

# 利用单驱动变量实现一类混沌系统的 线性和非线性广义同步

李建芬<sup>1)</sup> 李 农<sup>2)†</sup> 刘宇平<sup>2)</sup> 甘 轶<sup>2)</sup>

1) 空军工程大学理学院, 西安 710051)

2) 空军工程大学工程学院, 西安 710038)

(2008 年 5 月 14 日收到, 2008 年 7 月 15 日收到修改稿)

研究了一类混沌系统的线性和非线性的广义同步. 对此类混沌系统, 通过设计一个合适的响应系统, 可以仅通过传递一个驱动变量实现系统的线性和非线性广义同步. 给出了该响应系统设计的一般方法. 由于只需传递一个信号, 比已有方法具有更高的实用价值. 理论推导和数值仿真进一步表明了该方法的有效性.

关键词: 混沌系统, 广义同步, 单驱动变量

PACC: 0545

## 1. 引 言

自 Pecora 和 Carroll 于 20 世纪 90 年代初首先提出用 PC 方法<sup>[1]</sup>实现混沌系统同步后, 混沌同步已经引起了学者们的广泛兴趣. 十多年来, 混沌研究是非线性科学领域的热点问题之一, 而混沌的同步由于其在物理、通信、信息科学、医学、生物工程等领域的巨大应用潜力和发展前途, 已经引起广泛关注. 人们从不同的角度, 提出了许许多多的控制方法来实现混沌系统的同步, 主要有驱动-响应同步法<sup>[1]</sup>、线性和非线性反馈控制同步法<sup>[2-5]</sup>、脉冲同步法<sup>[6,7]</sup>等等. 然而, 上述方法大都是针对完全同步而言, 即两个初值不同的混沌系统的轨道距离  $\|x-y\|$  在  $t \rightarrow \infty$  时趋于零. 但是实际中难以产生两个完全相同的混沌系统, 1995 年, Rulkov 等<sup>[8]</sup>引入了广义同步 (generalized synchronization, 简记为 GS) 的概念, 即在主从混沌系统之间建立一个函数关系, 它刻画了两个混沌系统间更广泛的动力学行为, 比完全同步具有更为广泛的应用领域. 此后, 广义混沌同步受到了各国学者的广泛关注<sup>[9-14]</sup>.

给定一个驱动系统, 如何来构造一个响应系统, 使之与驱动系统达到广义同步化是本文研究的主要内容. 文献 [9, 10] 提出了一些构造方法, 但由于在

构造过程中需要确定一系列控制参数, 因此比较复杂. 文献 [11] 基于改进的状态观测器方法和极点配置技术, 提出了一种新的广义同步方案, 并用该方法实现了自治混沌系统的线性及非线性广义同步, 但该方法需向响应系统传递多路驱动信号. 本文将给出另一种新的方法, 构造的响应系统只需传递一个驱动变量即可实现与驱动系统的混沌广义同步. 因此, 这种广义同步化的构造方法与现有方法相比具有更高的实用价值, 在混沌保密通信等领域有很好的应用潜力. 利用 Lyapunov 的稳定性理论给出了相应的证明. 最后, 分别以新型 Lorenz 系统和广义 Lorenz 超混沌系统给出了数值仿真, 仿真结果进一步表明了该方法的有效性.

## 2. 混沌广义同步方案

### 2.1. 广义同步问题描述

考虑如下两个动力学系统:

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

$$\dot{y} = g(y) + u(x, y), \quad (2)$$

分别作为驱动系统和响应系统. 这里  $x \in R^n$  和  $y \in R^n$  分别为驱动系统和响应系统的状态矢量,  $f(\cdot)$  和  $g(\cdot)$  为非线性向量函数,  $u(x, y)$  为外部控制输入.

定义 对于给定的矢量映射  $\Phi : R^n \rightarrow R^n$ , 如果上述两系统满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x - \Phi(y)\| = 0$ , 则称两系统是广义同步的.

