

# 辐射传输中的一个伪极限问题及其数学物理原理<sup>\*</sup>

段民征<sup>†</sup> 郭 霞

(中国科学院大气物理研究所, 北京 100029)

(2008 年 1 月 15 日收到, 2008 年 7 月 14 日收到修改稿)

当太阳入射角度和观测角都趋向于水平时, 由平面平行大气辐射传输方程计算得到的大气顶的反射辐射值不唯一, 其值依赖于太阳和观测角的趋近于水平方向的路径曲线, 即从数学角度称为出现极限的不唯一或极限不连续. 事实上这违背了辐射场物理原理, 这种不连续是由于常规算法中忽略了大气辐射传输中一个隐含的物理原理而导出的. 在极限条件下必须引入满足 Snell 光学定律的界面边界条件, 否则会导致错误的结论.

关键词: 辐射传输, 局地热力学平衡, 大气光学, Snell 定律

PACC: 9260V, 9260W, 9265

## 1. 引 言

光辐射在大气中的传输过程包括大气吸收、散射和热辐射过程, 这些辐射过程与大气中的物质成分及其层结分布特征具有直接关系. 在辐射传输模拟计算和分析中认为大气整层处于局地热力学平衡态, 即假定大气分子运动和能级分布满足 Maxwell-Boltzmann 分布律. 一般情况下这种假定是适用的, 如 60—70 km 以下大气或带宽相对大的辐射观测<sup>[1]</sup>. 局地热力学平衡态的假定就意味着大气分子足够稠密、分子间碰撞为能量转换的主要方式, 碰撞是保障大气因受外力强迫(如辐射等)而导致的平衡态偏离得到瞬时恢复. 而在大气辐射传输计算中, 大气界外常常被假定为真空. 因而以大气顶为界的下层稠密大气模式和界外的真空之间人为造成大气成分分布的不连续, 并导致在这一界面处大气光学性质(如折射率)的不连续, 即存在突变. 一般情况下, 这个突变的影响很小乃至可以忽略(如太阳和观测天顶角均较小时), 但是当太阳或观测方向均趋近于水平面时, 对这种大气光学特性的人为突变必须加以考虑或订正, 即考虑辐射传输在这种模式大气中所隐含的物理原理. 本文从平面平行大气辐射传输中的一个伪极限入手来说明这个隐含原理. 为简单起见且不影响本文结论, 只考虑太阳光的一次散射.

## 2. 一次散射的一个伪极限

当只考虑太阳光的一次散射时, 光在平面平行大气中的传输方程可以简化为如下线性方程:

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = -K(\tau, \mu, \phi)I(\tau, \mu, \phi) + \frac{\omega}{4\pi} \pi F_0 \times \exp(-\tau/\mu_0) \times P(\tau, \mu, \phi; \mu_0, \phi_0), \quad (1)$$

其中右边第一项为直接消光效应, 第二项为单次散射(即太阳光直接辐射的一次散射)过程引起的辐射增强源函数.  $\mu_0, \mu$  分别为太阳入射辐射和出射辐射天顶角的余弦(见图 1), 向下为正, 向上为负;  $\phi_0, \phi$  分别为太阳入射辐射和出射辐射方位角,  $\tau$  为光学厚度,  $I$  为辐射强度,  $\omega$  为单次散射反照率,  $P$  为单次散射相函数,  $\pi F_0$  为地表太阳辐射通量.

假定大气顶除太阳直射外没有向下漫射辐射通量, 大气底部下垫面反射为 0, 则由(1)式可以很容易导出在任意光学厚度处的向上辐射<sup>[2, 3]</sup>

$$I^+(\tau, \mu, \phi) = \frac{\omega P(\tau, \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) F_0}{4} \frac{\mu_0}{\mu + \mu_0} \times [e^{-\tau(1/\mu + 1/\mu_0)} - e^{-K(1/\mu + 1/\mu_0)\tau}]. \quad (2)$$

如果取  $\tau = 0$ , 则可以得到大气顶的向上辐射强度或大气顶的反射强度

$$I^+(0, \mu, \phi) = \frac{\omega P(0, \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) F_0}{4} \frac{\mu_0}{\mu + \mu_0}$$

