两种情况来讨论不同结构混沌系统的同步.

情况 1 将系统(1)作为驱动系统，受控的响应系统为

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{U}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}). \tag{3}$$

令系统(3)与(1)的同步误差为 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$，可得误差动态系统如下

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{e}} &= \dot{\boldsymbol{y}} - \dot{\boldsymbol{x}} \\ &= \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} - \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{U}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ &= \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} \\ &\quad - \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{U}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ &= \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{e} + (\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{y}) \\ &\quad - \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{U}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).\end{aligned} \tag{4}$$

定义 1 对于两个不同结构的混沌系统(1)和(3)，如果存在一个控制器 $\boldsymbol{U}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，使得系统(1)和(3)的状态在任意初始状态($\boldsymbol{x}(0)$，$\boldsymbol{y}(0)$)下，均有

$$\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{e}(t)\| = \lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}(t)\| = 0$$

成立.则称混沌系统(1)和(3)达到同步.

采用主动控制法实现两个不同结构混沌系统的同步，就是为响应系统(3)设计适当的控制器，使得误差系统(4)在该控制器的作用下，渐近稳定到原点.为此选取如下形式的控制器：

$$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{V}_1 - (\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{y}). \tag{5}$$

将(5)式代入(4)式可得

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{e} + \boldsymbol{V}_1. \tag{6}$$

此时，系统(6)是一个线性系统.可以通过设计 $\boldsymbol{V}_1$，使得系统(6)满足 Lyapunov 稳定性条件.不妨设 $\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{e}$，将系统(6)化成

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{e} \tag{7}$$

的形式.于是，只要保证系统(7)在原点渐近稳定即可实现系统(3)和系统(1)的同步.矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的选取方法有很多种，在以往文献中利用主动控制法实现混沌同步时所设计的 $\boldsymbol{P}$ 都是常数矩阵[6,7]，且保证矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征值均具有负的实部.在本文中我们将常数矩阵推广成与系统状态相关的矩阵(常数矩阵为本文的一种特殊情况)，并且通过对矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的设计将系统(6)化成 $\dot{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$ 的形式.其具体性质由下面的定理给出.

定理 1 考虑如下的非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}, \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{e} = [e_1, e_2, \cdots, e_n]^{\mathrm{T}}$ 为状态变量.若系数矩阵 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{e})$ 满足 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{e}) + \boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{e})$，并且 $\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}) = -\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{e})$，$\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{e}) = \mathrm{diag}\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$，$b_i < 0(i = 1, 2, \cdots, n)$，那么系统状态全局渐近稳定.

证明 选择如下 Lyapunov 函数

$$V = \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e},$$

则它沿着系统(8)关于时间的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{e}} \\ &= \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} \\ &= \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{e} \\ &= 2\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}\boldsymbol{e}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{e}) = \mathrm{diag}\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$，$b_i < 0(i = 1, 2, \cdots, n)$，所以 $\dot{V} \leqslant 0$，则系统(8)全局渐近稳定.

考虑超混沌 Rössler 系统和广义 Lorenz 系统的主动同步.设超混沌 Rössler 系统为驱动系统，有

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + a_1x_2 + x_4, \\ \dot{x}_3 &= b_1 + x_1x_3, \\ \dot{x}_4 &= -c_1x_3 + d_1x_4.\end{aligned} \tag{9}$$

广义 Lorenz 系统为受控的响应系统，有

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= a_2(y_2 - y_1) + c_2y_4 + u_1, \\ \dot{y}_2 &= d_2y_1 - y_1y_3 - y_2 + u_2, \\ \dot{y}_3 &= y_1y_2 - b_2y_3 + u_3, \\ \dot{y}_4 &= -y_1 - a_2y_4 + u_4.\end{aligned} \tag{10}$$

其中，参数 $a_1 = 0.25$，$b_1 = 3.0$，$c_1 = 0.5$，$d_1 = 0.05$ 和 $a_2 = 1.0$，$b_2 = 0.7$，$c_2 = 1.5$，$d_2 = 26.0$ 时，系统(9)和(10)处于超混沌状态.首先将系统(9)和(10)分别化成系统(1)和(3)的形式，其中

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0.25 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.05 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.0 + x_1x_3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} -1.0 & 1.0 & 0 & 1.5 \\ 26.0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -y_1y_3 \\ y_1y_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$U_1 = [u_1, u_2, u_3, u_4]^{\mathrm{T}}$ 为控制输入.

设驱动系统(9)与响应系统(10)之间的误差状态为 $e_i(t) = y_i - x_i (i = 1,2,3,4)$.由(10)与(9)式相减可得误差状态方程为

$$
\begin{aligned}
\dot{e}_1(t) &= -e_1 + e_2 + 1.5e_4 - x_1 \\
&\quad + 2x_2 + x_3 + 1.5x_4 + u_1, \\
\dot{e}_2(t) &= 26e_1 - e_2 + 25x_1 - 1.25x_2 \\
&\quad - x_4 - y_1 y_3 + u_2, \\
\dot{e}_3(t) &= -0.7e_3 - 0.7x_3 + y_1 y_2 + x_1 x_3 - 3 + u_3, \\
\dot{e}_4(t) &= -e_1 - e_4 - x_1 + 0.5x_3 - 1.05x_4 + u_4.
\end{aligned} \tag{11}
$$

为了使得系统(9)和(10)实现同步,根据(5)式选取如下形式的控制器:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= -x_2 e_3 - 0.5e_4 + x_1 - 2x_2 - x_3 - 1.5x_4, \\
u_2 &= -27e_1 - (x_1 + e_1)e_3 - 25x_1 \\
&\quad + 1.25x_2 + x_4 + y_1 y_3, \\
u_3 &= x_2 e_1 + (x_1 + e_1)e_2 + 0.7x_3 \\
&\quad - y_1 y_2 + x_1 x_3 + 3, \\
u_4 &= x_1 - 0.5x_3 + 1.05x_4.
\end{aligned} \tag{12}
$$

则误差系统(11)在控制器(12)的作用下能够化成非线性系统(8)的形式,根据定理 1 则有误差系统(11)全局渐近稳定,即驱动系统与响应系统达到了同步.

为了说明所设计控制器的有效性,采用四阶龙格–库塔法进行数值仿真,初始状态分别为$(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (-1,2,-3,4)$和$(y_1(0), y_2(0), y_3(0), y_4(0)) = (1,3,0,5)$,则误差状态初始值为$(e_1(0), e_2(0), e_3(0), e_4(0)) = (2,1,3,1)$.图 1 给出了驱动系统(9)和响应系统(10)之间的误差状态曲线,由仿真结果可以看出随着时间的增加,误差状态 $e_1(t)$,$e_2(t)$,$e_3(t)$和 $e_4(t)$,能够迅速地趋近于零,这表明该方法能够有效地实现不同结构混沌系统的同步.