### 2.2. 广义同步系统设计

本文提出的新的广义同步方案如下 将(1)式作为驱动系统, 设给定的矢量映射  $\Phi(y)$  的雅克比矩阵为

$$D\Phi(y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1(y)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \phi_1(y)}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \phi_2(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2(y)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \phi_2(y)}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \phi_n(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_n(y)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \phi_n(y)}{\partial y_n} \end{bmatrix}.$$

当矩阵  $D\Phi(y)$  可逆时 本文构造的响应系统为

$$\dot{y} = D\Phi^{-1} [f(\Phi(y)) + K(x - \Phi(y))], \quad (3)$$

其中  $K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$  为反馈增益矩阵. 定义系统(1)和系统(3)的广义同步误差信号为  $e = x - \Phi(y)$  则误差系统的方程为

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\Phi}(y) \\ &= f(x) - D\Phi \cdot \dot{y} \\ &= f(x) - D\Phi \cdot [D\Phi^{-1} \cdot (f(\Phi) + K(x - \Phi))] \\ &= f(x) - f(\Phi) - K(x - \Phi). \end{aligned}$$

选择 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2} e^T e = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} e_i^2(t) \geq 0,$$

则有

$$\dot{V}(t) = e^T \dot{e} = e^T [f(x) - f(\Phi(y)) - Ke].$$

由中值定理得  $f(x) - f(\Phi(y)) = D_f(x + \theta e)e$ , 其中  $0 < \theta < 1$ ,  $D_f(x + \theta e)$  为  $f$  的雅克比矩阵 因此有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e^T \dot{e} = e^T [f(x) - f(\Phi(y)) - Ke] \\ &= e^T [D_f(x + \theta e)e - Ke] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -e^T [Ke - D_f(x + \theta e)e] \\ &= -e^T [K - D_f(x + \theta e)]e. \end{aligned}$$

若选取合适的  $K$ , 使  $e^T [K - D_f(x + \theta e)]e \geq 0$  成立 即可使  $\dot{V}(t) \leq 0$ ; 且当  $e = 0$  时, 有  $\dot{V}(t) = 0$ ; 根据 Lyapunov 稳定性理论, 此时系统(1)和(3)达到广义同步.

从以上分析可知, 该方法对于许多混沌系统, 如著名的 Chua 电路、Lorenz 系统、Chen 系统<sup>[15]</sup>、Lü 系统<sup>[16]</sup>、统一混沌系统<sup>[17]</sup>及最近由 Lü 和 Chen 等<sup>[18, 19]</sup>提出的非线性电路里的多卷波系统等, 仅通过一个耦合项即可获得广义混沌同步, 即选择  $K = \text{diag}(0, \dots, k_i, \dots, 0)$ . 这样, 通过向响应系统传递一个驱动信号  $x_i$  可实现广义同步.

### 3. 数值仿真

#### 3.1. 新型 Lorenz 系统的广义同步

2005 年, Qi 等<sup>[20]</sup>提出了一种新型的 Lorenz 系统, 其数学模型如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + x_2 x_3, \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - x_1 x_3 - x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - bx_3, \end{aligned} \quad (4)$$

式中参数  $a, b$  和  $c$  为常数, 当  $a = 35, b = 8/3, c = 80$  时, 系统(4)为混沌状态, 其吸引子在各平面上的投影如图 1 所示.

定义矢量映射  $\Phi(y) = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = (y_1, y_2,$

$$2y_2, y_3^2) \text{ 则 } D\Phi(y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2y_3 \end{bmatrix}, \text{ 由混沌系统的有}$$

界性可知,  $D\Phi(y)$  可逆.