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 40675018)和国家重点基础研究发展计划(批准号: 2006CB403702)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: dmz@mail.iap.ac.cn

$$\times [1 - e^{-k(1/\mu + 1/\mu_0)}]. \quad (3)$$

根据上式,首先让观测方向趋近于水平方向  $\mu \rightarrow 0$ , 然后让太阳方向趋近于水平方向  $\mu_0 \rightarrow 0$ , 则可以得到  $(\mu, \mu_0) \rightarrow (0, 0)$  时的单次散射强度的极限

$$\lim_{\substack{\mu \rightarrow 0 \\ \mu_0 \rightarrow 0}} I^{\uparrow}(0, \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) F_0/4 = \eta. \quad (4)$$

如果首先让太阳方向趋近于水平方向  $\mu_0 \rightarrow 0$ , 然后让观测方向趋近于水平方向  $\mu \rightarrow 0$ , 则可以得到  $(\mu, \mu_0) \rightarrow (0, 0)$  时的单次散射强度的极限

$$\lim_{\substack{\mu \rightarrow 0 \\ \mu_0 \rightarrow 0}} I_1^{\uparrow}(0, \mu, \mu_0, \phi - \phi_0) = 0. \quad (5)$$

如假定  $(\mu, \mu_0)$  以等比的方式趋近于  $(0, 0)$ , 即设  $\mu = \zeta\mu_0 \rightarrow 0$ ,  $\zeta$  为任意正数, 则其极限为

$$\lim_{\substack{\mu \rightarrow 0 \\ \mu_0 \rightarrow 0}} I^{\uparrow}(0, \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) F_0/4(1 + \zeta) = \eta(1 + \zeta). \quad (6)$$

由于  $\zeta$  为任意值正数,  $1/(1 + \zeta)$  可以为  $[0, 1]$  中任意值, 因此上式结果可以取  $[0, \eta]$  间的任意值. 从方程 (4)–(6) 可以看出, 当太阳和观测方向都趋近于水平方向时, 大气顶反射辐射的极限不唯一, 其取值依赖于  $(\mu, \mu_0)$  哪一个先趋近于水平方向, 或二者趋近于水平方向的方式. Hovenier 和 Stam<sup>[4, 5]</sup> 称之为极限的不连续, 并提出利用这种不连续进行行星大气光学特性的观测.

如果完全从数学推导来看, 方程 (4)–(6) 得到极限不唯一是存在的, 推导也是完美的. 但是这里所讨论的问题是一个真实存在的物理问题, 而非纯数学问题. 数学方程所演绎的结论必须是真实存在的物理现象, 物理现象的内在本质也需要数学上的支持, 二者不能完全脱离. 因此, 数学演绎的结果需要从物理上验证后才能成立. 从以下试验我们可以看到, 方程 (4)–(6) 得到的极限不唯一违背了辐射传输的物理原理, 是一个伪极限问题.

### 3. 大气辐射传输中隐含的物理原理

首先来看  $\mu = \zeta\mu_0 \rightarrow 0$  的数学物理原理, 如图 2 所示, 在  $(\mu, \mu_0)$  组成二维平面上,  $\mu \rightarrow 0; \mu_0 \rightarrow 0$  从数学上来讲是在  $(\mu, \mu_0)$  组成的平面上趋向原点  $(0, 0)$  路径问题, 如沿路径  $p$  趋近  $(0, 0)$ . 从物理原理上讲, 路径  $p$  的梯度表示  $\mu = \zeta\mu_0 \rightarrow 0$  趋近于水平方向的相对速度. 为简单起见, 假定以直线方式趋近于原点, 则如果  $\zeta > 1$  (线  $a$ ), 则  $\mu$  比  $\mu_0$  以更快的速度趋

向于 0 即水平方向; 反之, 如果  $\zeta < 1$  (线  $b$ ) 则  $\mu_0$  比  $\mu$  以更快的速度趋向于 0. 基于这个原理, 我们设计如下假想试验来证明第二节中所述极限的非真实性.