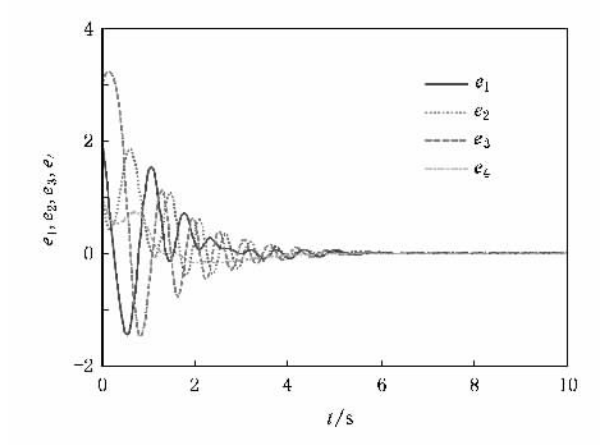

图 1 超混沌 Rössler 系统和广义 Lorenz 系统的同步误差状态曲线

情况 2 将情况 1 中的驱动系统和响应系统互换.即系统(2)作为驱动系统,则受控的响应系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{U}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{13}$$

令同步误差状态为 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$,则误差系统为

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{e}} &= \dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\boldsymbol{y}} \\
&= \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{y} - \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{U}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\
&= \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) \\
&\quad - \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{U}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\
&= \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{e} + (\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) \\
&\quad - \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{U}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).
\end{aligned} \tag{14}
$$

选取如下控制器:

$$\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{V}_2 + (\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}). \tag{15}$$

将(15)代入(14)式可得

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{e} + \boldsymbol{V}_2. \tag{16}$$

关于 $\boldsymbol{V}_2$ 的选取方法有很多种,为了讨论互换前后控制器之间的关系,不妨令 $\boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{V}_1$.则控制器(15)为

$$\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{V}_1 + (\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}). \tag{17}$$

在该控制器的作用下,系统(14)全局渐近稳定.

注 1 从情况 1 和 2 的讨论过程可以看出,当驱动系统与响应系统相互交换时,互换前后控制器之间的关系为 $\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{U}_1 + 2[(\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{x} - \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{y})]$.

下面以广义 Lorenz 系统作为驱动系统,超混沌 Rössler 系统作为受控的响应系统,对所设计的控制器的有效性进行数值仿真.其系统参数与系统状态的初始值同情况 1.则图 2 为系统(9)和(10)互换之后的同步误差状态曲线.从仿真结果可以看出在控制器(17)的作用下,两个不同结构混沌系统达到了同步.

2.2. 主动反同步控制器设计及其仿真

采用主动控制的方法实现不同结构混沌系统的反同步,与 2.1 节实现两个不同结构混沌系统同步的分析过程类似,分成两种情况来讨论.

情况 1 将系统(1)作为驱动系统,受控的响应系统为

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{U}_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{18}$$

令系统(18)与(1)的反同步误差为 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$,可得误差动态系统为

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{e}} &= \dot{\boldsymbol{y}} + \dot{\boldsymbol{x}} \\
&= \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{U}_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})
\end{aligned}
$$

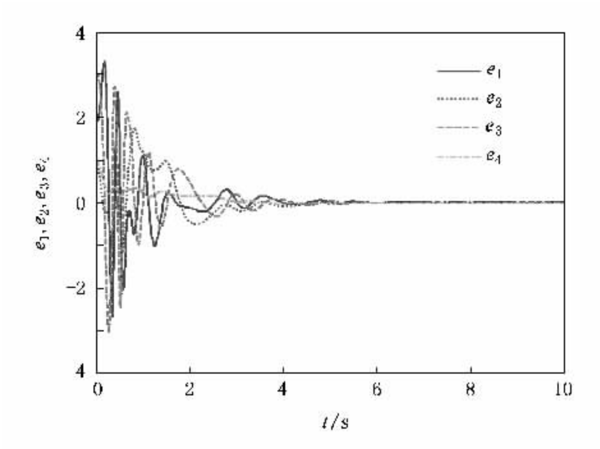

图 2　广义 Lorenz 系统和超混沌 Rössler 系统的同步误差状态曲线

$$
\begin{aligned}
&= A_2(x+y) - A_2x + A_1x + f_1(x) \\
&\quad + g_1(y) + U_3(x,y) \\
&= A_2e + (A_1 - A_2)x + f_1(x) \\
&\quad + g_1(y) + U_3(x,y).
\end{aligned} \tag{19}
$$

定义 2　对于两个不同结构的混沌系统(1)和(18)，如果存在一个控制器 U_3，使得系统(1)和(18)的状态在任意初始状态($x(0)$，$y(0)$)下，均有

$$\lim_{t\to\infty}\|e(t)\| = \lim_{t\to\infty}\|y(t)+x(t)\| = 0$$

成立. 则称混沌系统(1)和(18)达到反同步.

从混沌反同步的定义可以看出，利用主动控制法实现两个不同结构混沌系统反同步的问题，可以转化成误差系统(19)在原点的渐近稳定性问题. 选取如下形式的控制器：

$$U_3 = V_3 - (A_1 - A_2)x - f_1(x) - g_1(y). \tag{20}$$

将(20)代入(19)式可得

$$\dot{e} = A_2e + V_3. \tag{21}$$

通过选取适当的 V_3，使系统(21)在原点渐近稳定即可实现混沌系统的反同步. 为了研究问题方便不妨令 $V_3 = V_1$. 此时控制器(20)为

$$U_3 = V_1 - (A_1 - A_2)x - f_1(x) - g_1(y). \tag{22}$$

混沌同步控制器(5)，(17)与反同步控制器(22)之间的关系如下：

$$
\begin{aligned}
U_3 &= U_1 + 2[(A_2 - A_1)x - f_1(x)], \\
U_3 &= U_2 - 2g_1(y).
\end{aligned}
$$

下面仍以超混沌 Rössler 系统和广义 Lorenz 系统为例进行数值仿真. 以超混沌 Rössler 系统作为驱动系统，广义 Lorenz 系统作为响应系统. 系统参数和状态初始值的选取与 2.1 节数值仿真的取值相一致. 图 3 为超混沌 Rössler 系统的状态 x_i($i = 1,2,3,$

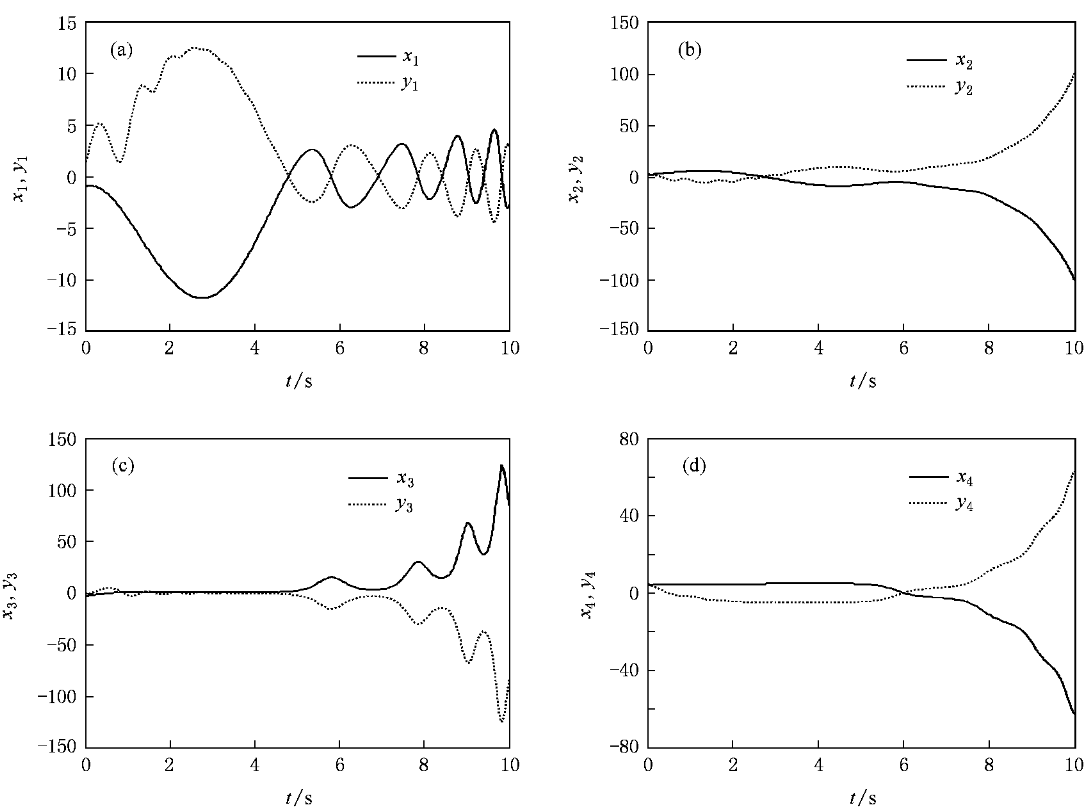

图 3　超混沌 Rössler 系统和广义 Lorenz 系统反同步过程的仿真曲线　(a) x_1，y_1 的反同步曲线，(b) x_2，y_2 的反同步曲线，(c) x_3，y_3 的反同步曲线，(d) x_4，y_4 的反同步曲线