选择  $K = \text{diag}(0, k, 0, \dots, 0)$  根据(3)式构造的

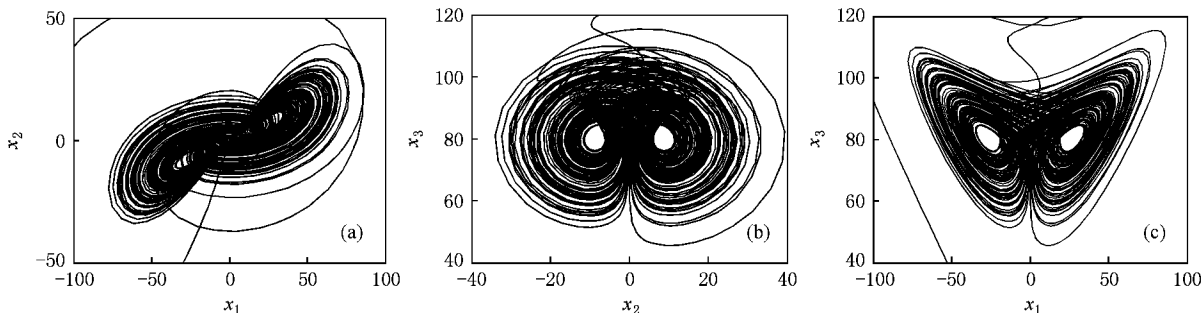


图 1 系统(4)的混沌吸引子分别在平面  $x_1-x_2$  (a),  $x_2-x_3$  (b) 和  $x_1-x_3$  (c) 上的投影

响应系统为

$$\dot{y} = D\Phi^{-1} \cdot [f(\Phi(y)) + K(x - \Phi(y))],$$

即

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a(\phi_2(y) - \phi_1(y)) + \phi_2(y)\phi_3(y) \\ &\quad - \frac{1}{2}(c\phi_1(y) - \phi_1(y)\phi_3(y) \\ &\quad - \phi_2(y) + k(x_2 - \phi_2(y))), \\ \dot{y}_2 &= \frac{1}{2}(c\phi_1(y) - \phi_1(y)\phi_3(y) \\ &\quad - \phi_2(y) + k(x_2 - \phi_2(y))), \\ \dot{y}_3 &= \frac{1}{2y_3}(\phi_1(y)\phi_2(y) - b\phi_3(y)). \end{aligned} \quad (5)$$

由(5)式可见,系统只需传递一个驱动变量  $x_2$ . 此时,广义同步误差为  $e_1(t) = x_1(t) - (y_1(t) + y_2(t))$ ,  $e_2(t) = x_2(t) - 2y_2(t)$ ,  $e_3(t) = x_3(t) - (y_3(t))^2$ . 选取  $k = 40$ , 驱动系统(4)和响应系统(5)的初值分别为  $x_1(0) = -1, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, y_1(0) = 0, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1$ , 则误差系统的初始值为  $e_1(0) = -1, e_2(0) = 0, e_3(0) = -1$ . 模拟结果见图2. 由图2可以看出,当  $t > 1$  s时,误差  $e_1(t), e_2(t)$  和  $e_3(t)$  已分别稳定到零点,这表明系统(4)和(5)获得了广义同步.

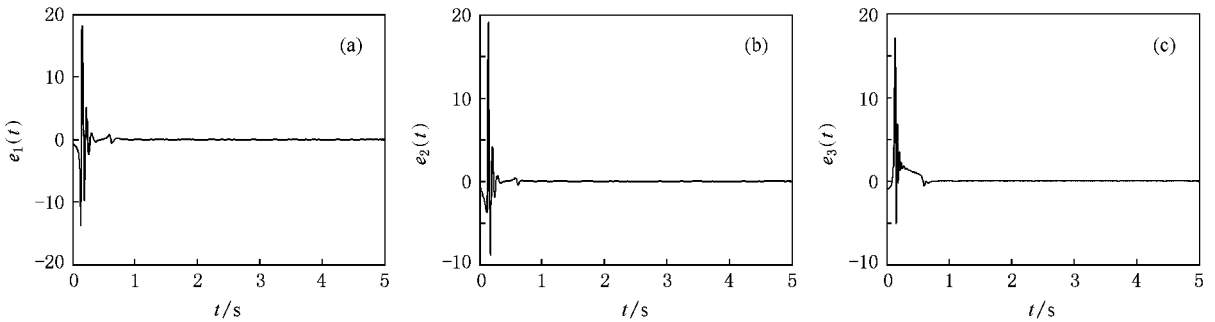


图2 系统(4)和(5)的误差  $e_1(a), e_2(b), e_3(c)$  随时间的演化曲线

### 3.2 广义 Lorenz 系统的广义同步

广义 Lorenz 系统<sup>[21]</sup>的数学模型如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1(x_1 - x_2) + c_2x_4, \\ \dot{x}_2 &= d_2x_1 - x_1x_3 - x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - b_2x_3, \\ \dot{x}_4 &= -x_1 - a_2x_4. \end{aligned} \quad (6)$$

式中参数  $a_1 = 0.25, b_1 = 3.0, c_1 = 0.50, d_1 = 0.05; a_2 = 1.0, b_2 = 0.7, c_2 = 1.50, d_2 = 26.0$ , 广义 Lorenz 系统的混沌吸引子在各平面上的投影如图3所示.