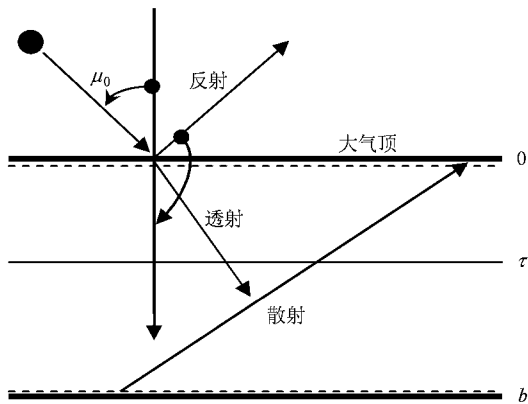


图 1 大气辐射传输模式示意图

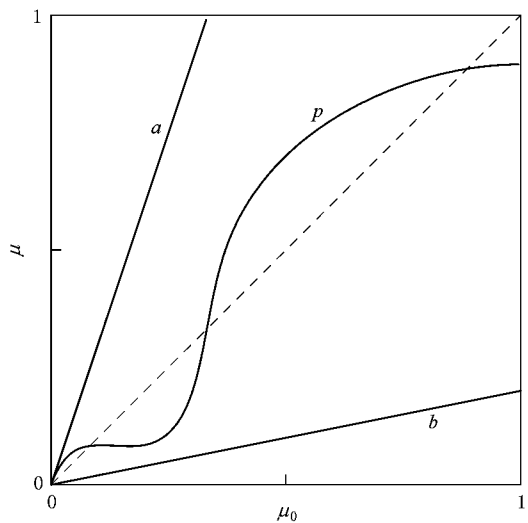


图 2 极限逼近路径示意图

设有两个探测器  $S_1$  和  $S_2$ , 令  $S_1$  和  $S_2$  的观测方向方位角相同, 以不同的角速度但同时趋近于 0 (水平方向), 角速度分别为  $c_1$  ( $\mu = c_1 t$ ) 和  $c_2$  ( $\mu = c_2 t$ ), 令太阳以角速度  $c_0$  ( $\mu_0 = c_0 t$ ) 趋向于 0, 其中,  $c_0, c_1, c_2$  为有限值, 且  $c_1 \neq c_2$ . 则两个探测器观测方向的极限为同一个方向的辐射观测, 由 (6) 式可以分别得到

$$I_1^{\uparrow}(0, 0, \phi) = \omega P(0, 0, \phi, 0, \phi_0) F_0/4(1 + c_1/c_0), \quad (7)$$

$$I_2^{\uparrow}(0, 0, \phi) = \omega P(0, 0, \phi, 0, \phi_0) F_0/4(1 + c_2/c_0). \quad (8)$$

可以看到, 对于同一个方向, 仅仅因为探测器趋

向于水平方向的速度不同, 而推导出的辐射量观测值不同, 这明显违背了辐射传输的物理原理, 因而这个极限的不唯一是错误的. 由传统的辐射传输方程得到了一个自相矛盾的极限, 其原因在于这个伪极限的推导忽略了大气辐射传输中的一个隐含的物理原理, 直接将  $\tau = 0$  代入(2)式替代大气顶的反射辐射, 而忽略了(2)式的适用性.

一般辐射传输方程求解过程中均假定整层大气满足局地热力学平衡条件, 即满足 Maxwell-Boltzmann 定律, 而 Maxwell-Boltzmann 定律要求大气为稠密大气. 因大气顶界外常常被认为是真空状态, 即不存在任何物质, 因而在大气顶处大气成分存在突变, 并导致大气顶界面以下大气光学性质如折射率、单次散射反照率等与界面以上大气不同, 即在此界面处光学性质存在突变. 因此, 当太阳光由大气界外穿过大气顶时, 光即从光疏介质进入光密介质, 因而 Snell 定律适用. 严格来讲, 菲涅耳(Fresnel)公式<sup>[6]</sup>必须作为边界方程引入辐射传输模式, 尤其是当入射角较大时如第二节中所求极限必须考虑菲涅耳公式

$$T_{//} = 2\cos\theta_i(\mu\cos\theta_i + \cos\theta_t), \quad (9)$$

$$T_{\perp} = 2\cos\theta_i(\mu\cos\theta_i + n\cos\theta_t), \quad (10)$$

式中,  $T$  表示透过率系数, 下标  $//$ ,  $\perp$  分别表示平行分量和垂直分量,  $\theta_i$ ,  $\theta_t$  分别表示入射和折射角, 其中  $\sin\theta_i = n\sin\theta_t$ ,  $n$  为折射率.