4)和广义 Lorenz 系统的状态 $y_i(i=1,2,3,4)$之间的反同步仿真曲线.由仿真结果可以看出两个混沌系统的状态轨迹振幅相等运动方向相反,即两个混沌系统在控制器(22)的作用下达到了反同步.

情况 2　如果将系统(2)作为驱动系统,受控的响应系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{U}_4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}). \tag{23}$$

令系统(23)与(2)的反同步误差为 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$,则误差动态系统为

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{e} + (\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x})$$
$$\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{U}_4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

该误差系统与(19)式相同,所以可以在同一个控制器的作用下达到全局渐近稳定.从 2.2 节的情况 1,2 的分析结果可以得出结论,在实现两个不同结构混沌系统(相同阶)的反同步时,驱动系统与响应系统互换并不影响控制器的设计.即互换前后混沌系统可以在同一控制器 $\boldsymbol{U}_4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{U}_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$的作用下实现反同步.

为了说明上述分析结果的正确性,采用四阶龙格-库塔法进行数值仿真,系统参数以及初始状态的取值同 2.1 节.图 4 为超混沌 Rössler 系统和广义 Lorenz 系统互换之后的状态反同步仿真曲线.由仿真结果可以看出两个混沌系统的状态轨迹振幅相等运动方向相反,即互换之后的两个混沌系统在控制器(22)的作用下仍可达到反同步.

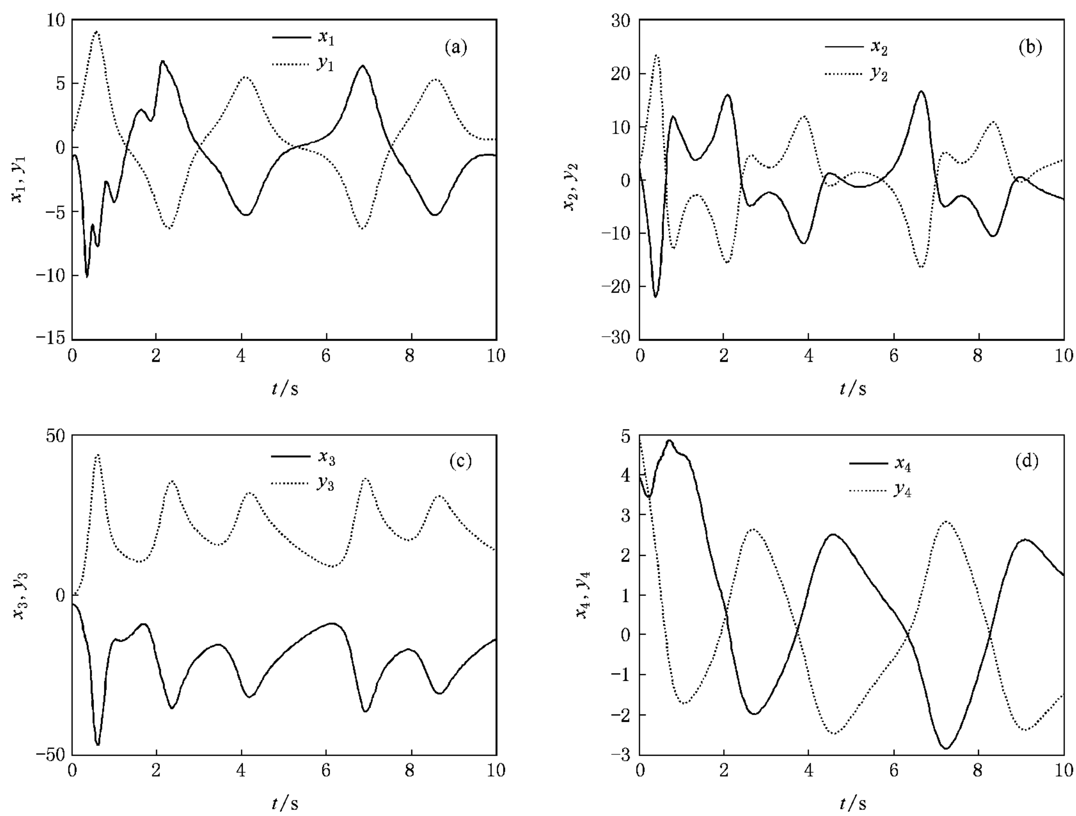

图 4　广义 Lorenz 系统和超混沌 Rössler 系统反同步过程的仿真曲线　(a) y_1, x_1 的反同步曲线,(b) y_2, x_2 的反同步曲线,(c) y_3, x_3 的反同步曲线,(d) y_4, x_4 的反同步曲线

综上,两个不同结构混沌系统实现同步时,驱动系统和响应系统互换之后,控制器发生了明显的变化.而对于两个不同结构混沌系统,则可在同一控制器的作用下实现反同步,这是混沌反同步的独特之处.

3. 自适应同步与反同步控制器设计

上一节在参数已知的条件下,采用主动控制法,针对不同结构混沌系统的同步与反同步问题进行了研究.然而在实际应用中,一般混沌系统的参数常常

是未知或不确定的.因此,要实现参数未知的混沌系统的同步与反同步对实际的混沌系统至关重要,而且驱动系统和响应系统的参数均未知的情况更加具有研究价值.针对上述问题本节基于 Lyapunov 稳定性理论和自适应控制方法,设计了不同结构混沌系统的自适应同步与反同步控制器,并对驱动系统和响应系统的未知参数进行在线估计.

3.1. 自适应同步控制器设计及其仿真

考虑如下形式的两个混沌系统:

$$\dot{x}=f(x)+F(x)\tilde{\theta}_1, \tag{24}$$

$$\dot{y}=g(y)+G(y)\tilde{\theta}_2. \tag{25}$$

情况 1　将系统(24)作为驱动系统,受控的响应系统为

$$\dot{y}=g(y)+G(y)\tilde{\theta}_2+U_5(x,y), \tag{26}$$

其中,$x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm T}$ 与 $y=[y_1,y_2,\cdots,y_n]^{\mathrm T}$ 为系统的状态变量,$f(x)$ 与 $g(y)$ 为连续的向量函数,$F(x)$ 和 $G(y)$ 为矩阵函数,$U_5(x,y)$ 为控制输入,$\tilde{\theta}_1$ 和 $\tilde{\theta}_2$ 为系统参数.当 $f(x)\neq g(y)$,$F(x)\neq G(y)$,时,系统(24)和(26)是不同结构的混沌系统,否则为相同结构的混沌系统.

