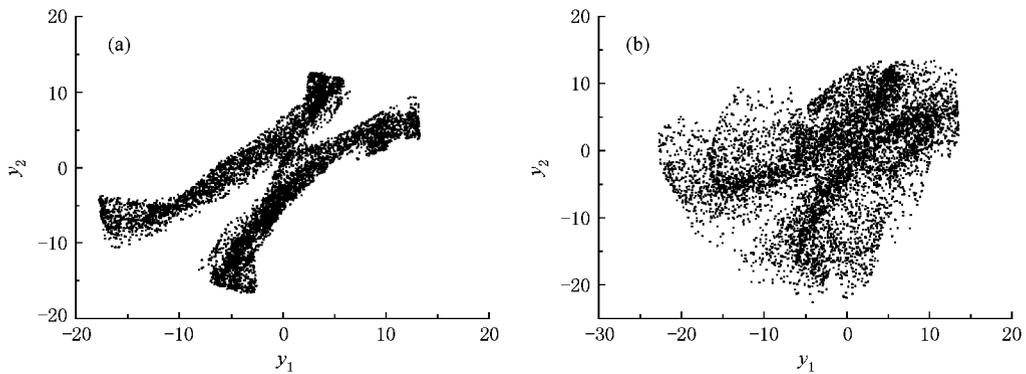


图 14 耦合系统的扩散云图  $\varepsilon_1 = 0.05$  (a) 不完全相位同步  $\varepsilon_2 = 0.006$  (b) 不同步  $\varepsilon_2 = 0.015$

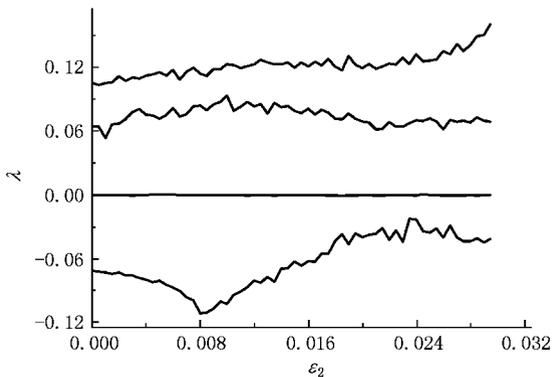


图 15 耦合系统 4 个较大的 Lyapunov 指数随  $\varepsilon_2$  的变化

## 5. 结 论

两个主共振子系统在一定的耦合条件下产生混沌相位同步现象. 两个子系统的固有频率的调谐参数  $\sigma$  对耦合系统的同步现象也产生了影响, 这可以通过两个 Rössler 系统的相互作用来解释. 具有不同固有频率的两个子系统之间的相互作用在整个耦合区域上导致了两个子系统的平均频率的分离或吸引. 而且, 相位同步的产生与混沌结构有关, 可以通过耦合系统的 Lyapunov 指数变化得到证实. 耦合力对相位动力学的影响, 尤其对同步的影响, 与周期激励系统相比是完全不同的, 即随着线性耦合力的增加, 相位同步效应增强, 而随着非线性耦合力的增加, 相位同步效应先增强后减弱.

- [ 1 ] Pecora L M , Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [ 2 ] Pecora L M , Carroll T L 1991 *IEEE Trans. Circuits Systems* **38** 453
- [ 3 ] Belykh V N , Belykh I V , Mosekilde E 2001 *Phys. Rev. E* **63** 036216
- [ 4 ] Belykh I V , Belykh V N , Nevidin K V , Hasler M 2003 *Chaos* **13** 165
- [ 5 ] Belykh V N , Belykh I V , Hasler M 2004 *Physica D* **195** 159
- [ 6 ] Elson R C , Selverston A I , Huerta R , Rulkov N F , Rabinovich M I , Abarbanel H D I 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 5692
- [ 7 ] Blasius B , Huppert A , Stone L 1999 *Nature* **399** 354
- [ 8 ] Rosa E , Pardo W , Ticos C M , Walkenstein J A , Monti M 2000 *Int. J. Bifur. Chaos* **10** 2551
- [ 9 ] Larinotsev E 2000 *Int. J. Bifur. Chaos* **10** 2441
- [ 10 ] Rosenblum M G , Pikovsky A S , Kurths J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1804
- [ 11 ] Boccaletti S , Kurths J , Osipov G , Valladares D L , Zhou C S 2002 *Phys. Rep.* **366** 1
- [ 12 ] Pikovsky A , Roseblum M G , Osipov G , Kurths J 1997 *Physica D* **104** 219
- [ 13 ] Zhang Z G , Hu G 2000 *Phys. Rev. E* **6** 7882
- [ 14 ] Chen J Y , Wong K W 2002 *Chaos* **12** 100
- [ 15 ] Landa P S , Perminov S M 1987 *Radiotekhnika* **30** 437
- [ 16 ] Coombes S 2001 *Physica D* **160** 173
- [ 17 ] Bi Q S , Zhou Y , Liu Z , Chen G 2004 *J. Control Theory & Application* **21** 932
- [ 18 ] Rössler O E 1976 *Phys. Lett. A* **57** 397
- [ 19 ] Hu H Y 2000 *Applied Nonlinear Dynamics* ( Beijing : Aviation Industry Press ) p212 [ 胡海岩 2000 应用非线性动力学(北京:航空工业出版社)第 212 页 ]



# Phase synchronization of coupling systems<sup>\*</sup>

Liu Yong<sup>†</sup>

( *School of Mathematical Science , Yancheng Teachers University , Yancheng 224051 , China* )

( Received 24 February 2008 ; revised manuscript received 23 July 2008 )

## Abstract

The influence of the linear and nonlinear coupling parameters on the phase synchronization of chaos between two sub-systems with primary resonance is investigated by introducing the conception of the phase for a chaotic motion. The evolution process from non-synchronized state to imperfect phase synchronization and further to perfect phase synchronization between two sub-systems with approximate primary resonance is discussed. Further investigation reveals that the transition between different phase states are related to the critical change of the Lyapunov exponents. The results show that phase synchronization between two sub-systems is enhanced with the increase of the linear coupling strength and decayed with the increase of nonlinear coupling strength.

**Keywords** : phase synchronization , Rössler oscillator , coupling , Lyapunov exponent

**PACC** : 0545

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 20476041 , 10602020 ) and the Natural Science Foundation of Jiangsu Education Department of China ( Grant No. 08KJD110018 ).

<sup>†</sup> E-mail : yongliumath@hotmail.com