大气辐射传输方程的求解需要对源函数沿辐射路径进行积分<sup>[1, 4-6]</sup>, 根据数学积分物理原理, 这个积分仅仅在大气层内(如果有分层, 且存在边界突变, 则在分层内部)起作用, 而不能作用到大气层外部. 因此, 方程(1)所描述的光辐射无法穿过边界, 如果要作用到界面以外, 必须附加边界方程, 从光学角度来讲即为满足 Snell 定律的 Fresnel 反射透射系数方程<sup>[7]</sup>.

在现实应用中, 除存在明显的光学特性突变界面如大气-冰-水体辐射传输外<sup>[8-11]</sup>, 在只包含大气散射的辐射传输中 Fresnel 方程很少应用. 因为大气折射率非常接近于 1, 在整个大气层内折射率( $n = 1 + x$ ,  $x$  在  $10^{-4}$  以内)变化很小, 另外平面平行大气辐射模式适用太阳和观测角度距水平面  $15^\circ$  以上, 而对于接近于水平面方向的角度, 地球的球面效应必须考虑. 图 3 给出了美国标准大气 Fresnel 透过率, 折射率为  $1 + 9.525 \times 10^{-5}$ , 对应于 10 km 处的标准大气<sup>[12]</sup>, 可以看到当天顶角小于  $75^\circ$  时(距水平面大于  $15^\circ$ ), Fresnel 透过率非常接近于 100%. 这也是为

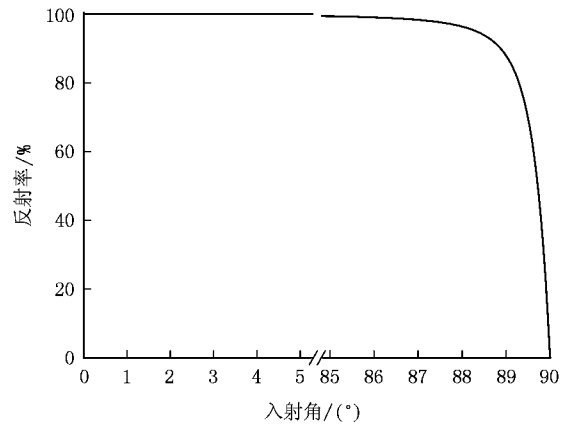


图 3 菲涅耳(Fresnel)透过率系数

什么大部分大气辐射传输模式中一般不考虑 Snell 定律的原因. 但是我们也可以看到, 即使大气折射率变化非常小, 当角度大于  $85^\circ$  时, Fresnel 透过率随角度的增大急速下降, 因而到达大气内部的光辐射也急速下降, 入射角  $90^\circ$  时已经没有任何光辐射能够穿过界面到达大气内部. 如果将这个因素考虑进去, 则无论  $(\mu, \mu_0)$  以何种方式趋向水平方向, 大气顶的向上辐射极限均趋向于一个唯一的值 0, 所谓的极限不唯一或极限不连续也不存在.

虽然平面平行大气辐射传输模拟计算中天顶角大于  $75^\circ$  (高度角小于  $15^\circ$ ) 时一般不用, 因此大气顶折射率的突变引起的影响经常被忽略. 但是, 作为一种近似, 平面平行大气辐射传输模式经常被用来分析大天顶角时光谱辐射变化特征. 近年来, 上面所述平面平行大气辐射传输模式的极限不连续被认为可以用来测量行星大气光学特性<sup>[4, 5]</sup>. 另外, 在天线传播计算中, 平面平行模式也常常被用来模拟分析水平方向上波的传播特性, 并被这种不连续所困惑. 因此, 本文从物理原理上对这种伪极限不连续的原因进行了探讨, 希望引起相关研究人员的注意.

## 4. 结 论

在一般的大气辐射传输求解过程中, 常常假定大气处于局地热力学平衡态, 因而要求大气为稠密大气, 大气分子间的碰撞导致的能量转换比任何其他方式都要快得多, 能瞬时恢复因受外力如辐射等导致的平衡态偏离. 这种稠密大气模式假定使大气顶部存在一个刚性边界, 从而大气光学参数如折射率等在大气顶存在突变. 当太阳光入射到这个界面

时,一部分被反射回太空,一部分穿过界面进入大气内部,其具体值由 Fresnel 方程决定.由于整层大气的折射率与真空非常接近,因而对于角度小于  $75^\circ$  的观测, Fresnel 折射率几乎为 100%,即当太阳天顶角小于  $75^\circ$  时(这也是平面平行大气模式的有效适用范围)太阳光几乎全部穿过这个边界进入大气内部.因此,在常规的大气辐射传输模式中, Fresnel 方程常常被忽略且不会引起不可接受的误差.但是,当太阳和观测天顶角较大时, Fresnel 必须作为边界方程引入大气辐射传输模式,否则就会得出错误的结论.