令响应系统(26)与驱动系统(24)的同步误差为 $e=y-x$,可得如下误差动态系统:

$$\begin{aligned}\dot{e}&=\dot{y}-\dot{x}\\&=g(y)+G(y)\tilde{\theta}_2-f(x)\\&\quad-F(x)\tilde{\theta}_1+U_5(x,y).\end{aligned} \tag{27}$$

由于混沌系统对初始条件的敏感依赖,初始条件的微小变化最终将导致系统之间动态行为的巨大差异,所以混沌系统的同步较难实现.对于结构不同且系统参数均未知的驱动系统和响应系统的混沌同步实现起来就更加困难.于是该问题的研究具有一定的理论意义.

基于 Lyapunov 稳定性理论和自适应控制方法,选取如下自适应控制器和参数自适应律:

$$\begin{aligned}U_5(x,y)&=Ke-g(y)-G(y)\theta_2\\&\quad+f(x)+F(x)\theta_1,\end{aligned} \tag{28}$$

$$\dot{\theta}_1=-F^{\mathrm T}(x)e,\dot{\theta}_2=G^{\mathrm T}(y)e, \tag{29}$$

其中,K 是系数矩阵且具有和矩阵 B 相同的性质,参数 θ_1,θ_2 分别是‘未知’参数 $\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2$ 的估计.根据以上的分析,我们有如下的定理成立.

定理 2　对于不同结构的混沌系统(24)和(26),在控制器(28)和参数自适应律(29)的作用下,受控的响应系统(26)在任意初始状态下,均能实现与驱动系统(24)的自适应同步.

证明　选取如下 Lyapunov 函数

$$V=\frac{1}{2}(e^{\mathrm T}e+\bar{\theta}_1^{\mathrm T}\bar{\theta}_1+\bar{\theta}_2^{\mathrm T}\bar{\theta}_2),$$

其中,$\bar{\theta}_1=\theta_1-\tilde{\theta}_1$,$\bar{\theta}_2=\theta_2-\tilde{\theta}_2$.

沿着系统(27)对时间求导,可得

$$\begin{aligned}\dot{V}&=\frac{1}{2}(\dot{e}^{\mathrm T}e+e^{\mathrm T}\dot{e}+\dot{\bar{\theta}}_1^{\mathrm T}\bar{\theta}_1\\&\quad+\bar{\theta}_1^{\mathrm T}\dot{\bar{\theta}}_1+\dot{\bar{\theta}}_2^{\mathrm T}\bar{\theta}_2+\bar{\theta}_2^{\mathrm T}\dot{\bar{\theta}}_2)\\&=\frac{1}{2}[g(y)-f(x)+G(y)\tilde{\theta}_2\\&\quad-F(x)\tilde{\theta}_1+U_5(x,y)]^{\mathrm T}e\\&\quad+\frac{1}{2}e^{\mathrm T}[g(y)-f(x)+G(y)\tilde{\theta}_2\\&\quad-F(x)\tilde{\theta}_1+U_5(x,y)]\\&\quad+\frac{1}{2}(\dot{\theta}_1^{\mathrm T}\bar{\theta}_1+\bar{\theta}_1^{\mathrm T}\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2^{\mathrm T}\bar{\theta}_2+\bar{\theta}_2^{\mathrm T}\dot{\theta}_2)\\&=\frac{1}{2}[g(y)-f(x)+G(y)(\theta_2-\bar{\theta}_2)\\&\quad-F(x)(\theta_1-\bar{\theta}_1)+U_5(x,y)]^{\mathrm T}e\\&\quad+\frac{1}{2}e^{\mathrm T}[g(y)-f(x)+G(y)(\theta_2-\bar{\theta}_2)\\&\quad-F(x)(\theta_1-\bar{\theta}_1)+U_5(x,y)]\\&\quad+\frac{1}{2}(\dot{\theta}_1^{\mathrm T}\bar{\theta}_1+\bar{\theta}_1^{\mathrm T}\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2^{\mathrm T}\bar{\theta}_2+\bar{\theta}_2^{\mathrm T}\dot{\theta}_2)\\&=\frac{1}{2}[g(y)-f(x)+G(y)(\theta_2-\bar{\theta}_2)\\&\quad-F(x)(\theta_1-\bar{\theta}_1)+U_5(x,y)]^{\mathrm T}e\\&\quad+\frac{1}{2}e^{\mathrm T}[g(y)-f(x)+G(y)(\theta_2-\bar{\theta}_2)\\&\quad-F(x)(\theta_1-\bar{\theta}_1)+U_5(x,y)]\\&\quad+\frac{1}{2}(\dot{\theta}_1^{\mathrm T}\bar{\theta}_1+\bar{\theta}_1^{\mathrm T}\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2^{\mathrm T}\bar{\theta}_2+\bar{\theta}_2^{\mathrm T}\dot{\theta}_2).\end{aligned}$$

将(28)和(29)式代入上式可得

$$\dot{V}=\frac{1}{2}e^{\mathrm T}(K^{\mathrm T}+K)e.$$

因为 K 具有和矩阵 B 相同的性质,所以 $\dot{V}\leqslant 0$.但是 $\dot{V}$ 半负定,不能直接得出误差系统在原点渐近稳定,所以结合 Barbalat 引理[17] 可得出 $\lim_{t\to\infty}\|e(t)\|=0$,即响应系统(26)和驱动系统(24)全局渐近同步.证毕.

以 Lorenz 混沌系统和混沌 Lü 系统为例,说明所设计的自适应控制器以及自适应律的有效性.令 Lorenz 系统为驱动系统,有

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \tilde{a}_1(x_2 - x_1),\\
\dot{x}_2 &= \tilde{b}_1 x_1 - x_1 x_3 - x_2,\\
\dot{x}_1 &= x_1 x_2 - \tilde{c}_1 x_3 .
\end{aligned}
\tag{30}
$$

受控的 Lü 系统为

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= \tilde{a}_2(y_2 - y_1) + u_1,\\
\dot{y}_2 &= -y_1 y_3 + \tilde{b}_2 y_2 + u_2,\\
\dot{y}_3 &= y_1 y_2 - \tilde{c}_2 y_3 + u_3 .
\end{aligned}
\tag{31}
$$

其中,参数 $\tilde{a}_1 = 10$,$\tilde{b}_1 = 28$,$\tilde{c}_1 = 8/3$ 和 $\tilde{a}_2 = 36$,$\tilde{b}_2 = 20$,$\tilde{c}_2 = 3$ 时,系统(30)和(31)均处于混沌状态.将系统(30)和(31)分别化成系统(24)和(26)的形式,则有

$$
f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_2 - x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix},
$$

$$
F(x) = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 \end{bmatrix},
$$

$$
g(y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -y_1 y_3 \\ y_1 y_2 \end{bmatrix},
$$

$$
G(y) = \begin{bmatrix} y_2 - y_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & -y_3 \end{bmatrix}.
$$

$U_5 = [u_1, u_2, u_3]^{\mathrm{T}}$ 为控制输入.