定义映射  $\Phi(y) = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) = (2y_1, y_1 +$

$$y_2, y_3^2 - 3y_4), \text{ 则 } D\Phi(y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \text{ 据}$$

(3)式构造的响应系统为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 0.5[-a_1(\phi_1(y) - \phi_2(y)) \\ &\quad + c_2\phi_4(y) + k(x_1 - \phi_1(y))], \\ \dot{y}_2 &= -0.5[-a_1(\phi_1(y) - \phi_2(y)) \\ &\quad + c_2\phi_4(y) + k(x_1 - \phi_1(y))] \end{aligned}$$

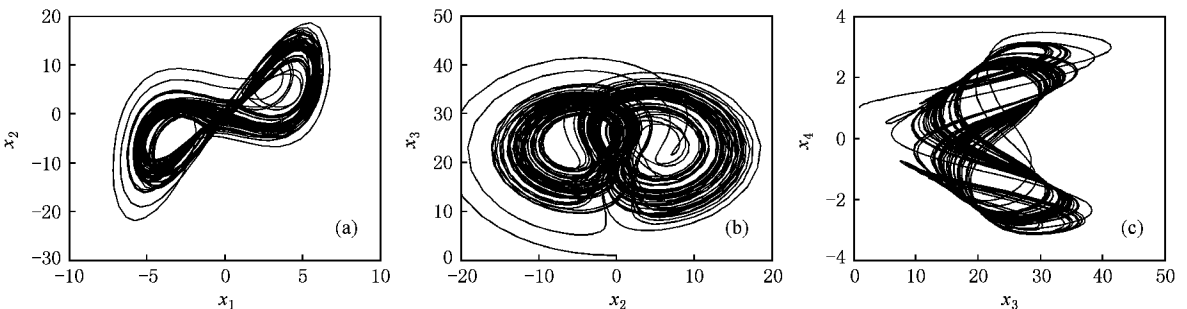


图3 系统(6)的混沌吸引子分别在平面  $x_1-x_2(a), x_2-x_3(b)$  和  $x_3-x_4(c)$  上的投影

$$+ d_2 \phi_1(\mathbf{y}) - \phi_1(\mathbf{y}) \phi_3(\mathbf{y}) - \phi_2(\mathbf{y}),$$

$$\dot{y}_3 = (\phi_1(\mathbf{y}) \phi_2(\mathbf{y}) - b_2 \phi_3(\mathbf{y})) / 2y_3, \quad (7)$$

$$\dot{y}_4 = -(-\phi_1(\mathbf{y}) - a_2 \phi_4(\mathbf{y})) / 3.$$

显然,驱动变量为  $x_1$ , 广义同步误差为  $e_1(t) = x_1(t) - 2y_1(t)$ ,  $e_2(t) = x_2(t) - (y_1(t) + y_2(t))$ ,  $e_3(t) = x_3(t) - (y_3(t))^2$ ,  $e_4(t) = x_4(t) + 3y_4(t)$ . 取  $k = 10$ , 驱动系统和响应系统的初值分别为  $x_1(0)$

$= -2$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 1$ ,  $x_4(0) = 1$ ,  $y_1(0) = 0.4$ ,  $y_2(0) = 1$ ,  $y_3(0) = 1$ ,  $y_4(0) = 0.8$ . 则误差系统的初始值为  $e_1(0) = -2.8$ ,  $e_2(0) = -1.4$ ,  $e_3(0) = 0$ ,  $e_4(0) = 3.4$ . 模拟结果见图 4. 由图可见: 当  $t > 5$  s 时, 误差  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$ ,  $e_3(t)$  和  $e_4(t)$  已分别稳定到零点, 这表明系统 (6) 和 (7) 获得了广义同步.