大气辐射传输方程求解时,大气常常被看作由许多同性均匀大气分层组成,这样进行数值求解时

既能保障精度,又使求解变得相对简单.但这种分层模式使得各分层边界大气特性存在不连续或者突变,因此当光线入射角度大于  $80^\circ$  时, Fresnel 方程必须考虑.

虽然平面平行大气模式只对太阳和观测天顶角小于  $75^\circ$  时适用,大于  $75^\circ$  时大气模式必须使用球面近似,但是大角度平面平行模式在工程学和行星大气光学特性的天文观测中还经常使用.另外,对于球面大气模式,当观测角大于  $85^\circ$  时如太阳掩星或临边观测模式, Fresnel 界面方程必须考虑进去,否则就会引起额外误差.

- 
- [ 1 ] Liou K N 2002 *An Introduction to Atmospheric Radiation* ( 2<sup>nd</sup> ed. ) ( California : Academic Press ) p25
- [ 2 ] Min Q L , Duan M Z 2004 *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **87** 243
- [ 3 ] Chandrasekhar S 1950 *Radiative Transfer* ( London : Oxford University Press ) p77
- [ 4 ] Hovenier J W , Stam D M 2006 *J. Quant. Spectro. Radia. Trans.* **101** 1
- [ 5 ] Hovenier J W , Stam D M 2007 *J. Quant. Spectro. Radia. Trans.* **107** 83
- [ 6 ] Liang Z C , Jin Y Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2239 [ 梁子长、金亚秋 2002 物理学报 **51** 2239 ]
- [ 7 ] Born M , Wolf E 1999 *Principles of Optics* ( 7<sup>th</sup> ed. ) ( London : Cambridge University Press ) p42
- [ 8 ] Thomas G E , Stamnes K 1999 *Radiative Transfer in the Atmosphere and Ocean* ( London : Cambridge University Press ) p184
- [ 9 ] Jin Z , Charlock T P , Rutledge K , Stamnes K , Wang Y 2006 *Appl. Opt.* **45** 7443
- [ 10 ] Jin Z , Stamnes K 1994 *Appl. Opt.* **33** 431
- [ 11 ] Plass G N , Kattawar G W 1969 *Appl. Opt.* **8** 455
- [ 12 ] McClatchey R A , Fenn R W , Selby J , Volz F E , Garing J S 1972 *Optical Properties of the Atmosphere* Report AFCRL-72-0497 , AD0753075 ( Massachusetts : AFCRL ) p41

# A false limit in atmospheric radiative transfer and the physics behind it<sup>\*</sup>

Duan Min-Zheng<sup>†</sup> Guo Xia

( *Institute of Atmospheric Physics , Chinese Academy of Sciences , Beijing 100029 , China* )

( Received 15 January 2008 ; revised manuscript received 14 July 2008 )

## Abstract

When both the solar and view zenith direction approach horizontal , the reflected radiance at the top of the atmosphere , derived from the plain – parallel atmospheric radiative transfer equation , is different and it depends on the path how the incidence and reflected directions tend to be horizontal. This phenomenon under extreme condition is called limit discontinuity in mathematics . However , the discontinuity of the limits is contradictory to the physical nature of atmospheric radiative transfer and it is obtained by neglecting an implicit physics principles , the Snell 's law . The Snell 's law must be used in the radiative transfer algorithm for radiance under this extreme condition to avoid obtaining wrong results .

**Keywords** : radiative transfer , local thermodynamic equilibrium , atmospheric optics , Snell 's law

**PACC** : 9260V , 9260W , 9265

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 40675018 ) and the National Basic Research Program of China ( Grant No. 2006CB403702 ).

<sup>†</sup> E-mail : dmz@mail.iap.ac.cn