设响应系统(31)与驱动系统(30)之间的误差状态为 $e_i(t) = y_i - x_i\ (i = 1,2,3)$,由(31)与(30)式相减,可得误差状态系统为

$$
\begin{aligned}
\dot{e}_1(t) &= \tilde{a}_2(y_2 - y_1) - \tilde{a}_1(x_2 - x_1) + u_1,\\
\dot{e}_2(t) &= -y_1 y_3 + \tilde{b}_2 y_2 - \tilde{b}_1 x_1 \\
&\quad - x_1 x_3 - x_2 + u_2,\\
\dot{e}_3(t) &= y_1 y_2 - \tilde{c}_2 y_3 - x_1 x_2 - \tilde{c}_1 x_3 + u_3 .
\end{aligned}
\tag{32}
$$

为了使得系统(30)和(31)实现自适应同步,根据(28)和(29)式可得系统的自适应控制器如下:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= -\tilde{a}_2 e_1 + \tilde{a}_2 e_2 - x_2 e_3 \\
&\quad + a_1(x_2 - x_1) - a_2(y_2 - y_1),\\
u_2 &= -\tilde{a}_2 e_1 - e_2 - (x_1 + e_1) e_3 + b_1 x_1 \\
&\quad - x_1 x_3 - x_2 + y_1 y_3 - b_2 y_2,\\
u_3 &= x_2 e_1 + (x_1 + e_1) e_2 - \tilde{c}_2 e_3 + x_1 x_2 \\
&\quad - c_1 x_3 - y_1 y_2 + c_2 y_3 .
\end{aligned}
\tag{33}
$$

参数自适应律为

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_1 &= (x_1 - x_2) e_1,\\
\dot{a}_2 &= (y_2 - y_1) e_1,\\
\dot{b}_1 &= -x_1 e_2,\\
\dot{b}_2 &= y_2 e_2,\\
\dot{c}_1 &= x_3 e_3,\\
\dot{c}_2 &= -y_3 e_3 .
\end{aligned}
\tag{34}
$$

其中 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 是对"未知"参数 $\tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \tilde{c}_1, \tilde{a}_2, \tilde{b}_2, \tilde{c}_2$ 的估计.

为了说明本节设计的自适应控制器和自适应律对参数未知的不同结构混沌系统同步的有效性,下面对以上的结果进行仿真,数值模拟中采用步长为 0.001 的四阶龙格-库塔方法,选取"未知"参数 $\tilde{a}_1 = 10$,$\tilde{b}_1 = 28$,$\tilde{c}_1 = 8/3$ 和 $\tilde{a}_2 = 36$,$\tilde{b}_2 = 20$,$\tilde{c}_2 = 3$.初始状态分别取为 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (10,10,10)$ 和 $(y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (2,2,2)$,则误差状态初始值为 $(e_1(0), e_2(0), e_3(0)) = (-8,-8,-8)$.自适应参数的初始值为 $(\tilde{a}_1(0), \tilde{b}_1(0), \tilde{c}_1(0)) = (3,3,3)$ 和 $(\tilde{a}_2(0), \tilde{b}_2(0), \tilde{c}_2(0)) = (3,3,3)$.图 5 为 Lorenz 系统和 Lü 系统的同步误差状态曲线,从仿真结果可以看出两个不同结构混沌系统的误差 $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$ 渐近趋近于零,即在控制器(33)的作用下,驱动系统(30)与响应系统(31)达到了自适应同步.图 6 是 Lorenz 系统和 Lü 系统的参数收敛曲线,从仿真结果可以看出随着时间的增加,参数估计值最终能够收敛到一个常值.

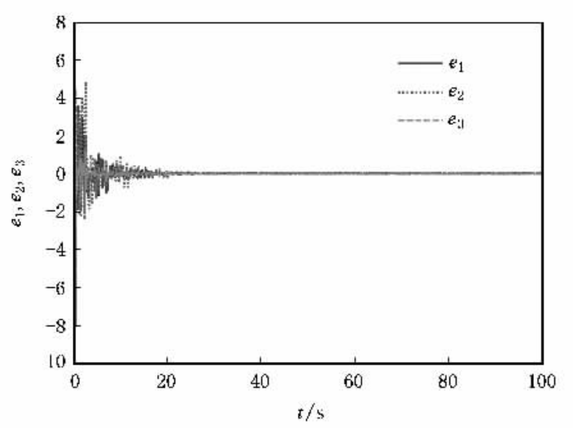

图 5 Lorenz 系统和 Lü 系统的同步误差曲线

情况 2 将系统(25)作为驱动系统,受控的响

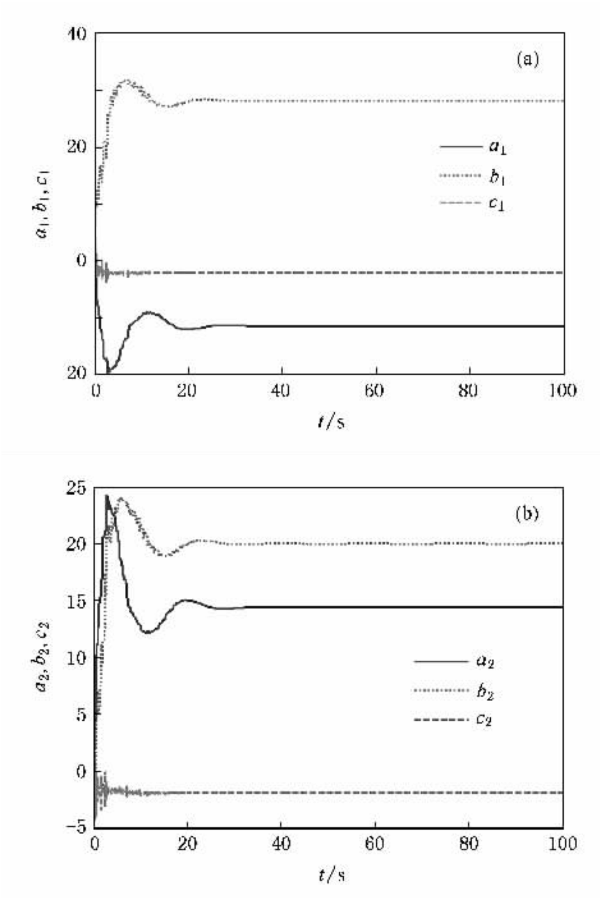

图 6　Lorenz 系统和 Lü 系统的参数收敛曲线　(a)参数 a_1，b_1，c_1 的收敛曲线；(b)参数 a_2，b_2，c_2 的收敛曲线

应系统为

$$\dot{x} = f(x) + F(x)\tilde{\theta}_1 + U_6(x,y). \qquad (35)$$

令响应系统(35)与驱动系统(25)的同步误差为 $e = x - y$，可得误差动态系统为

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{x} - \dot{y} \\ &= f(x) + F(x)\tilde{\theta}_1 - g(y) \\ &\quad - G(y)\tilde{\theta}_2 + U_6(x,y). \end{aligned} \qquad (36)$$

根据自适应控制法和参数估计方法，选取如下控制器和参数自适应律：

$$\begin{aligned}U_6(x,y) &= Ke - f(x) - F(x)\theta_1 \\ &\quad + g(y) + G(y)\theta_2, \end{aligned} \qquad (37)$$

$$\dot{\theta}_1 = F^{\mathrm{T}}(x)e, \dot{\theta}_2 = -G^{\mathrm{T}}(y)e, \qquad (38)$$

其中，K 是系数矩阵，参数 θ_1，θ_2 分别是"未知"参数 $\tilde{\theta}_1$，$\tilde{\theta}_2$ 的估计．根据以上的分析，我们有以下定理成立．

定理 3　对于不同结构的混沌系统(25)和(35)，在控制器(37)和参数自适应律(38)的作用下，响应系统(35)在任意初始状态下，均能实现与驱动系统(25)的自适应同步．

该定理的证明过程与定理 2 的证明过程相同，在此不再赘述．

注 2　在驱动系统和响应系统参数均未知的情况下，采用自适应控制方法实现不同结构混沌系统同步时，如果驱动系统和响应系统互换，则互换前后的自适应律和自适应控制器之间存在着一定的关系．令 θ_{11}，θ_{12} 与 θ_{21}，θ_{22} 分别代表 $U_5(x,y)$，$U_6(x,y)$中的参数估计，即 $\dot{\theta}_{11} = -F^{\mathrm{T}}(x)e$，$\dot{\theta}_{12} = G^{\mathrm{T}}(y)e$；$\dot{\theta}_{21} = F^{\mathrm{T}}(x)e$，$\dot{\theta}_{22} = -G^{\mathrm{T}}(y)e$，则 $\dot{\theta}_{11} = -\dot{\theta}_{21}$，$\dot{\theta}_{12} = -\dot{\theta}_{22}$，结合(28)和(37)式可得 $U_6(x,y) + U_5(x,y) = 2Ke$．