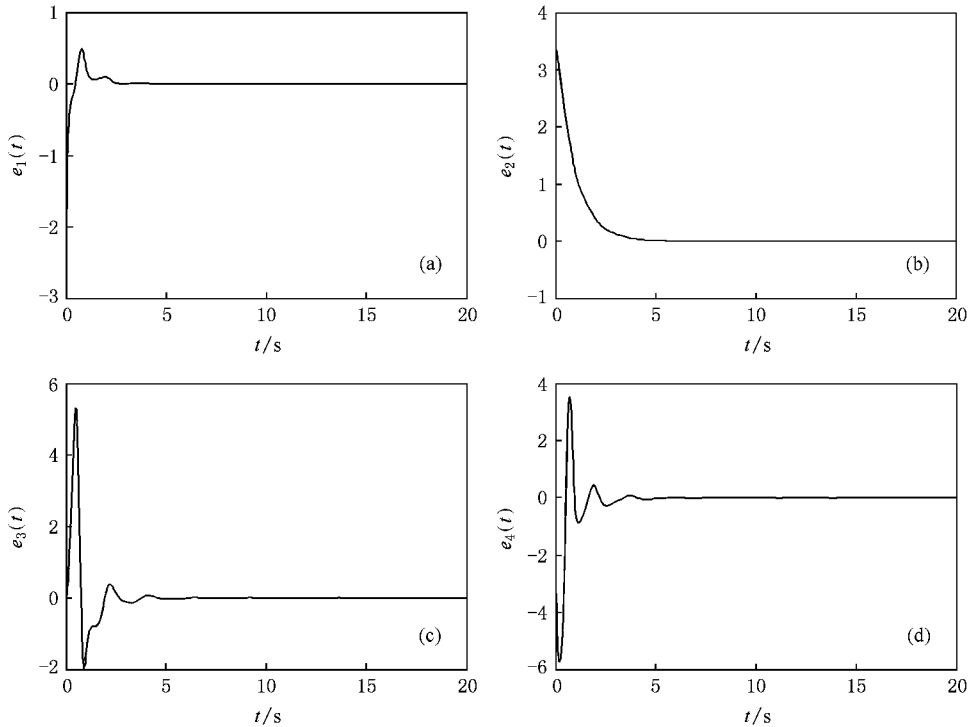


图 4 系统 (6) 和 (7) 的误差  $e_1$ (a),  $e_2$ (b),  $e_3$ (c) 和  $e_4$ (d) 随时间的演化曲线

## 4. 讨 论

文献 22 利用线性变换方法实现了混沌系统的广义同步, 该方法描述如下:

$$\text{驱动系统: } \dot{x} = Ax + \psi(x),$$

$$\text{响应系统: } \dot{y} = Ay + \Lambda\psi(x),$$

其中  $A$  是一个  $n \times n$  的常数矩阵,  $\psi(x)$  是非线性函数向量. 如果矩阵  $A$  和  $\Lambda$  满足:  $\Lambda A = \Lambda A$ , 当且仅当  $A$  是负定时, 上述两系统可达到下面关系的线性广义同步:  $y = H(x) = \Lambda x$ . 显然, 驱动系统需向响应系统传递函数向量  $\psi(x)$ , 并且系统能否同步依赖于混沌系统的线性部分是否稳定. 因此, 它不适合混沌系统线性部分不稳定的情形.

文献 11 提出了一种线性和非线性的广义同步

方法, 克服了文献 19 的缺陷, 该文将驱动系统和响应系统表示为

$$\dot{x} = Ax + f(x), \quad (8)$$

$$\dot{y} = g(y) + u(x, y), \quad (9)$$

其中  $A$  为具有适当维数的系统矩阵, 而不完全是系统的线性部分. 构造的响应系统为  $\dot{y} = (D\Phi)^{-1} A \cdot \Phi(y) + (D\Phi)^{-1} [s(x) - h(y)]$ , 其中  $s(x) = f(x) + Kx$  为系统 (8) 的输出,  $K$  为反馈增益矩阵,  $h(y) = K \cdot \Phi(y)$  为系统 (9) 的输出.  $D\Phi$  为映射  $\Phi$  的雅可比矩阵, 若  $D\Phi$  可逆 ( $A-K$ ) 为指数稳定矩阵, 则系统 (8) 和 (9) 将获得广义同步, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x - \Phi(y)\| = 0$ . 显然, 该方法同样需要向响应系统传递向量函数  $f(x) + Kx$ , 即有可能需传递多路信号.