下面以 Lü 系统作为驱动系统，Lorenz 系统作为受控的响应系统，采用步长为 0.001 的四阶龙格-库塔方法，对本节设计的自适应同步控制器和参数自适应律进行数值仿真．系统"未知"参数以及状态的选取与 3.1 节情况 1 的取值相同．图 7 是驱动系统和响应系统互换之后的同步误差曲线，从仿真结果可以看出误差 $e_1(t)$，$e_2(t)$，$e_3(t)$可以趋近于零．图 8 是系统的参数收敛曲线，从仿真结果可以看出随着时间的增加，参数估计值最终能够收敛到一个常值．

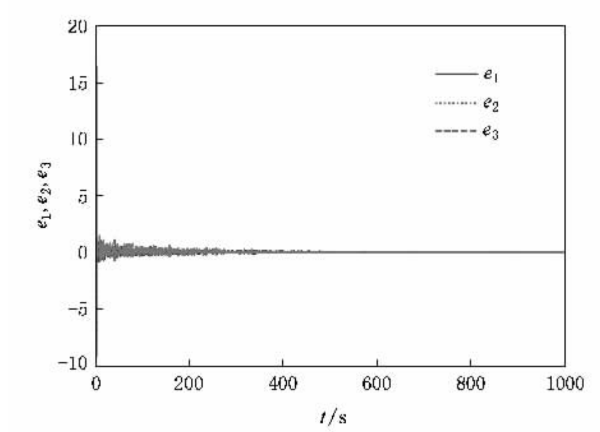

图 7　Lü 系统和 Lorenz 系统的同步误差曲线

从上述仿真结果可以看出，在驱动系统和响应系统互换之后，无论是误差状态还是参数辨识的速度都比互换之前效果稍差．产生这种结果的原因是：在情况 2 中，为了使误差系统在控制器的作用下能够化成 $\dot{e} = Ke$ 的形式，所选择的 K 与情况 1 相同，其目的是为了便于说明驱动系统和响应系统互换前后自适应控制器和自适应律之间的关系．而矩阵 K 是针对情况 1 的同步误差系统，按照对其改变较小的原则设计的，所以将其应用到情况 2 中，相对于情况 2 的误差系统变化就较大．

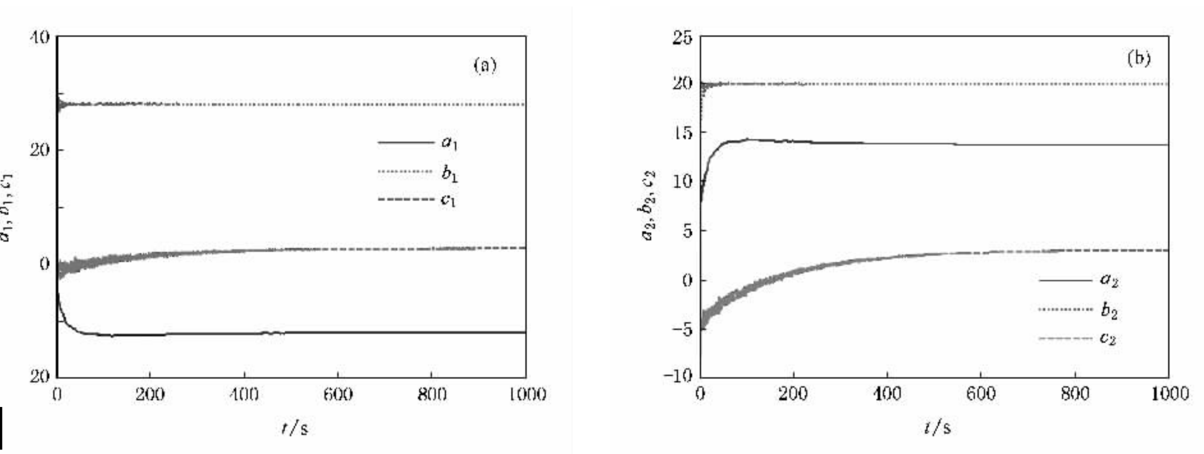

图 8 Lü 系统和 Lorenz 系统的参数收敛曲线 (a)参数 a_1，b_1，c_1 的收敛曲线，(b)参数 a_2，b_2，c_2 的收敛曲线

3.2. 自适应反同步控制器设计及其仿真

当驱动系统和响应系统参数均未知时，采用自适应控制的方法实现不同结构混沌系统反同步的讨论过程，与 3.1 节类似，分成两种情况.

情况 1 将系统(24)作为驱动系统，受控的响应系统为

$$\dot{y} = g(y) + G(y)\tilde{\theta}_2 + U_7(x, y). \tag{39}$$

令响应系统(39)与驱动系统(24)的反同步误差为 $e = y + x$，可得误差系统为

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{y} + \dot{x} \\ &= f(x) + F(x)\tilde{\theta}_1 + g(y) \\ &\quad + G(y)\tilde{\theta}_2 + U_7(x, y),\end{aligned} \tag{40}$$

其控制器和自适应控制律如下：

$$U_7 = Ke - f(x) - g(y) - F(x)\theta_1 - G(y)\theta_2, \tag{41}$$

$$\dot{\theta}_1 = F^{\mathrm{T}}(x)e, \dot{\theta}_2 = G^{\mathrm{T}}(y)e, \tag{42}$$

其中，K 是系数矩阵，与 3.1 节的 K 相同，参数 θ_1，θ_2 分别是"未知"参数 $\tilde{\theta}_1$，$\tilde{\theta}_2$ 的估计. 根据上面的分析，我们有如下的定理.

定理 4 对于不同结构的混沌系统(24)和(39)，在控制器(41)和参数自适应律(42)的作用下，响应系统(39)在任意初始状态下，均能实现与驱动系统(24)的自适应反同步.

注 3 由自适应同步控制器(28)和(37)与反同步自适应控制器(41)，可得它们之间的关系为

$$U_7 = U_5 - 2[f(x) + F(x)\theta_1],$$

$$U_7 = U_6 - 2[g(y) + G(y)\theta_2].$$

为了说明混沌同步自适应律与反同步自适应律之间的关系，令 θ_{31}，θ_{32} 代表 $U_7(x, y)$ 中的参数估计，即 $\dot{\theta}_{31} = F^{\mathrm{T}}(x)e$，$\dot{\theta}_{32} = G^{\mathrm{T}}(y)e$，则有 $\dot{\theta}_{31} = -\dot{\theta}_{11}$，$\dot{\theta}_{32} = \dot{\theta}_{12}$ 与 $\dot{\theta}_{31} = \dot{\theta}_{21}$，$\dot{\theta}_{32} = -\dot{\theta}_{22}$.

下面以 Lorenz 系统作为驱动系统，Lü 系统作为受控的响应系统. 采用步长为 0.001 的四阶龙格-库塔方法，对以上的分析结果进行数值仿真. 初始状态分别取为 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (-0.1, -0.1, -0.1)$ 和 $(y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (5, 5, 5)$，则误差状态初始值为 $(e_1(0), e_2(0), e_3(0)) = (5.1, 5.1, 5.1)$. 系统"未知"参数的取值与 3.1 节情况 1 的取值相同. 图 9 是 Lorenz 系统和 Lü 系统的相应状态仿真曲线，驱动系统(24)与响应系统(39)的状态曲线等振幅但运动方向相反，即两个混沌系统在所设计控制器以及自适应参数的作用下达到了反同步. 图 10 为两个混沌系统的参数收敛曲线.

为了说明驱动系统与响应系统互换之后自适应控制器和自适应律与互换之前的关系. 下面对互换之后的情况进行讨论.

情况 2 将系统(25)作为驱动系统，受控的响应系统为

$$\dot{x} = f(x) + F(x)\tilde{\theta}_1 + U_8(x, y). \tag{43}$$

令响应系统(25)与驱动系统(43)的反同步误差为 $e = x + y$，，则误差动态系统为

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{x} + \dot{y} \\ &= f(x) + F(x)\tilde{\theta}_1 + g(y) + G(y)\tilde{\theta}_2 + U_8(x, y),\end{aligned}$$

与(40)式的表达形式相同. 因此(43)式可以在(41)，(42)式所示的控制器以及自适应律的作用下，实现与驱动系统(25)的自适应反同步. 这样的结果说明了对于两个不同结构(阶数相同)的混沌系统，互换前后的混沌系统可以在同一控制器和自适应律的作用下实现它们之间的自适应反同步.

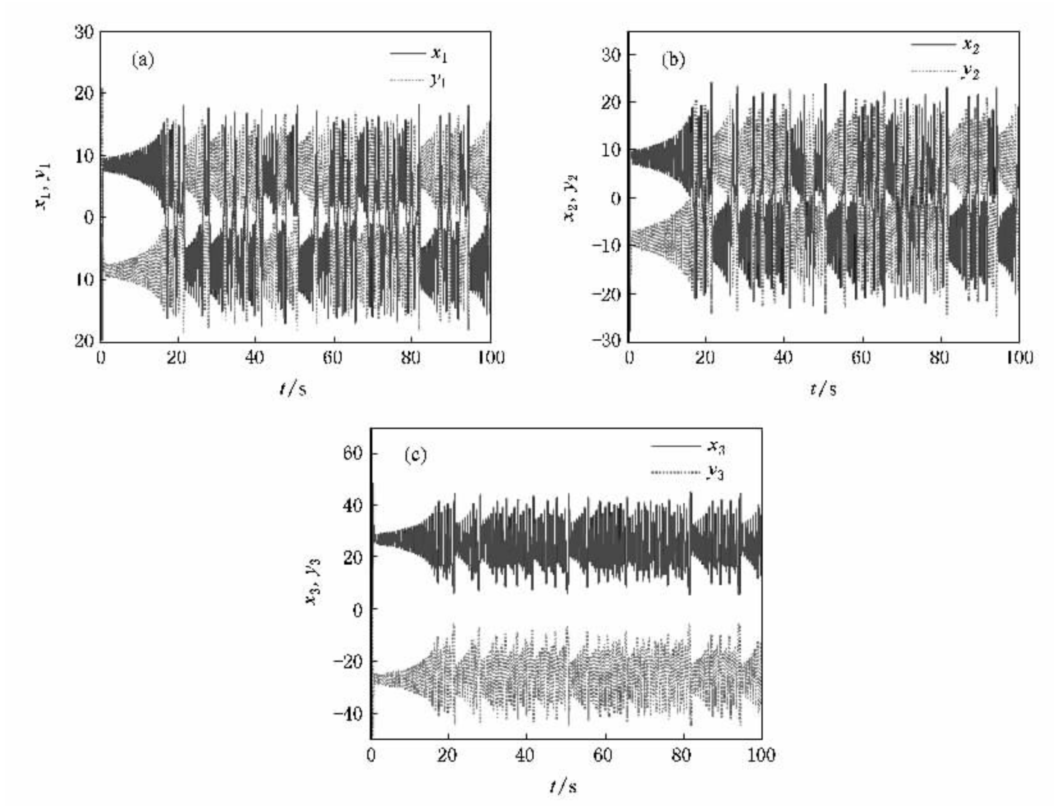

图 9　Lorenz 系统和 Lü 系统的自适应反同步仿真曲线　(a) x_1，y_1 的反同步曲线，(b) x_2，y_2 的反同步曲线，(c) x_3，y_3 的反同步曲线

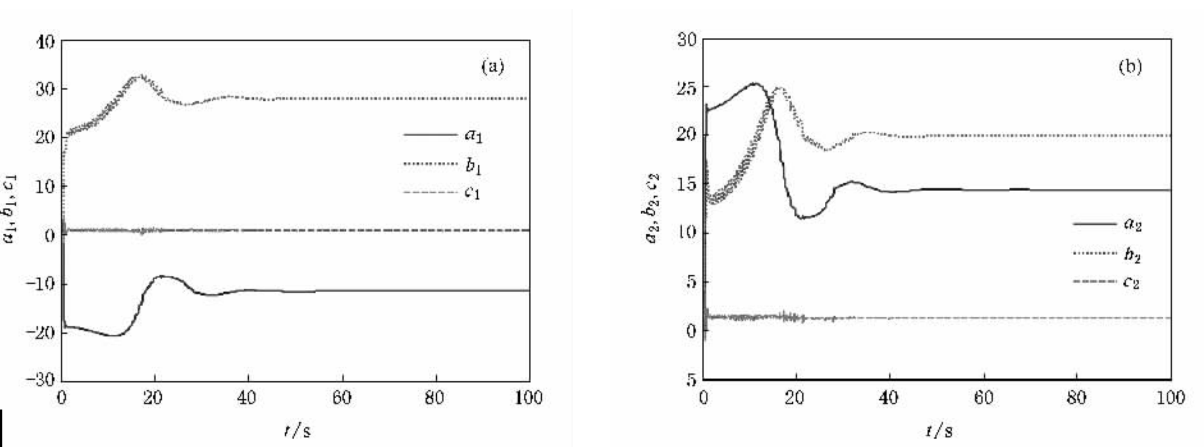

图 10　Lorenz 系统和 Lü 系统的参数收敛曲线　(a) 参数 a_1，b_1，c_1 的收敛曲线，(b) 参数 a_2，b_2，c_2 的收敛曲线

“未知”参数以及系统状态初始值均与情况 1 相同，对驱动系统和响应系统互换后的混沌反同步进行数值仿真. 图 11 为 Lü 系统与 Lorenz 系统的相应状态仿真曲线，它们振幅相等，向着相反方向运动，即两个混沌系统在与情况 1 相同的自适应控制器和自适应参数的作用下实现了反同步. 图 12 是这两个混沌系统的参数收敛曲线.

4. 结　　论

本文研究了不同结构混沌系统的同步与反同步问题，并将其分成两种情况来讨论. 首先在参数已知的情况下，采用主动控制法实现了两个混沌系统的同步与反同步，并将主动控制器设计时需要确定的常数矩阵推广成其元素与系统状态有关的形式. 其次，在驱动系统和响应系统参数均未知的情况下，基于 Lyapunov 稳定性理论和自适应控制方法，给出自适应控制器和参数自适应律. 讨论了以上两种情况的驱动系统和响应系统发生互换前后的控制器和自适应律之间的关系，并针对每一种情况进行了数值仿真，结果证明了本文所设计控制器和自适应律的可行性与有效性.