由上述讨论可知, 本文提出的方法只需传递一

个变量,与现有的混沌广义同步方法比较,具有构造方法简单、适用范围广、实用性强等特点.

## 5. 结 论

本文提出一种普遍适用的混沌广义同步方法,

只要可以通过单向耦合实现完全同步的混沌系统,均可采用本文提出的方法达到广义同步.该方法只需传递一个驱动变量即可实现线性及非线性混沌广义同步,比起已有的方法具有更高的实用价值.利用 Lyapunov 的稳定性理论给出了相应的证明,数值仿真进一步验证了所提方法的有效性.

- [ 1 ] Pecora L M , Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [ 2 ] Tao C H , Lu J A , Lü J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1497 ( in Chinese ) [ 陶朝海、陆君安、吕金虎 2002 物理学报 **51** 1497 ]
- [ 3 ] Lü J H , Zhou T S , Zhang 2002 *Chaos Soliton. Fract.* **14** 529
- [ 4 ] Chen Z S , Sun K H , Zhang T S 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2580 ( in Chinese ) [ 陈志胜、孙克辉、张泰山 2005 物理学报 **54** 2580 ]
- [ 5 ] Sarasola C , Torrealdea F J , Anjou A D 2003 *Bifurcation and Chaos* **13** 177
- [ 6 ] Chen S H , Yang Q , Wang C P 2004 *Chaos Soliton. Fract.* **20** 751
- [ 7 ] Sun J T , Zhang Y P 2003 *Phys. Lett. A* **306** 306
- [ 8 ] Rulkov N F , Sushchik M M , Tsimring L S 1995 *Phys. Rev. E* **51** 980
- [ 9 ] Lu J Q , Xi Y G 2003 *Chaos Soliton. Fract.* **17** 825
- [ 10 ] Yang X S , Duan C K 1998 *Chaos Soliton. Fract.* **10** 1703
- [ 11 ] Wang X Y , Meng J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 726 ( in Chinese ) [ 王兴元、孟 娟 2008 物理学报 **57** 726 ]
- [ 12 ] Li G H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 999 ( in Chinese ) [ 李国辉 2004 物理学报 **53** 999 ]
- [ 13 ] Zhang P W , Tang G N , Luo X S 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3497 ( in Chinese ) [ 张平伟、唐国宁、罗晓曙 2005 物理学报 **54** 3497 ]
- [ 14 ] Wang X Y , Meng J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6288 ( in Chinese ) [ 王兴元、孟 娟 2007 物理学报 **56** 6288 ]
- [ 15 ] Chen G R , Ueta T 1999 *Bifurcation and Chaos* **9** 1465
- [ 16 ] Lü J H , Chen G R 2002 *Bifurcation and Chaos* **12** 659
- [ 17 ] Lü J H , Chen G R 2002 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **12** 2917
- [ 18 ] Lü J H , Chen G R 2006 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **16** 775
- [ 19 ] Lü J H , Yu S , Leung H , Chen G R 2006 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **53** 149
- [ 20 ] Qi G Y , Chen G R , Du S Z , Chen Z Q , Yuan Z Z 2005 *Phys. A* **352** 295
- [ 21 ] Ho M C , Hung Y C , Liu Z Y , Jiang I M 2006 *Phys. Lett. A* **348** 251
- [ 22 ] Yang T , Chua L O 1999 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **9** 215

# Linear and nonlinear generalized synchronization of a class of chaotic systems by using a single driving variable

Li Jian-Fen<sup>1)</sup> Li Nong<sup>2)†</sup> Liu Yu-Ping<sup>2)</sup> Gan Yi<sup>2)</sup>

1 *✉ Institute of Sciences, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China*

2 *✉ Institute of Engineering, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China*

( Received 14 May 2008 ; revised manuscript received 15 July 2008 )

## Abstract

By designing a suitable response system to a class of chaotic systems, we realise the linear and nonlinear generalized synchronizations for these chaotic systems by only transmitting a single variable. The method of obtaining the response system from chaotic system is proposed. Since chaos synchronization can be achieved by transmitting the single variable from driving system to response system, this method is more practical. Theoretical deduction and computer simulation show the effectiveness of the proposed method.

**Keywords** : chaotic system, generalized synchronization, single driving variable

**PACC** : 0545

---

† Corresponding author. E-mail : ln2807@163.com