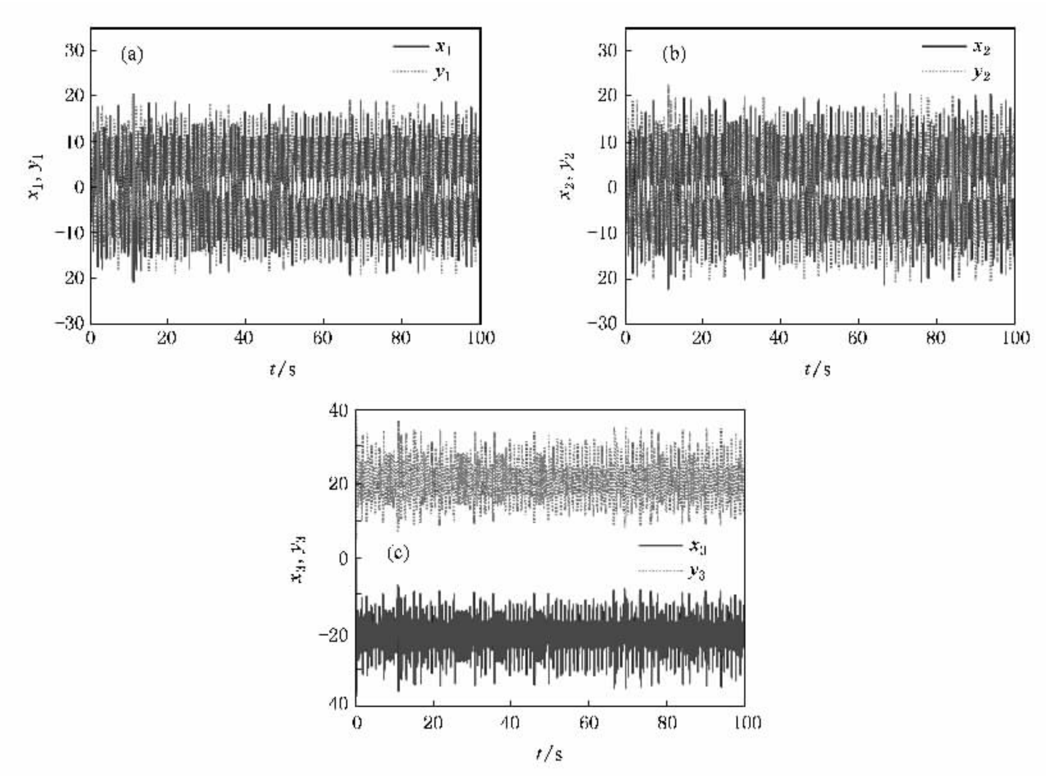

图 11 Lü 系统和 Lorenz 系统的自适应反同步仿真曲线 (a) y_1，x_1 的反同步曲线，(b) y_2，x_2 的反同步曲线，(c) y_3，x_3 的反同步曲线

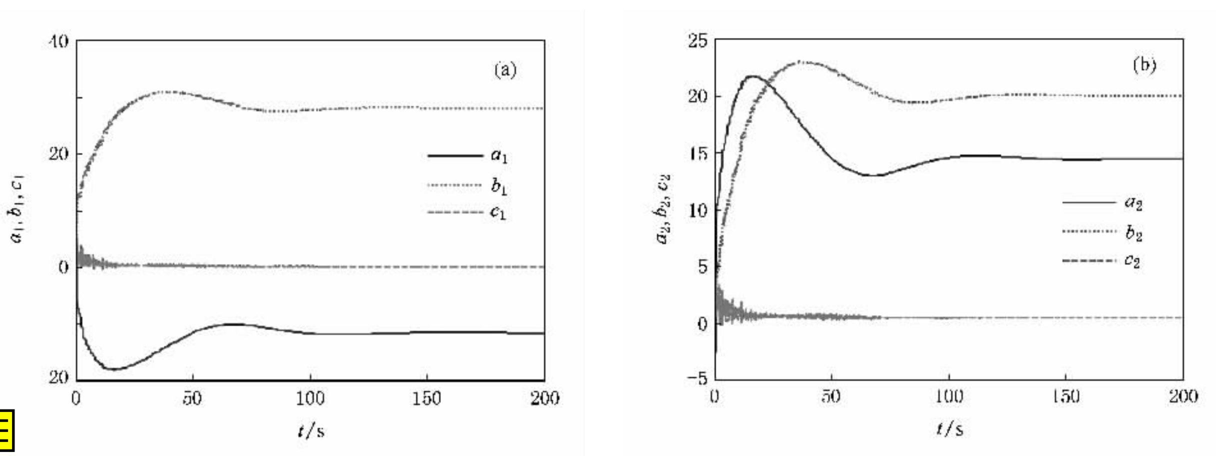

图 12 Lü 系统和 Lorenz 系统的参数收敛曲线 (a)参数 a_1，b_1，c_1 的收敛曲线，(b)参数 a_2，b_2，c_2 的收敛曲线

[1] Pecora L M，Carroll T L 1990 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **64** 821

[2] Wang Y W，Guan Z H 2006 *Chaos Solitons*. *Fract*. **27** 97

[3] Meng J，Wang X Y 2007 *Phys*. *Lett*. A **369** 294

[4] Li G H 2006 *Chaos Soliton*. *Fract*. **29** 490

[5] Chen Y，Chen X，Gu S 2007 *Nonlinear Anal*. **9** 1929

[6] Wang X Y，Wang M J 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 6843 (in Chinese) [王兴元、王明军 2007 物理学报 **56** 6843]

[7] Li G H 2005 *Chaos Soliton*. *Fract*. **26** 87

[8] Zhang G，Liu Z R，Zhang J B 2008 *Phys*. *Lett*. A **372** 447

[9] Hu J，Chen S H，Chen L 2005 *Phys*. *Lett*. A **339** 455

[10] Chen H H 2008 *Phys*. *Lett*. A **372** 1841

[11] Haeri M，Emadzadeh A A 2007 *Chaos Soliton*. *Fract*. **31** 119

[12] Chiang T Y，Lin J S，Liao T L，Yan J J 2008 *Nonlinear Anal*. **68** 2629

[13] Li S，Xu W，Li R H，Li Y P 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 5681 (in Chinese) [李 爽、徐 伟、李瑞红、李玉鹏 2006 物理学报 **55** 5681]

[14] Zhang H G, Huang W, Wang Z L, Chai T Y 2006 *Phys. Lett.* A **350** 363
[15] Li W L, Chen X Q, Shen Z P 2008 *Phys.* A **387** 3747
[16] Li G H, Zhou S P 2007 *Chaos Soliton. Fract.* **32** 516
[17] Wang X Y, Wu X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 605 (in Chinese) [王兴元、武相军 2006 物理学报 **55** 605]

Adaptive synchronization and anti-synchronization of two different chaotic systems*

Cai Na[1)†] Jing Yuan-Wei[1)] Zhang Si-Ying[1)2)]
1) (*College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China*)
2) (*Institute of Complexity Science, Qingdao University, Qingdao 266071, China*)
(Received 6 June 2008; revised manuscript received 17 July 2008)

Abstract

Chaos synchronization and anti-synchronization of two chaotic systems with different structures are investigated. When the parameters are known in advance, the synchronization and anti-synchronization are realized by the active control. The method of designing controllers with active control is generalized. When the parameters are completely unknown, the adaptive controllers and the adaptive laws of parameters are given based on the Lyapunov stability theory and adaptive control method, which realizes adaptive synchronization and anti- synchronization of two different chaotic systems, and identifies the unknown parameters. The drive system and response system are interchanged during the controller designing. The relationship of the controllers and the adaptive laws before and after the interchangement are investigated. The numerical simulation results verify the effectiveness of the proposed scheme.

Keywords: chaos synchronization, anti-synchronization, active control method, adaptive control method
PACC: 0545

* Project support by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 62074009).
† E-mail: caina302@yahoo.com.cn